

Actas de las

VIII Jornadas de Educación Matemática y

V Jornadas de Investigación en Educación Matemática

Miradas y desafíos de la educación matemática en el siglo XXI

COMPILADORAS

—

Sara Scaglia

Karina Temperini

Marcela Götte



**UNL • FACULTAD
DE HUMANIDADES
Y CIENCIAS**

**Actas de las VIII Jornadas de
Educación Matemática y V Jornadas
de Investigación en Educación
Matemática.**

**Miradas y desafíos de la educación
matemática en el Siglo XXI**

Compiladoras: Sara Scaglia, Karina Temperini y
Marcela Götte

Universidad Nacional del Litoral

Actas de las VIII jornadas de educación matemática y V jornadas de investigación en educación matemática: miradas y desafíos de la educación matemática en el siglo XXI; Compilación de Sara Scaglia; Karina Temperini; Marcela Götte. - 1ª edición especial. - Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral, 2025.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-692-416-0

1. Educación. 2. Matemática. 3. Enseñanza. I. Scaglia, Sara, comp. II. Temperini, Karina, comp. III. Götte, Marcela, comp.

CDD 370.72

Autoridades

Rector UNL

Enrique Mammarella

Decana FHUC

Laura Tarabella

Vicedecano FHUC

Daniel Comba

Departamento de Matemática

Directora: Sara Scaglia

Carrera de Matemática

Directora: Marcela Götte

Vicedirectora: Karina Temperini

Junta Departamental

Silvia Bernardis, Liliana Tauber y Karina Temperini

Comité Organizador

Silvia Bernardis, María Eugenia Cammisi, Patricia Cavatorta, María Florencia Cruz, María Susana Dal Maso, Marcela Götte, Fabiana Kiener, Nerina Giménez, Natalia Martínez, Micaela Mazzola, Yanina Redondo, Fernanda Renzulli, Silvana Santellán, Sara Scaglia, Berardino Santirocco, Liliana Tauber, Karina Temperini, Marisa Toschi y María Amelia Vignatti.

Comité evaluador

Silvia Bernardis, Ana María Bressan, Flavia Buffarini, Gabriela Pilar Cabrera, María Eugenia Cammisi, Gustavo Carnelli, Patricia Cavatorta, Eleonora Cerati, Araceli Coirini, Mariela Cravero, María Florencia Cruz, María Susana Dal Maso, Betina Duarte, María Emilia Echeveste, Cecilia Elguero, Cristina Esteley, Silvia Etchegaray, Adriana Favieri, Nicolás Gerez Cuevas, Marcela Götte, María Lorena Guglielmone, María Laura Invilkelried, Fabiana Kiener, Cecilia Laspina, Rosa Mabel Licera, Adriana Magallanes, Ana María Mántica, Natalia Martínez, Micaela Mazzola, María del Valle Mina, Fabiana

Montenegro, Virginia Montoro, Yanina Redondo, Mabel Rodriguez, Irma Saiz, Silvana Santellán, Sara Scaglia, Carmen Sessa, Natalia Sgreccia, Liliana Tauber, Karina Temperini, Marisa Toschi, Alejandro Verón, María Amelia Vignatti y María Angélica Zurbriggen.

Agradecimientos

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a:

- la Facultad de Humanidades y Ciencias; en particular, a su equipo de gestión, que nos permitió llevar a cabo este proyecto.
- el equipo editorial de la Facultad de Humanidades y Ciencias, por su apoyo incondicional y por la atención a cada uno de nuestros requerimientos.
- las/los trabajadoras/es de Bedelía de la Facultad, que con compromiso y diligencia habilitaron las actividades virtuales.
- las/los docentes del Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, por acompañar y apoyar cada una de las decisiones vinculadas con la realización de las Jornadas. En particular, a las/los colegas integrantes del Comité Organizador que asumieron con compromiso y entusiasmo la enorme tarea de darle forma y contenido.
- las/los profesores que dispusieron de su tiempo, atención y sabiduría para coordinar la gestión de las diversas actividades y para llevar adelante las propuestas de capacitación (cursos y talleres) que forman parte de esta edición.
- las y los especialistas en educación matemática de nuestro país, que colaboraron en la esencial tarea de evaluar las contribuciones de las/los expositores.
- las/los especialistas que nos honraron al aceptar nuestra invitación para compartir sus reflexiones, experiencias y conocimientos: Horacio Itzcovich, Liliana Tauber y Natalia Sgreccia.
- las/los colegas y estudiantes que participaron con sus producciones, apostando a esta instancia de encuentro e intercambio que procuramos generar en cada edición.
- las/los colegas y estudiantes asistentes, que una vez más confían en nuestro trabajo y lo expresan con su comprometida participación en cada uno de los espacios propuestos en el marco de las Jornadas.

Índice

Presentación

Sara Scaglia, Karina Temperini y Marcela Götte

Resúmenes de conferencias plenarias

Conferencia plenaria

Formación estadística de los profesores: un nexo entre Scaloni, la igualdad social y la ciudadanía crítica

Liliana Tauber

Conferencia de cierre “Prof. Juan Carlos Canavelli”

La formulación de proyectos innovadores como posibilidad integradora de cierre de carrera en el Profesorado en Matemática

Natalia Sgreccia

Ponencias

Eje 1. Educación matemática en el nivel inicial y en el nivel primario

Reportes de investigación

Matemática en sala de 3 años: desafíos para pensar las propuestas de enseñanza

María Teresa García, Patricia Cavatorta y Cecilia Odetti

Capacidades puestas en juego en un proyecto de Modelización Matemática en el nivel primario

Adriana Magallanes, Alejandra Schervinsky, Patricia Graglia, Luciana Maggioni y Cristina Esteley

Avances de una experiencia colaborativa en torno a la enseñanza de los números racionales en una escuela primaria de la provincia de Santa Fe

María Laura Imvinkelried

Eje 2. Educación matemática en el nivel secundario

Reportes de investigación

Enseñanza de funciones polinómicas: propuesta didáctica que incorpora el aprendizaje móvil y el uso de GeoGebra

Agustina Bayés y Viviana Angélica Costa

El sentido de la clasificación de los cuadriláteros. Análisis praxeológico de un problema

Gabriela Perez y Cecilia Elguero

La exploración en los primeros acercamientos al trabajo algebraico: el papel de los ejemplos en la construcción de la generalización

Marina Andrés, Valeria Borsani, Verónica Cambriglia, Enrique Di Rico, Nicolás Igolnikov, Juan Pablo Luna, Mariana Matovich y Carmen Sessa

Pensamiento deductivo y contenido matemático en la escuela secundaria

Marcela Falsetti, Marisa Álvarez, Matías Maidana y Miguel Rodríguez

Eje 2. Educación matemática en el nivel secundario

Reflexiones y experiencias para el aula

Rompiendo barreras: tareas de modelización matemática en el ciclo básico de Educación Secundaria obligatoria

Martina Cassini, María Florencia Cruz y María Eugenia Cammisi

Experiencia en el aula utilizando el Tangram y GeoGebra, para iniciar el aprendizaje de los cuadriláteros y sus propiedades, en un curso de primer año de una escuela secundaria de Entre Ríos

Érika Vanesa Galeano, Egle Elisabet Haye y Stella Vaira

Tareas de aprendizaje para el desarrollo de la comunicación matemática en un ambiente ludificado

Diego Alejandro Miranda Miranda y César Guillermo Rendón Mayorga

Subprocesos de modelización matemática desarrollados y modelos producidos por un grupo de estudiantes de segundo año del nivel secundario

Valentina Albrecht, María Florencia Cruz y Antonio Moreno

El contexto sociopolítico en el aula de matemática

Sara Scaglia y Fabiana Kiener

Una propuesta de actividades para la enseñanza en la escuela secundaria con tesselaciones

Andrea Carolina Antunez, Martina Magalí Cajal, Darío Daniel Devia, Angela Berenice Fernández y Nadia Godoy

Eje 3. El uso de tecnologías en el aula de matemática

Reportes de investigación

Simuladores en la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria

Melisa Mazzaro, Fernanda Renzulli y Patricia Cavatorta

Eje 3. El uso de tecnologías en el aula de matemática

Reflexiones y experiencias para el aula

Recursos audiovisuales: su potencial en el aula de Matemática

Hernán Martín Alegre, Raquel Garcia y Natalia Sgreccia

Una actividad de modelación con tecnología: La velocidad de Bolt en su histórica carrera de 100 metros de 2009

Daniela Laura Parada y César Lau Mego

Eje 4. Educación matemática en la formación docente

Reportes de investigación

Problemas de geometría fractal: soluciones propuestas por profesores de matemática y por chatbots

Patricia Sureda, Verónica Parra, Ana Corica, Daniela Godoy y Silvia Schiaffino

Modelización Matemática: revisión de algunos programas de estudio en los Profesores en Matemática y en Física de una universidad pública del nordeste argentino
Patricia Vila Torres, Claudia Zang, Gretel Fernández von Metzen, Alejandro Moreno, Jorge Manzur y Natalia León

Uso competente de criterios de idoneidad didáctica para identificar conflictos epistémicos en videos educativos
Manuel Alejandro Verón, Belén Giacomone y Marcel Pochulu

Utilización de un problema de lápiz y papel recuperado de un contexto cotidiano e implementado en un curso de ecuaciones diferenciales
Claudia Zang, Silvia Salomón, Fabiana de Perini y Gretel Fernández von Metzen

Estudio de los errores en la resolución de inecuaciones en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemática
Carina Duna y Alejandra Mercedes Martínez

La homotecia en el tiempo: Transformaciones de este saber
Paula Rabanedo y Viviana Carolina Llanos

Complementariedad de las geometrías sintética y analítica: el caso del Profesorado en Matemática de la UNR
Lucía Schaefer y Natalia Sgreccia

Los números reales y las concepciones del infinito
María Carolina Benito, Mara Cedrón, Betina Duarte, Uriel Kasman, Cecilia Lamela y María Cecilia Montes de Oca

La congruencia de triángulos: estudio epistemológico en el ámbito del profesorado en matemática
Alicia Alejandra Azar y Rosa Mabel Licera

Enseñanza de límite puntual. Una aproximación a la fertilidad de las consignas matemáticas
Bibiana Iaffei, Adriana Favieri y Patricia Cavatorta

Análisis de clasificaciones y definiciones de cuadriláteros en libros para la formación docente

Cecilia Laspina, Diana Giuliani y Silvia Bernardis

Eje 4. Educación matemática en la formación docente **Reflexiones y experiencias para el aula**

Objeto Digital de Aprendizaje: una estrategia de alfabetización para el desarrollo de Competencias Digitales en el profesorado en matemática

Mario Ubaldo Avila, Luis Fernando Crespo, Beatriz Josefina Solís Munguía y María de las Mercedes Moya

Reconstrucción de un Liliun con cónicas: un problema de modelación matemática

Beatriz Josefina Solís Munguía, María de las Mercedes Moya, Mario Ubaldo Avila y Luis Fernando Crespo

Innovar en la formación docente: Integración de contenidos estadísticos y geofísicos a través del enfoque STEAM

Agustina Casco Alberino, Beatriz Susana Marrón y Sandra Analía Hernández

Análisis ontosemiótico de una tarea de divisibilidad

Florencia Canale, Claudina Canter y Marianela Sosa

Eje 5. Educación matemática en carreras no matemáticas **Reportes de investigación**

La evaluación en matemática a partir de la implementación de un REI en la formación de profesores en Biología

Gretel Fernández von Metzen, Verónica Parra, Jonathan Schuster y Claudia Zang

Diferentes aspectos para el abordaje de la argumentación en la clase de matemática según una revisión bibliográfica. Una encuesta sobre concepciones y experiencias de estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería

Alejandra Inés Gagliardo, Fabiana Montenegro y Analía Raquel Demarchi

GeoGebra en el análisis geométrico de obras de arquitectura

María Graciela Imbach y María Victoria Vuizot

Aprender matemática por proyectos. Un análisis del trabajo en las aulas de las carreras de diseño

Pablo Coll, Ernesto López y Laura Reynoso

Comprensión del concepto de límite y continuidad de funciones de una variable real

Yanina Macarena Morales, María Florencia Mostto, Octavio Agustín Raschetti y Sergio Pablo Farabello

Eje 5. Educación matemática en carreras no matemáticas

Reflexiones y experiencias para el aula

Matemática y el modelo de aprendizaje experiencial. Una propuesta para el aula universitaria de acuerdo a los estilos de aprendizaje

Silvia Vrancken, Mariana Schmithalter y María Sol Bisang

Diseño de objetos digitales de aprendizaje para abordar contenidos matemáticos en la carrera de ingeniería agronómica

Luis Fernando Crespo, Mario Ubaldo Avila, Beatriz Josefina Solís y María de las Mercedes Moya

Modalidad híbrida y uso de redes sociales en la enseñanza del cálculo en carreras de Ciencias Económicas

Luciana Raquel Castillo, Aída Evangelina Fernández, Elisa De Rosa y Elsa Rodríguez Areal

Eje 6. Educación estadística

Reportes de investigación

Alfabetización Estadística e Ideas Estocásticas Fundamentales implícitas en un dispositivo didáctico sobre compromiso climático

Maria Victoria Bonzi, Liliana Mabel Tauber y Yanina Redondo

Análisis de contenido de tareas que permiten medir niveles de comprensión gráfica
Liliana Tauber y Silvana Santellán

Análisis de contenido de una tarea basada en datos sociales que vincula elementos de la Alfabetización estadística
María Cecilia Bertero y Liliana Mabel Tauber

Representaciones de datos cuantitativos cruzados construidas por ingresantes de Psicología
Mariano Castellaro, Nadia Soledad Peralta, Juan Manuel Curcio y María Agustina Tuzinkievicz

Eje 6. Educación estadística

Reflexiones y experiencias para el aula

¿Qué ves cuando me ves? Propuesta de enseñanza de estadística descriptiva
Cecilia De Cortazar, Anyelen Di Paolantonio y María Valeria Calandra

CONVERSATORIO

Corolarios de la Especialización: discusiones y reflexiones didácticas producidas en el marco de la EDM

El problema de la construcción del sentido de los saberes matemáticos

Matemática en función de un café
Melina Monutti y Valentina Albrecht

Sobre conceptualizaciones de la pendiente de una recta en estudiantes universitarios
Claudia Graciela Reyes

Procesos de generalización algebraica en la construcción del pensamiento computacional
María Marta Novaira, Flavia Buffarini y Francisco Bavera

El proceso de modelización algebraico-funcional en la formación de profesores en matemática

Natalia Gisel Leiria y Flavia Belia Buffarini

Una propuesta de estudio para reconstruir el sentido de las ecuaciones lineales de una variable

Florencia Abella y Flavia Buffarini

La construcción de sentidos colectivos: una posibilidad para resignificar herramientas didácticas en la formación del profesor en matemática

María Eugenia Ferrocchio y Silvia Catalina Etchegaray

La construcción de conocimiento didáctico-matemático en la formación de formadores. Análisis de un problema en torno a la divisibilidad

Melina Sposetti y Flavia Buffarini

Modelo concreto *vs* entorno algebraico en la enseñanza de los números enteros

Oscar Alberto Aballay y Ailén Rocío Godoy Sánchez

Construcción del sentido estadístico a través de la Inferencia Informal

Adriana Magallanes y Liliana Tauber

El campo aditivo de los números enteros en la matemática y su enseñanza

Karen Anahi Dileo y Diego Francisco Vilotta

El problema de la validación en Matemática

La validación de proposiciones en la entrada a la universidad: complejidad ontosemiótica de las prácticas de validación pretendidas

Bettina Milanesio y María Elena Markiewicz

Análisis didáctico matemático de la actividad matemática generada por un problema que requiere la elaboración de una relación general

Elena Ferro y María Elena Markiewicz

La validación en el aprendizaje de la Matemática en el nivel secundario

Diego Armando Ramirez

Análisis de los procesos de validación producidos por estudiantes de distintos años de carreras de la FaCENA- UNNE en el estudio de la paridad del producto de números naturales

Luz María Lucrecia Meza

El problema de la articulación y organización de los contenidos matemáticos

Diseño y análisis de tareas para la enseñanza de las operaciones con racionales desde una mirada estocástica

Alexis Hilguero

La articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica. Un estudio en la formación del profesor en Matemática

Natalia de Lourdes Heredia y Cecilia Elguero

El proceso de modelización algebraico-funcional. Una propuesta didáctica para la educación secundaria

Williams Noel Uribe y Flavia Buffarini

Un estudio ontológico-semiótico para gestionar prácticas matemáticas: un caso de prácticas aritméticas-algebraicas

Lía Andrea Vázquez y Silvia Catalina Etchegaray

Estudio de una propuesta didáctica en torno a la noción de máximo común divisor: una posibilidad de repensar la articulación entre la aritmética y el álgebra

Dayana Canale y María Eugenia Ferrocchio

Escenario de modelización en una escuela secundaria: características y empoderamiento estudiantil

Marcelo Javier Sosa

Un análisis didáctico-matemático de tareas que aportan al problema de la articulación entre la aritmética y el álgebra a través del tratamiento algebraico de lo numérico

Dayana Gisel Canale, Florencia Belén Romero Serafini y Uribe Wiliams Noel

Hacia la construcción de un significado epistémico de referencia sobre la problemática de la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica contextualizado en el nivel secundario

Marianela Sosa, Irma Saiz y Cecilia Elguero

El pasaje de la Aritmética al Álgebra: un problema de articulación

Silvia Etchegaray, Claudina Canter, María Eugenia Ferrocchio y Nora Zón

TALLERES

Datos en acción: construimos sentido estadístico a través de la visualización

Liliana Tauber, Silvana Santellán y Yanina Redondo

Análisis de propuestas de enseñanza presentes en libros de texto, en relación con la articulación entre las geometrías sintética y analítica

Fátima Quinteros y Cecilia Laspina

Sentido Algebraico en la escuela secundaria

Silvia Bernardis y Micaela Mazzola

La modelización matemática en el aula: experiencias, desafíos y reflexiones

Fabiana Kiener, Natalia Martínez, Sara Scaglia y María Amelia Vignatti

Los caminos del azar para estimar probabilidades

María Florencia Cruz, Karina Temperini y María Eugenia Cammisi

Juegos con dados digitales: posibles caminos para la resolución de problemas

Micaela Mazzola y Patricia Cavatorta

Concurso de recursos de comunicación visual “La Matemática Está En Todas Partes”

INFOGRAFÍAS

FOTOGRAFÍAS

Presentación

Una vez más las/los integrantes del Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL nos abocamos a la tarea de generar un espacio para el intercambio, la discusión y la reflexión sobre problemáticas que atraviesan nuestro campo profesional en torno a la formación matemática de niños y jóvenes y de docentes en matemática.

Hace dos años atrás, cuando empezamos a diagramar estas Jornadas, no imaginamos que las mismas iban a desarrollarse en un contexto tan complejo para las universidades nacionales, con salarios de trabajadores docentes y no docentes muy deteriorados, con un presupuesto similar al del año 2023 para gastos de funcionamiento, que resulta insuficiente pues no contempla el aumento inflacionario. En ese momento, comenzamos a pensar con mucho entusiasmo e ilusión en estas Jornadas. Decidimos retomar las actividades que ya veníamos implementando en jornadas anteriores con mucho éxito, tales como la invitación a reconocidos especialistas para que compartan con nosotros inquietudes y reflexiones relacionadas con sus actividades docentes e investigativas: Horacio Itzcovich, de la Universidad Pedagógica Nacional, Liliana Tauber, de nuestra Universidad, y Natalia Sgreccia, de la Universidad Nacional de Rosario.

Con la intención de homenajear a dos docentes de nuestro Departamento con quienes tuvimos el privilegio de formarnos y de compartir fecundos momentos de estudio y trabajo, decidimos denominar a la conferencia inaugural “Prof. Susana Moriena” y a la conferencia de cierre “Prof. Juan Carlos Canavelli”, respectivamente. Esperamos que la impronta de cada uno de ellos, el compromiso con el trabajo, el amor por la disciplina y por su enseñanza continúen caracterizando el quehacer de quienes seguimos sus pasos.

Asimismo, consideramos esencial sostener la invitación para que colegas de nuestro país y de países hermanos de latinoamérica compartan con nosotros sus producciones y avances en el marco de proyectos de investigación y sus reflexiones y propuestas innovadoras para el aula de matemática. La invitación realizada a las/os colegas para la presentación de trabajo abarca dos categorías:

a. Reportes de investigación, que incluye investigaciones concluidas o avances de investigaciones sobre educación matemática.

b. Reflexiones y experiencias para el aula, que reúne propuestas didácticas de matemática para distintos niveles de escolaridad.

Las contribuciones se organizaron en torno a seis ejes que constituyen ámbitos de interés de la comunidad de educadores/as matemáticos que participa en las Jornadas, a saber:

1. Educación matemática en el nivel inicial y en el nivel primario.
2. Educación matemática en el nivel secundario.
3. El uso de tecnologías en el aula de matemática.
4. Educación matemática en la formación docente.
5. Educación matemática en carreras no matemáticas.
6. Educación estadística.

En relación con actividades que venimos sosteniendo en ediciones anteriores, decidimos también sostener el dictado de talleres dirigidos a las/los asistentes a las Jornadas, sobre temáticas en torno a las cuales trabajamos docentes del Departamento, (en algunos casos con colegas invitados) en el marco de nuestras actividades de docencia, extensión e investigación. Evaluamos, además, como de especial interés reeditar el concurso dirigido a estudiantes de secundaria a las/los que invitamos a buscar las matemáticas en el mundo que nos rodea.

El compromiso y entusiasmo del Comité Organizador en la organización de las actividades se manifestó en el interés por generar nuevos espacios de discusión y trabajo en el marco de estas Jornadas. La situación compleja anteriormente aludida no nos disuadió de sostener estos nuevos espacios. Hubo, sí, que resignar la presencialidad y nos comprometimos a sacar partido de la virtualidad, a la que nos vimos obligados a adaptarnos durante 2020 y 2021. A continuación, presentamos una breve descripción de los nuevos espacios que se han incluido en las Jornadas 2024:

- El *Primer Encuentro de Estudiantes de Profesorados en Matemática*. Tuvo lugar a lo largo de dos sesiones de tres horas cada una. En la coordinación y gestión del Encuentro tuvieron un rol central las/los representantes estudiantiles del Departamento de Matemática: Franco Nicolás Bordón, Martina Cassini, Solange Femia, Daiana Luna y Noel Palomino. Durante su desarrollo estudiantes de Profesorados de matemática universitarios y de institutos de nivel Superior debatieron en torno a temáticas de interés y generaron vínculos y redes de intercambio fecundas para su formación como futuros profesionales de la enseñanza de la matemática.

Las consignas de trabajo, diseñadas en conjunto entre las/os representantes estudiantiles y docentes del Departamento, fueron las siguientes:

1. (Para trabajar en forma grupal) Producir un meme (imagen con texto) que refleje ser estudiante de Profesorado en Matemática para luego compartir en un Padlet. Indicar nombre y apellido de los miembros del grupo e institución/nes a la/s que pertenece/n.

2. (Para responder en forma individual) Responder en un Padlet las siguientes preguntas: a) ¿Qué te entusiasma de ser docente?, y b) Te invitamos a viajar en el tiempo. Estamos en 2040. Soy profesor/a de Matemática. ¿Qué me veo haciendo?

3. (Para trabajar en forma grupal) Producir una consigna para introducir un tema matemático en una clase de nivel medio o superior, para compartir en un Padlet y subir a una carpeta de Drive. Puede resultar útil la caracterización del potencial matemático de una consigna caracterizada en el documento que les compartimos (adjuntado en forma previa a las/los estudiantes inscriptos al Encuentro). Especificar nombre y apellido de los miembros del grupo e institución a la que pertenece cada uno, año de escolaridad y nivel educativo al que está dirigido la propuesta y tema que se pretende introducir.

En torno a cada una de las consignas anteriores se generaron espacios para la puesta en común y discusión. Al final, las/los estudiantes asistentes valoraron positivamente la posibilidad de contar con un ámbito de intercambio entre pares, para pensarse como docentes y reflexionar sobre algunas de las tareas profesionales que deberán desarrollar.

- El Conversatorio denominado *Corolarios de la Especialización: discusiones y reflexiones didácticas producidas en el marco de la EDM*, propuesto como espacio de comunicación y conocimiento de las producciones realizadas por estudiantes y egresados en el marco de la Especialización en Didáctica de la Matemática (EDM). Esta carrera interinstitucional se dicta entre tres universidades nacionales (UNL-UNRC-UNSL), ha sido acreditada por CONEAU con la máxima categoría (categoría A). Se han dictado dos cohortes y en 2025 comenzará la tercera. Las sesiones del Conversatorio se organizaron teniendo en cuenta tres problemáticas en torno a las cuales está diseñado el plan de estudios de la carrera: el problema de la construcción de sentido de los saberes matemáticos, el problema de la validación en matemática y el problema de la articulación y organización de los contenidos en mate-

mática. En las Actas se incluyen los resúmenes de los trabajos presentados correspondientes a cada una de ellas.

- Por último, decidimos ampliar el alcance del concurso destinado a estudiantes de educación secundaria, que en ediciones anteriores consistió en un Concurso de Fotografías. En esta edición, se ha desarrollado el *Concurso de Recursos de Comunicación Visual* denominado “La matemática está en todas partes” que contó con tres formatos posibles de participación: fotografías, infografías y videos, y tres categorías de participantes: estudiantes de educación secundaria de 1° a 3° año, estudiantes de secundaria de 4° a 6° año y la tercera categoría, estudiantes de profesores en matemática. Incluimos en estas Actas la información sobre las/los estudiantes que obtuvieron los primeros premios en las distintas categorías.

Esperamos que las Jornadas y las presentes Actas constituyan un aporte al desarrollo de la educación matemática en nuestro país. Estamos confiadas en haber generado espacios de discusión fecundos y vínculos interpersonales e institucionales para pensar la educación matemática en nuestras instituciones y en nuestro país.

Santa Fe, diciembre de 2024.

Sara Scaglia, Karina Temperini y Marcela Götte

Compiladoras

Resúmenes de conferencias plenarias

Conferencia plenaria

Formación estadística de los profesores: un nexo entre Scaloni, la igualdad social y la ciudadanía crítica

LILIANA TAUBER

estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias

Resumen

En las últimas décadas, la Educación estocástica sufrió diversas transformaciones, debido a que las nuevas tecnologías aceleraron los procesos de análisis de datos a gran escala. De manera contradictoria, esto no se evidencia en la educación secundaria ni en la formación de profesores, dado que el enfoque que prima, tiene un tratamiento puramente procedimental y determinístico (Tauber, 2022), dejando de lado la comprensión de las Ideas Estadísticas Fundamentales (en adelante: IEF), que habilitan el pensamiento propio de la Inferencia estadística.

Si bien la investigación en Educación estadística enfatiza en la necesidad de la lectura crítica de resúmenes estadísticos para habilitar la comprensión de dos IEF centrales: distribución y variabilidad, la realidad en el aula y en los currículos es que su enseñanza está ausente (Fernández *et al.*, 2020; Tauber, 2022), aún siendo la base para comprender aspectos asociados con el *Big Data* y la Inteligencia Artificial.

Estos cambios y la irrupción de la infodemia a partir de la pandemia de COVID-19 y de las discusiones político-partidarias, que día a día se suscitan en las redes sociales, hace inminente la necesidad de que los estudiantes puedan recibir una formación que vaya más allá de los procedimientos y que exige avanzar sobre un pensamiento estadístico crítico (Cabrera *et al.*, 2022). Dicho pensamiento es fundamental para tomar decisiones y poder discernir entre lo que es real y lo que es un sesgo provocado por una muestra no representativa o manipulada a conveniencia.

Todo ello torna necesario propiciar instancias de enseñanza y de aprendizaje centradas en la construcción y de-construcción de información estadística (Tauber y Santellán, 2022). Por ello, en esta conferencia, se problematiza sobre datos reales y sobre diversas características de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Estadística, desde un enfoque centrado en las IEF y en la formación de ciudadanos críticos.

Partiendo de esto, se buscó la reflexión sobre las concepciones de los profesores respecto de la Estadística y de su enseñanza, las relaciones entre dichas concepciones y los sesgos en el razonamiento que se producen en los estudiantes (Cabrera *et al.*, 2021; 2022; Araneo, 2024). También, se propició una metareflexión, buscando concientizar en la necesidad de la formación continua y en la profesionalización docente en Estadística.

Así, se analizaron distintas fuentes de datos, que sirvieron de insumos para el desarrollo de preguntas y/o propuestas que habiliten diversos procesos de pensamiento estadístico. Con ese objetivo, se trabajó con datos que pueden ser de interés para estudiantes de educación secundaria. Dos ejemplos, se basaron en el análisis de grandes volúmenes de datos asociados al fútbol (Pappalardo *et al.*, 2019; Pappalardo *et al.*, 2021) y al desempeño de la selección argentina de fútbol, dirigida por Lionel Scaloni (Coches' Voice, 2024). También, se brindaron alternativas para el uso de datos dinámicos provenientes de los Juegos Olímpicos (Sticco, 2024), aprovechándolos para discutir sobre la (des)igualdad de género y social en los deportes y cómo brindar evidencia de ambas.

En el mismo sentido, se propusieron interrogantes para discutir en el aula, basados en la lectura e interpretación de resúmenes estadísticos de páginas oficiales (IPEC) centrados en indicadores sociales, los cuales exigen diversos procesos de transnumeración (un tipo especial de razonamiento estadístico implícito en el pensamiento), que son fundamentales para comprender los datos y la información metodológica necesaria para la construcción de los indicadores y, en el análisis de las relaciones que pueden establecerse entre ellos (Tauber, 2021; Tauber *et al.*, 2022).

Esos ejemplos permitieron, además, mostrar la potencialidad de herramientas digitales para realizar un análisis dinámico de los datos (CODAP; Gal *et al.*, 2022), aportando distintos enfoques exploratorios, habilitando procesos de transnumeración necesarios para comprender las IEF: Distribución, Variabilidad y Resúmenes estadísticos (Batanero *et al.*, 2013; Araneo y Tauber, 2023).

Para finalizar, se buscó concientizar al profesorado de que analizar y comprender la información gráfica no alcanza con un aprendizaje autónomo de los estudiantes, sino que requiere de una educación que contemple al sentido estadístico (Batanero *et al.*, 2013), entendido como la capacidad para interpretar el contexto del que provienen los datos, comprender la variación y poder hacer inferencias o predicciones válidas (Gal, 2019).

Siguiendo a Behar (2018), si lo que se persigue es formar ciudadanos críticos, que puedan actuar libremente para cambiar al mundo a través de decisiones fundamentadas en evidencia confiable, la formación de profesores debería centrarse en los aportes de la investigación, y así desarrollar propuestas centradas en el pensamiento y no en los procedimientos.

Bibliografía

- Araneo, Jonatan y Tauber, Liliana** (2023). Ideas estadísticas fundamentales y conceptos del análisis de datos que relacionan profesores de Matemática. En: L. Tauber, C. Vásquez y J. Pinto Sosa (Eds.) *Educación Estadística para la formación de la ciudadanía crítica. Libro de ponencias de las III Jornadas Latinoamericanas de Investigación en Educación Estadística*. (pp. 185-193). Universidad Nacional del Litoral. <https://www.fhuc.unl.edu.ar/educacionestadistica/>
- Araneo, Jonatan** (2024). *Concepciones de profesores de matemática sobre medidas estadísticas*. Tesina de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. UTN Avellaneda.
- Batanero, Carmen, Díaz, Carmen, Contreras, José y Roa, Rafael** (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Revista Números*, 83 (1), 7-18.
- Behar, Roberto** (2018). Importancia del contexto en la formación del pensamiento y la cultura estadística. En I. Álvarez (Ed.), *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 85-110). Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana y Pochulu, Marcel** (2021). Modelo para la evaluación de la alfabetización estadística basado en el método comparativo constante. En L. Tauber y J. Pinto Sosa (Eds.) *Tendencias y nuevos desafíos de la investigación en Educación Estadística en Latinoamérica*. Universidad Nacional del Litoral. <https://www.fhuc.unl.edu.ar/educacionestadistica/>
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana y Pochulu, Marcel** (2022). La transnumeración como insumo del pensamiento crítico. In S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, & A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistical Education. https://iase-web.org/icots/11/proceedings/pdfs/ICOTS11_179_CABRERA.pdf
- Coaches' Voice**. (2024, 29 de enero). Big Data: Lionel Scaloni y sus números con Argentina. <https://acortar.link/JCjCi9>
- Common Online Data Analysis Platform – CODAP** - <https://codap.concord.org/>
- Fernández, M., Pomilio, C., Cueto, Gerardo, Filloy, J., González-Arzac, A., Lois-Milevicich, J., y Pérez, Adriana** (2020). Improving skills to teach statistics in secondary school through activity-based workshops. *Statistical Education Research Journal*, 19(1), 106–119. <https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/143219>
- Gal, Iddo** (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/55029>

- Gal, Iddo; Ridgway, Jim; Nicholson, James & Engel, Joachim** (2022). Implementing Civic Statistics: An Agenda for Action. In: Ridgway, J. (ed) *Statistics for Empowerment and Social Engagement*. Springer.
- Instituto Provincial de Estadísticas y Censos (IPEC). <http://www.estadisticasantafe.gob.ar/>
- Pappalardo, Lucca; Cintia, Paolo; Rossi, Alessio; Massucco, Emanuele; Ferragina, Paolo; Pedreschi, Dino & Giannotti, Fosca** (2019). A public data set of spatiotemporal match events in soccer competitions, *Scientific Data*, 6, 236. <https://doi.org/10.1038/s41597-019-0247-7>
- Pappalardo, Lucca; Rossi, Alessio; Natilli Michaela & Cintia Paolo** (2021). Explaining the difference between men's and women's football. *PLoS ONE* 16(8): e0255407. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255407>
- Sticco, Georgina** (2024). Dashboard participantes JJOO. https://public.tableau.com/app/profile/georgina.sticco/viz/Prueba_17213321924480/Dashboardparticipantes
- Tauber, Liliana Mabel** (2021). Facetas de la Estadística Cívica implícitas en una experiencia de enseñanza centrada en el estudio de indicadores sociales. *Paradigma, Extra* 1, 89-117. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p89-117.id1019>
- Tauber, Liliana** (2022). Cultura Estadística para profesionales críticos. En V. Baraldi, J. Bernik, O. Lossio, V. Luna (Comp.), *Conversaciones entre la enseñanza y el campo didáctico. Apartado 1. Especificidades disciplinares y configuraciones de enseñanza* (pp. 73-91). Ediciones UNL. <https://hdl.handle.net/11185/6708>
- Tauber, Liliana; Redondo, Yanina, Santellán, Silvana y Cravero, Mariela** (2022). Dimensiones del pensamiento estadístico asociadas a la exploración de índices sociales. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini y A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistical Education. http://iase-web.org/icots/11/proceedings/pdfs/ICOTS11_178_TAUBER.pdf?1669865531
- Tauber, Liliana y Santellán, Silvana** (2022). Propuesta evaluativa orientada a la formación del pensamiento estadístico en futuros profesores de matemática. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 265-295). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule. https://portal.ucm.cl/content/uploads/2020/04/Formacion_del_profesorado_para_ensenar_estadistica_retos_y_oportunidades.pdf

Conferencia de cierre “Prof. Juan Carlos Canavelli”

La formulación de proyectos innovadores como posibilidad integradora de cierre de carrera en el Profesorado en Matemática

NATALIA SGRECCIA

sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura FCEIA (UNR)

Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación IRICE (CONICET-UNR)

Resumen

Se comparte el trabajo que se viene realizando en el espacio curricular “Proyectos Innovadores en Educación Matemática” (PIEM) de la carrera Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), que comprende una instancia de cierre integrador del PM. Con modalidad Seminario, empezó a implementarse desde el 2021 a partir del tercer plan de estudios, y pone foco en la configuración de preocupaciones relativas a los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación en Matemática. En ese marco, estudiantes avanzadas/os del PM llegan a proponer mejoras a ciertas problemáticas por ellas/os mismas/os identificadas, a partir de estudiar, relevar información e idear algún tipo de innovación situada. Ello se lee en clave del compromiso social universitario que como futuras/os graduadas/os del PM de la UNR portan, que lo hacen operativo mediante el desarrollo de capacidades para plantear proyectos socioeducativos. Estos proyectos procuran atender a necesidades emergentes del trayecto de Práctica Profesional Docente (PPD), que es articulador de la carrera.

Cabe advertir que esta propuesta de formación se encuentra en sintonía con lineamientos más generales, tales como el Perfil del Título (Consejo Superior UNR, 2018), la Propuesta de Estándares (Consejo Interuniversitario Nacional, 2013), la Agenda UNR 2030 (<https://unr.edu.ar/agenda-2030/>) y los Objetivos de Desarrollo Sostenible (<https://www.odsargentina.gob.ar/>). Sucintamente, la incorporación de la investigación e innovación en el tramo de formación inicial permite a las/os futuras/os profesionales ir sensibilizándose, como protagonistas, con preocupaciones de su entorno. En efecto, esta capacidad de interpelar la realidad y propiciar mejoras contextualizadas es deseable en las/os docentes de estos tiempos en términos de un ejercicio profesional crítico y comprometido en los contextos que lo requieran. Puntualmente, la vivencia,

socialización, interpretación y reinterpretación del trayecto de la PPD se constituye en un insumo significativo para la generación de innovaciones en alguna rama de la Educación Matemática. Es así que cada estudiante monta una propuesta innovadora en términos de investigación educativa con base en una metodología de diseño que procura dar respuesta a problemas recurrentes.

Para una aproximación a ello, la dinámica de funcionamiento en PIEM reconoce partes, o paradas intermedias a modo de estaciones en el camino: delimitación de la problemática a abordar, especificación de interrogantes y objetivos, construcción del estado de conocimiento, planteamiento de constructos teóricos y del diseño metodológico, escritura de hallazgos y reconocimiento del aporte específico. La aproximación en primera persona a la investigación e innovación educativa desde la formación inicial está intrínsecamente imbricada con la generación de procesos de inmersión en ese tipo de lógicas; es decir, sumergir a las/os estudiantes en la problematización, comprensión, reflexión y búsqueda de alternativas de mejora de los fenómenos circundantes desde el quehacer científico. En el marco de las producciones realizadas en cada momento distintivo, las/os estudiantes confeccionan portadores de texto, escritos y orales, como soportes para comunicar sus ideas, y los disponen en proyectos innovadores reales y situados. Esto les permite aprender en, sobre y de tales instancias, así como autorregular sus propios desempeños; habilidad que los acompañará durante toda su vida profesional. Todo ello, a su vez, se nutre de los aportes de otras personas (docentes, compañeras/os) que contribuyen a resignificar lo inicialmente producido, mediante retroalimentaciones sistemáticas.

En ese devenir se constituyen genuinas comunidades (pre)profesionales, convocadas bajo la premisa de mejorar la práctica docente, a partir de necesidades por ellas/os mismas/os identificadas. El principal aporte radica no solo en la en el amplio espectro de preocupaciones emergentes sobre Educación Matemática junto a posibles innovaciones, sino también en la presentación de un dispositivo de formación docente que puede ser adaptado a otras carreras de Profesorado. Finalmente se comparten algunas líneas de desarrollo que van adquiriendo relevancia a partir de haber transitado este Seminario (Rudi y Sgreccia, 2024); entre ellas, indagación en el inicio de las trayectorias laborales de las/os graduados de PM; modos de articulación plausibles entre la carrera de grado y el ámbito laboral; necesidades de actualización que desde la docencia en ejercicio perciben las/os graduadas/os para ser interpeladas desde la innovación educativa en la formación inicial y continua.

Bibliografía

- Consejo Interuniversitario Nacional** (2013). Resolución 856/13. Anexo IV. Propuesta de Estándares para la Acreditación de Profesorados Universitarios en Matemática. CIN.
- Consejo Superior UNR** (2018). Resolución 027/18. Plan de Estudios del Profesorado en Matemática. UNR.
- Rudi, Denise y Sgreccia, Natalia** (2024). Innovación Educativa en el Profesorado en Matemática: la formulación de proyectos como dispositivo de formación docente. *Innovación Educativa*, 94 (24), 105-128. <https://www.ipn.mx/assets/files/innovacion/docs/Innovacion-Educativa-94/Innovacion-educativa-en-el-profesorado.pdf>

Ponencias

Eje 1. Educación matemática en el nivel inicial y en el nivel primario

Reportes de investigación

Matemática en sala de 3 años: desafíos para pensar las propuestas de enseñanza

MARÍA TERESA GARCÍA

garciamt4@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral- UNL/ Jardín Part. Inc. N° 1263

PATRICIA CAVATORTA

patricia.cavatorta@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral- UNL

CECILIA ODETTI

ceciliaodettilepi@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral- UNL

Resumen

La enseñanza de la matemática en sala de 3 años desde el enfoque de resolución de problemas constituye un desafío para aquellos docentes del Nivel Inicial, ya que no sólo requiere del diseño de consignas que presenten situaciones de estas características, sino también, pensar los modos de intervención docente.

En esta ponencia expresamos los resultados de una investigación cualitativa llevada a cabo como el Trabajo Final de la Licenciatura en Educación en Primeras Infancias de la FHUC de la UNL. En la misma indagamos sobre las propuestas de enseñanza de la matemática en las salas de 3 años de un Jardín de la ciudad de Santa Fe (durante el período 2022-2023), a partir de la realización de entrevistas semiestructuradas y un análisis documental.

Palabras clave: enseñar matemática / resolución de problemas / jardín de infantes / sala de 3 años

Indagación sobre la enseñanza de la matemática en sala de 3

Esta ponencia surge a partir de un Trabajo Final de la Licenciatura en Educación en Primeras Infancias de la FHUC de la UNL, para el cual realizamos una investigación cualitativa desde un enfoque crítico-social (Cifuentes Gil, 2011), para conocer y analizar las propuestas de enseñanza de la matemática en sala de 3 años en un jardín de la ciudad de Santa Fe durante el período 2022-2023.

Nuestro objetivo general fue indagar las características de las propuestas didácticas del área que se planifican en la sala de 3 años del Jardín Particular Incorporado N° 1263.

Para ello relevamos los contenidos matemáticos que priorizan las docentes de la institución para enseñar en sala de 3 años, y también documentamos y describimos formas y dinámicas para su enseñanza e identificamos actividades que pueden resultar ‘potentes’ para su abordaje en dicha sala. A partir de los resultados obtenidos propusimos líneas de acción que orientan la elaboración de las propuestas para la enseñanza de la matemática en esta sección desde el enfoque de resolución de problemas.

Recurrimos a distintas fuentes para recabar información como ser: un escrito institucional sobre los contenidos anuales en general, una grilla de contenidos anuales de todas las secciones de la institución, dos cronogramas de contenidos anuales de sala de 3 años correspondientes a los ciclos lectivos 2019 y 2022, siete planificaciones (unidades didácticas) del área de la matemática para sala de 3 años de los años 2019, 2021 y 2022 y cuatro entrevistas a docentes de la institución.

Las entrevistas fueron semiestructuradas y se desarrollaron a partir de un dispositivo diseñado especialmente. Este último constó de seis preguntas y/o actividades que permitieron que las docentes: relaten brevemente sus recorridos y experiencias laborales, seleccionen una consigna entre dos sugeridas para enseñar un contenido específico y justifiquen las razones de la elección, narren una propuesta de enseñanza de la matemática que consideren relevante (para cualquier sección) y una unidad o actividades para sala de 3 años argumentando el motivo de selección, e identifiquen imágenes que representen situaciones áulicas en sala de 3 años y justifiquen la elección de las mismas.

A partir de las entrevistas accedimos a los contenidos, dinámicas y propuestas de trabajo que privilegian las docentes. Luego, relacionamos esta información con

la correspondiente al análisis sistematizado de las grillas de contenidos, los cronogramas y las planificaciones y arribamos a resultados que aportan insumos para el estudio cualitativo de las propuestas para enseñar matemática en sala de 3 años.

Aspectos teóricos sobre la enseñanza de la matemática en sala de 3 años

Como primera aproximación a la temática podemos sostener que “los niños de tres años están andando los caminos del saber que ha ‘andado’ nuestra civilización en sus primeros tiempos” (Ullúa, 2012, p.33). Es decir, constantemente (y fuera de los contextos escolares) los niños y las niñas participan de situaciones que requieren de los conocimientos matemáticos.

En sintonía con lo que propone el anterior autor, Alsina (2015) utiliza el término “matemáticas informales” para referirse a las primeras nociones espaciales, los primeros aspectos cuantitativos y referentes a los atributos mensurables que se aprenden o utilizan en experiencias cotidianas no sólo para interpretar la realidad sino también para desarrollarse en el mundo circundante.

De esta manera, los niños y las niñas que ingresan a las salas de 3 años poseen conocimientos acerca del área de la matemática que deben ser tenidos en cuenta a la hora de planificar o diseñar una propuesta. González y Weinstein (2008) describen que los y las estudiantes de sala de 3 años generalmente:

- son capaces de diferenciar las escrituras, sean números o letras, de otras representaciones como dibujos de personas y objetos, símbolos.
- se interesan por la cuantificación de objetos, iniciándose en el conteo y la percepción global de pequeñas cantidades, hasta 3 o 5 elementos.
- son capaces de tomar tantos objetos como el valor que un dado indica.
- son capaces de reconocer el lugar que ellos ocupan en el tren.
- en lo relativo a lo espacial, pueden reconocer y verbalizar la posición de objetos y personas en situaciones reales y cotidianas.
- también, podrán iniciarse en la comprensión y emisión de mensajes verbales que permitan desplazarse de un lugar a otro.

Desde los NAP¹ (Ministerio de Educación, 2004), se propone enseñar los contenidos del área de la matemática desde el uso social de los mismos y la resolución de problemas. Es decir, se busca pensar y diseñar propuestas de enseñanza de la matemática en la que se exponga: “(...) a los niños en entornos de ‘matemática total’ [donde] se les alienta a participar en juegos que implican medir, contar y comparar, no simplemente para ensayar habilidades numéricas sino también para ayudar en actividades necesarias ypreciadas” (Gardner, 2016, p. 212).

En el Nivel Inicial se habla de generar en cada sala un “ambiente alfabetizador”² (en relación a las prácticas de lectura y escritura enfatizando en el uso social de las mismas). Tomando esta idea, tal vez, podamos pensar a la sala como un espacio o “entorno de matemática total” tal como lo presenta Gardner. Es decir, promover que los saberes vinculados a la matemática ingresen para resolver diferentes situaciones problemáticas que a diario se nos presentan o que el/la docente puede construir con una intencionalidad pedagógica buscando que involucren a los alumnos y las alumnas y despertando su interés.

Como sostiene Gardner (2016):

(...) transformar en su totalidad el enfoque que los alumnos [y los docentes] tienen de las matemáticas, es decir, de ser un tema en el que los estudiantes las reglas y las respuestas correctas y la aprobación del maestro a una disciplina en la que pueden aprender todos juntos a plantear preguntas, a plantear hipótesis acerca de los principios subyacentes y a explorar todo el conjunto de significados matemáticos. El papel del maestro consiste en modificar el discurso social en la clase iniciando y dando apoyo a interacciones que ejemplifican la argumentación matemática semejante a la llevada a cabo por los matemáticos (...) (pp. 220-221).

De lo que se trata entonces, es romper con los modelos de enseñanza de la matemática que promueven prácticas de enseñanza repetitivas y poco significativas

1 Núcleos de Aprendizajes Prioritarios.

2 Un ambiente alfabetizador no refiere únicamente al espacio construido con diferentes portadores textuales, sino que se requiere de una adecuada intervención docente que permita y promueva que los niños reflexionen sobre el uso de la lectura y la escritura y reconozcan su valor social. Como sostiene Nemirovsky (2009) “las posibilidades sociales y culturales con las que un sujeto cuenta son determinantes en su alfabetización porque para avanzar en ella requiere de textos y de usuarios de textos. Los textos por sí mismos no bastan porque, para leerlos y producirlos, es necesario también interactuar con personas que los usan, compartir sus actos lectores y escritores en toda su diversidad a fin de ir conociendo y apropiándose de las acciones específicas que se realizan en la cultura letrada. La alfabetización de un sujeto es, por lo tanto, un proceso social” (p.2).

para dar lugar a “(...) una transición desde lo que podríamos llamar la búsqueda del compromiso de la respuesta correcta, a asumir los riesgos que conducen a la comprensión” (Gardner, 2016, p. 221).

Las unidades didácticas son uno de los formatos más utilizados para organizar las planificaciones didácticas del Nivel Inicial y, particularmente, en la institución en donde llevamos adelante el trabajo investigativo. Por ese motivo, consideramos que, si buscamos presentar propuestas significativas para los estudiantes, es necesario pensar en el diseño de las unidades didácticas comprendiéndolas como “un recorte de la realidad sobre el cual se decide indagar” (Pitluk, 2016, p.65) y para ello es fundamental “seleccionar un recorte lo suficientemente significativo para el grupo de niños (...)” (p.65).

Además, pensar la enseñanza de la matemática desde la resolución de problemas conlleva a pensar, como sostienen las autoras de González y Weinstein (2014), que “un problema implica un obstáculo cognitivo a resolver, un desafío que va más allá de los saberes que el alumno posee, pero a los que debe apelar para resolverlo” (p.18). Es decir, las situaciones problemáticas recuperan los saberes previos que las y los estudiantes poseen ya que, como sostiene González (2011)

un problema sería una situación externa al niño y no un conflicto cognitivo [...]. El docente debe partir de los saberes previos de los alumnos, de lo que ya saben para llegar a la construcción de nuevos conocimientos. Y para esto tiene que investigar cuáles son, con el propósito de que su propuesta constituya un verdadero desafío (p.23).

Además de recuperar los saberes previos, abordar la enseñanza de la matemática presentando un problema debe contemplar que la “consigna indique el fin de la actividad es decir el ‘qué hacer’ y no el procedimiento de resolución o sea el ‘cómo hacer’” (González y Weinstein, 2010, p.16).

En este sentido, Charnay (1994) sostiene que plantear un problema a los niños y las niñas requiere de diseñar propuestas que, en primera instancia, sean comprendidas por ellos/ellas y que puedan prever una posible respuesta al mismo. Ya que, una situación problemática debe permitir que los alumnos y las alumnas pongan en juego sus conocimientos previos “y no quedar desarmado[s] frente a él” (p.8).

Por eso, un problema ofrece “una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar los conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos” (Charnay, 1994, p.8), y para ello, se hace necesario que “la sanción (la validación) no venga del maestro, sino de la situación misma” (Charnay, 1994, p.8). El trabajo matemático a partir del enfoque de resolución de problemas no se agota en encontrar la respuesta a una situación planteada. Como propone Saiz (1996) hacer matemática implica:

buscar soluciones a problemas, pero también ponerse de acuerdo sobre esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, discutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realizan [...]. (p.116).

Es decir, desde el enfoque de resolución de problemas lo que se busca es diseñar propuestas de enseñanza que promuevan en las y los estudiantes diversas “acciones matemáticas” como, por ejemplo: probar, comprobar, verificar, argumentar, defender un argumento, entre otras, con el fin de ensayar diferentes formas de resolución desplegando un trabajo en conjunto con sus pares. Vale la pena aclarar que, si la propuesta de enseñanza no plantea verdaderos problemas matemáticos, dichas “acciones” no se ponen en escena.

Al respecto, debemos comprender que las acciones matemáticas o “procesos matemáticos son herramientas que nos proporcionan las matemáticas para trabajar los diferentes contenidos” (Alsina, 2015, p.30), posibilitando introducir a las alumnas y los alumnos en las formas de pensar propias de las matemáticas, dar aplicabilidad a los contenidos matemáticos en diferentes contextos y conducir a la alfabetización o la competencia matemática.

Cabe destacar que dentro de este enfoque, se otorga un lugar privilegiado al error ya que es tomado como parte del proceso que realizan los niños y las niñas para construir conocimiento. El error no es sancionado negativamente sino que el docente se vale del error y lo utiliza como una fuente para movilizar diversas acciones matemáticas en las y los estudiantes, como ser: argumentación, comparación, el intercambio, etc.

Resultados y conclusiones de la investigación. ¿Qué aspectos tener en cuenta a la hora de diseñar propuestas de enseñanza de la matemática en sala de 3 años?

La enseñanza de la matemática conlleva a asumir grandes desafíos si lo que buscamos es abordarla desde el enfoque de resolución de problemas ya que implica, deconstruir prácticas institucionales y docentes tradicionales que se encuentran naturalizadas en la institución.

También, implica a reconocer y potenciar aquellas propuestas que ya se vienen trabajando y que con algunos ajustes pueden enmarcarse y transformarse en problemas genuinos para las niñas y los niños.

A lo largo del trabajo investigativo se destacan las siguientes características sobre la enseñanza de la matemática en sala de 3 años en el jardín n° 1263:

- la institución posee una forma de organizar los contenidos anuales que no permite que los saberes puedan ser abordados desde el enfoque de resolución de problemas, dado que establece un orden cronológico en el que deben ser enseñados;
- los recortes y ejes a trabajar permiten inferir una decisión institucional - implícita- de abordar contenidos de diferentes áreas pero sin vincularlos entre sí;
- se abordan los contenidos del área matemática de modo encasillado y por separado, esto dificulta poder pensar en trabajarlos desde problemas o situaciones de la vida cotidiana;
- los contenidos matemáticos que se mencionan en los cronogramas anuales son:
 - vinculados a las formas geométricas: el círculo y el cuadrado.
 - sobre las relaciones espaciales: arriba-abajo, cerca-lejos, dentro-fuera, alto-bajo, largo y corto.
 - acerca de la numeración: no se hace referencia.
 - sobre las cualidades sensoriales³: los colores primarios (amarillo, rojo y azul).

3 Alsina (2015) distingue como objetos matemáticos las cualidades sensoriales (color, textura, etc.) para álgebra y datos y hechos (posibles, imposibles, etc.) para el análisis de datos y probabilidad. Sobre las cualidades sensoriales y atributos, reconoce diferentes acciones como por ejemplo: agrupar por color,

- se prioriza que los saberes enseñados queden registrados en la carpeta de trabajo de los niños y niñas;
- entre los formatos y las dinámicas que adquiere la enseñanza de la matemática en la institución se hace mucho hincapié en las actividades de juego y expresión corporal y luego, se propone realizar una producción de modo individual en la hoja para justamente dejar constancia de lo trabajado;
- las actividades de exploración suelen ser las principales a la hora de diseñar propuestas de enseñanza para la sección de 3 años, relegando las actividades más reflexivas para las secciones de 4 y 5 años.

Las características anteriormente expuestas nos permitieron reflexionar sobre las prácticas de la enseñanza de la matemática en sala de 3 años en el jardín n° 1263 y arribar a algunas conclusiones que dan cuenta de aspectos a tener en cuenta en los diseños de propuestas que prioricen la enseñanza por medio de la resolución de problemas.

Es decir, a partir del recorrido realizado en el trabajo investigativo: el análisis de los diferentes documentos institucionales y las planificaciones y de los discursos docentes sobre sus prácticas nos posibilitaron arribar a los siguientes postulados:

Postulado 1. Resulta indispensable comprender que en esta sección no sólo deben presentarse propuestas que se caractericen por la manipulación y la exploración de materiales concretos y el juego; sino también momentos de reflexión y comunicación de ideas. Tal vez, una forma de organizar la enseñanza de la matemática en sala de 3 años sea preguntarse ¿qué saben los niños y las niñas?; ¿qué es necesario complejizar y sistematizar en el jardín acerca de los contenidos matemáticos?

Postulado 2. Es conveniente pensar en la organización de los contenidos anuales a abordar de manera tal que posibiliten el trabajo desde el enfoque de resolución de problemas.

Postulado 3. Es necesario organizar y pensar las planificaciones docentes desde el trabajo a partir de recortes del ambiente o proyectos, tal como los propone Pitluk

clasificar por color, ordenar por tamaño, asociar por color, realizar seriaciones y describir cambios que van conduciendo "progresivamente a una primera idea de operación matemática, que lógicamente incluye otros aspectos que se interiorizan en etapas posteriores" (p.40).

(2016). De este modo, la inclusión de los saberes matemáticos y de otras áreas se hará buscando enriquecer y profundizar la mirada del recorte de la realidad que se aborda. Así, de los contenidos que se seleccionan para trabajar, se rescata y resalta el valor social que tienen dentro del recorte elegido.

Postulado 4. Resulta necesario contar con un espacio o apartado en las actividades propuestas dentro de las planificaciones para que los docentes puedan incluir posibles intervenciones durante la propuesta. Esto, durante la implementación, posibilita que se narren hechos relevantes (comentarios o conclusiones a las que arribaron niñas y niños) que permitan visualizar un abordaje de la enseñanza de la matemática desde el enfoque de resolución de problemas.

Incluso, dentro de este apartado se podrían realizar anotaciones que las y los profesores consideren pertinentes para enriquecer la propuesta. Se podrían expresar diferentes cuestiones o situaciones que surgieron y que se consideran relevantes: ya sea una variante que surgió espontáneamente, una hipótesis que construyeron los niños y las niñas, discusiones que se dieron, entre otros aspectos.

También en este espacio se podrá apreciar la aparición del error y cómo es trabajado desde el docente buscando no sancionarlo sino convirtiéndolo en un recurso interesante y potente para repensar y comunicar hipótesis e ideas.

Lo que se busca es repensar la tarea docente, resignificando cómo se vincula con el saber y con sus estudiantes. Incluso poder pensar de modo anticipado posibles intervenciones o participaciones durante el desarrollo de la propuesta tiene que ver con buscar promover situaciones de diálogo, confrontación de ideas y verificaciones con la intención de que los niños y las niñas construyan conocimiento con otros.

De esta manera, la idea es comenzar a pensar la planificación como una estructura que guía y orienta al docente, pero también donde se exprese el curriculum vivido, no sólo el prescripto. Es decir, se trata de pensarla como un documento flexible, abierto y sujeto a modificaciones, que permita un ida y vuelta entre lo que la docente propone y la respuesta de las y las estudiantes.

Postulado 5. Sobre las ideas previas y el momento de puesta en común. Por otro lado, dentro de la planificación de la propuesta didáctica se hace necesario preguntarse acerca de la finalidad para recuperar los saberes previos que los niños y las niñas traen al jardín.

En este sentido, lo que sostenemos es la importancia de buscar que la unidad o proyecto no inicie con un diálogo para recabar dicha información, sino pensar en interrogantes y propuestas en donde las y los estudiantes pongan en juego sus saberes previos y los utilicen para resolver una determinada situación problemática.

Luego, es conveniente promover momentos de asamblea los niños y las niñas desplieguen y comiencen a debatir sobre los conocimientos que ya poseen y construir nuevos conocimientos con sus pares.

Esto le permitirá al docente conocer las ideas previas de las y los estudiantes y realizar las adecuaciones pertinentes buscando enriquecer la propuesta y presentar genuinas situaciones problemáticas.

De igual manera, luego de la realización de la propuesta de trabajo, es necesario pensar y diseñar el momento de la puesta en común, buscando construir un espacio en donde se pueda sistematizar la información, mostrar diferentes formas de resolución, reflexionar, comunicar y poner en tensión las ideas previas.

Postulado 6. Sobre la formulación de consignas. También, es conveniente poner el foco en la enunciación de las propuestas de actividades buscando que se solicite lo que hay que hacer sin decir cómo resolverlo. Es decir, diseñar consignas que permitan promover la construcción del conocimiento a través de la puesta en marcha de diferentes acciones matemáticas por parte de los alumnos y las alumnas.

Postulado 7. Sobre las producciones de los estudiantes. Otro aspecto de las propuestas de enseñanza se relaciona con las producciones que realizan los niños y las niñas en una hoja. Por eso, resulta interesante proponer alternativas a las actividades que son pensadas para la carpeta de producciones. Preguntarse la finalidad con la que se diseñan las propuestas de enseñanza para la carpeta nos lleva a resignificar el sentido de “dejar asentado lo que se trabajó”. ¿Se diseñan para dar cuenta de lo que se hace a las familias o para profundizar y enriquecer los saberes que se están abordando?

Si la finalidad es mostrar a las familias los trabajos realizados tal vez podamos pensar en incorporar fotografías o registros escritos por el docente sobre las ideas trabajadas con el grupo de estudiantes. De lo contrario, las propuestas grafoplásticas para trabajar un determinado contenido deben tener una finalidad que no implique la acción repetitiva y mecánica por parte de los alumnos y las alumnas. También, por ejemplo, se puede pensar en incorporar a la carpeta de trabajos, hojas con registros o anotaciones con puntajes de los juegos realizados en la sala.

Postulado 8. Sobre los contenidos a abordar. Consideramos relevante repensar los grandes ejes o contenidos para la enseñanza de la matemática que son propuestos en esta institución: las relaciones espaciales, las formas geométricas, las cualidades sensoriales, los números y el sistema de numeración, como así también las actividades no planificadas.

Como mencionábamos anteriormente: el juego, la manipulación de objetos concretos y la exploración de los mismos constituyen estrategias sumamente ricas para despertar y mantener el interés y la atención de los niños y las niñas en las propuestas. Sin embargo, es conveniente diseñar preguntas que permitan problematizar esa exploración o juego y generar instancias de reflexión.

Además, sobre el contenido de relaciones espaciales, encontramos pertinente pensar en propuestas que no sólo manipulen y exploren con las mismas, sino también en instancias de comunicación espacial, en donde las y los estudiantes estén en contacto con mensajes de ubicaciones espaciales, los elaboren e interpreten.

Con respecto a los saberes vinculados con las formas geométricas será necesario no sólo construir propuestas de observación, identificación y clasificación de las mismas, realización de composiciones o técnicas grafoplásticas sino también, diseñar momentos de análisis y descripción de las mismas vinculadas con el trabajo con figuras y cuerpos.

En lo relativo a las cualidades sensoriales (colores primarios, tamaños, texturas, entre otras) será necesario pensarlas a partir de un trabajo de diferentes acciones: comparar, agrupar, ordenar o realizar seriaciones en donde la reflexión y la comunicación de ideas posea un lugar privilegiado en la propuesta.

El abordaje de los contenidos relacionados con los números y el sistema de numeración debe ser pensado desde el uso y sentido social que poseen los números y la iniciación en la comprensión de las reglas del sistema de numeración, de esta manera se busca romper con la tradición de diseñar propuestas para reconocer los números y ejercitar la escritura de los mismos.

Por último, pensando en las actividades de rutina o situaciones que no son planificadas pero que surgen de la cotidianeidad y que presentan una situación problemática es necesario poder identificarlas con anterioridad y diseñar posibles interrogantes o propuestas para su presentación a los niños y las niñas.

Vale la pena asumir el desafío de diseñar propuestas de enseñanza de la matemática desde el enfoque de resolución de problemas en sala de 3 años para dejar de

pensar la enseñanza de dicha área únicamente como la adquisición de contenidos. De este modo, se destaca la importancia de presentar actividades que permitan que los niños y las niñas utilicen los saberes matemáticos para resolver diferentes situaciones sociales y pongan en juego diferentes acciones matemáticas (probar, comparar, verificar y argumentar).

Bibliografía

- Alsina, Ángel** (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años*. Narcea S.A. Ediciones.
- Charnay, Roland** (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-64). Editorial Paidós Educador.
- Cifuentes Gil, Rosa María** (2011). *Diseños de proyecto de investigación cualitativa*. Noveduc.
- Gardner, Howard** (2016). *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas*. Paidós.
- González, Adriana y Weinstein, Edith** (2008). El trabajo matemático y la sala de 3 años. *Travesías Didácticas*.
- (2010). Matemática: tipos de actividades y ejes de contenido. *Travesías didácticas*.
- (2014 10^{ma} reimpr.). *La enseñanza de la Matemática en el Jardín de Infantes*. HomoSapiens Ediciones
- González, Beatriz** (2011). *¿Qué problema los problemas! ¿Cómo trabajar desafíos matemáticos?* Hola Chicos S.R.L.
- Ministerio de Educación** (2004). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios para el Nivel Inicial. Consejo Federal de Educación. <http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL007880.pdf>
- Nemirovsky, Myriam** (2009). La escuela: espacio alfabetizador. En Myriam Nemirovsky (coord.), *Experiencias escolares con la lectura y la escritura*. Barcelona: Graò.
- Pitluk, Laura** (2016). *La planificación didáctica en el jardín de infantes: las unidades didácticas, los proyectos y las secuencias didácticas. El juego trabajo*. Homo Sapiens Ediciones.
- Ullúa, Jorge** (2012). ¿Enseñar matemática o ‘matematizar’ el mundo? En Fabrizio Origlio, *Itinerarios Didácticos para Sala de 3*. Hola Chicos S.R.L.

Capacidades puestas en juego en un proyecto de Modelización Matemática en el nivel primario

ADRIANA MAGALLANES

adriana.n.magallanes@gmail.com

ALEJANDRA SCHERVINSKY

alejandraschervinsky@yahoo.com.ar

PATRICIA GRAGLIA

patriciagraglia@yahoo.com.ar

LUCIANA MAGGIONI

maggioniluciana50@gmail.com

Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam)

CRISTINA ESTELEY

cristina.esteley.de.g@unc.edu.ar

Universidad Nacional de Córdoba (UNC)

Resumen

En este trabajo presentamos avances de un proyecto de investigación desarrollado en la Universidad Nacional de la Pampa. El fin de este es comprender procesos de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos mediados por un ámbito de trabajo con modelización matemática para el nivel primario. Optamos por una metodología cualitativa y apelamos a una investigación acción. Describimos la perspectiva de modelización que se asume. Los avances presentados se focalizan en tres fases: planificación educativa del proceso de modelización, puesta en práctica de lo planificado y análisis de un proyecto de modelización. En síntesis, reportamos sobre la construcción colectiva de una experiencia de modelización matemática, como así también, las capacidades puestas en juego por los estudiantes involucrados.

Palabras clave: proceso de modelización matemática / capacidades de modelización matemática / educación primaria

Antecedentes y Marco Teórico: La perspectiva de Modelización Matemática

La modelización matemática (MM) implica un doble proceso de matematización entre la realidad y las matemáticas que se puede describir mediante fases y/o ciclos, que varían según autores o intereses (Borromeo, 2006). Se puede entender la MM como un proceso de relaciones entre el mundo real y las matemáticas, en ambas direcciones (Borromeo, 2010; Blum, 2015) que se pone en uso en prácticas pedagógicas, focalizadas en la producción de conocimiento matemático y/o para investigaciones interesadas en comprender la producción de tales saberes. En este sentido, la MM es vista como un proceso que epistemológicamente conecta elementos de naturaleza «no matemática» (en el sentido de Pollak, 1979) con el conocimiento matemático (Borromeo, 2010) durante el transcurso del ciclo de MM. Acorde a Huincahué *et al.* (2018), tal ciclo se inicia con la selección de una situación o problema real, representada de diversos modos; se busca comprender la situación y se crea una representación mental de ella a fin de focalizar y filtrar la información disponible. Luego se simplifica e idealiza el problema para llegar a un modelo real inicial de modo tal que, dependiendo del problema, se incorporan conocimientos extra matemáticos. A partir de allí, se inicia un proceso de matematización en vínculo con el conocimiento extra matemático a fin de obtener un modelo matemático, en ese momento se apela a afirmaciones y/o argumentos provenientes de la matemática. Finalmente se obtienen resultados matemáticos en vínculo con una interpretación sobre la situación real que sirve de medio para validar. En todo el ciclo los sujetos pueden mostrar distintos grados de conciencia sobre lo realizado. En caso de que los sujetos involucrados con la MM sean estudiantes, Maaß (2006) indica que, para transitar por este ciclo, éstos ponen en marcha ciertas competencias en modelización. Tomando aportes de Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) que entienden por competencia en modelización matemática a la capacidad de llevar a cabo en forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado; en lugar de usar la expresión competencias, en este trabajo se decide usar capacidades reconocida con el mismo significado anterior.

En este sentido, se formula el siguiente interrogante que orienta la investigación: ¿Qué capacidades ponen en juego los estudiantes durante el proceso de MM?

Metodología

Se opta por un paradigma de naturaleza cualitativo. En el marco de tal paradigma, se privilegia una metodología compatible con una investigación acción (I-A) dentro de un paradigma crítico (Kincheloe *et al.*, 2018). En el momento de llevar a la práctica la I-A se retoma el modelo propuesto por Kemmis *et al.* (2014). Estos autores proponen cuatro fases que resumen el proceso de I-A: diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial (Fase 1); desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo (Fase 2); actuación para poner el plan en práctica (Fase 3); observación de sus efectos en el contexto y la reflexión en torno a los efectos como base para una nueva planificación (Fase 4).

Diseño, implementación y seguimiento de las propuestas de los estudiantes (de sexto y quinto grado con edades entre 10 -12 años) son seguidas por las integrantes del proyecto. Para recolectar información apelamos a registros del trabajo completo: notas de campo de las interacciones docentes-investigadoras, entrevistas a docentes y estudiantes, producciones del estudiantado y fotos de distintas instancias de trabajo.

Tomando aportes de Blum y Kaiser (1997), para el análisis de las capacidades puestas en juego por el estudiantado al involucrarse en un proceso de MM, se describen las siguientes categorías:

1. *Capacidad para comprender el problema real y crear un modelo basado en la realidad.* Se observa cuando el estudiantado: 1a. explicita los supuestos realizados sobre el problema y logra simplificar la situación; 1b. reconoce cantidades que influyen a la situación, las nombra e identifica como variables claves; 1c. construye relaciones entre las variables y 1d. recoge información y diferencia entre lo que es relevante e irrelevante.
2. *Capacidades para construir un modelo matemático desde el modelo real.* Se observa cuando el estudiantado: 2a. matematiza cantidades y relaciones relevantes; 2b. simplifica cantidades y relaciones si es necesario y reduce su complejidad y 2c. escoge apropiadamente notaciones matemáticas y representa situaciones gráficamente.
3. *Capacidades para resolver preguntas matemáticas con el modelo matemático.* Se observa cuando el estudiantado: 3a. usa distintas estrate-

gias heurísticas y 3b. pone en juego conocimientos matemáticos para resolver el problema.

4. *Capacidades para interpretar el resultado matemático en una situación real.* Se observa cuando el estudiantado: 4a. interpreta resultados matemáticos en contextos extra matemáticos; 4b. generaliza situaciones desarrolladas para una situación y 4c. reconoce y comunica soluciones a un problema usando lenguaje matemático apropiado.
5. *Capacidades para validar la solución.* Se observa cuando el estudiantado: 5a. reflexiona y chequea críticamente las soluciones encontradas; 5b. revisa partes del modelo o, de ser necesario, vuelve a recorrer el proceso de modelización; 5c. reflexiona tanto sobre el proceso de resolución del problema como sobre el hecho de que las soluciones logradas puedan ser desarrolladas de forma distinta.

Diagnóstico y desarrollo de un plan de acción: la planificación de un proceso de Modelización Matemática

Durante reuniones con el equipo de trabajo (docentes e investigadoras de la universidad y profesoras de educación primaria a cargo de matemática o docentes de matemática del nivel secundario) se discuten aspectos vinculados al proceso de MM como posible estrategia de enseñanza, se estudian y reconocen tipos de tareas de MM que pueden ser implementadas en cursos de escuelas primarias considerando que, para resolver problemas contextualizados en la realidad, se establecen relaciones entre el mundo de las matemáticas y el mundo real.

En dichos encuentros, una integrante del equipo comunica sobre la intención de una escuela primaria de renovar el abordaje del tratamiento escolar de las efemérides, incluyendo propuestas que interpelen a los/as niños/as para construir nuevos sentidos y los motiven a involucrarse y ser protagonistas de análisis colectivos en colaboración.

Se contacta una escuela del norte Pampeano y con una profesora del establecimiento se decide trabajar con los 15 estudiantes de sexto grado la conmemoración del Día del Respeto a la Diversidad Cultural, apelando a tareas de MM factibles de ser implementadas por profesores de enseñanza primaria integrantes del equipo.

En la primera fase de un proceso de MM, la profesora de la escuela y miembros del grupo de investigación seleccionan como temática la construcción de una bandera *Wiphala* o insignia más representativa y conocida de pueblos originarios de América del Sur. Al respecto, se proponen interrogantes para orientar el trabajo del estudiantado: ¿Qué es la bandera *Wiphala*? ¿Qué representa?; ¿Es igual para todas las comunidades? Estas cuestiones son algunas de las que dan lugar a la investigación escolar para su posterior debate y socialización. Esto permite que, en una segunda fase, se avance hacia la construcción de diferentes bocetos y, a partir de acuerdos democráticos, se finalice con una actividad en la que se espera plasmar el boceto seleccionado en un mural en la escuela. En la fase de matematización se prevé la posibilidad de introducir proporciones, escalas, construcciones geométricas (cuadrado) y operaciones con naturales o/y decimales.

La actuación para poner el plan en práctica

La planificación se pone en marcha en septiembre del 2022 con estudiantes de sexto grado. En la primera clase se presenta el término “BANDERA WIPHALA” y el estudiantado se organiza en cinco grupos de tres estudiantes a fin de dialogar sobre lo que conocen acerca de esa bandera o tema del proceso de MM.

Luego, la profesora les pregunta: ¿Qué es la bandera *Wiphala*?, las respuestas fueron variadas según se ilustra en la Imagen 1:

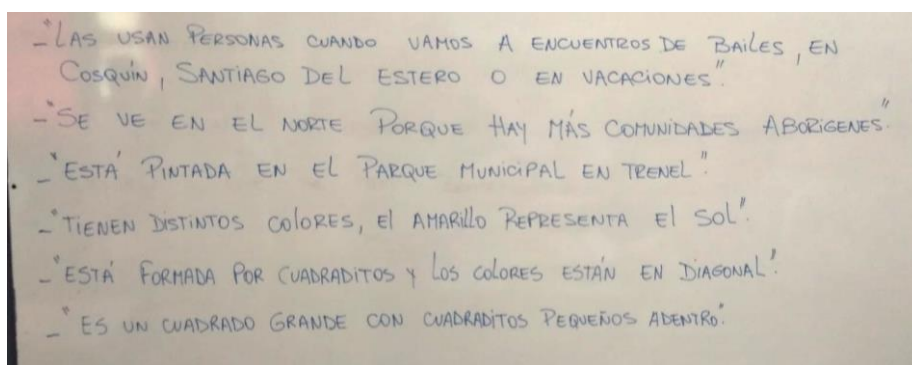


Imagen 1: Pizarrón con las respuestas (Notas de campo)

Para la indagación sobre la bandera, el estudiantado profundiza la indagación escolar trabajando con el aula digital móvil y respondiendo:1) ¿Qué significa Wip-

hala?; 2) ¿Por qué tiene esos colores?; 3) ¿Hay una sola o varias?; 4) ¿Cómo están distribuidos sus colores? y 5) En nuestro territorio, ¿predomina alguna bandera?

A medida que avanzan con la indagación, un grupo propone otros interrogantes, por ejemplo: ¿Cuándo se creó la Bandera *Wiphala*? ¿por qué?

Luego se socializa con el grupo clase toda la información recolectada, resaltando y reconociendo que existen otras culturas (no locales) que tienen un símbolo propio.

Cada grupo, va contando al resto lo que ha indagado. Los demás van haciendo sus aportes. Las siguientes Imágenes 2 y 3 ilustran esta parte del trabajo en aula.



Imagen 2: Iniciando una indagación

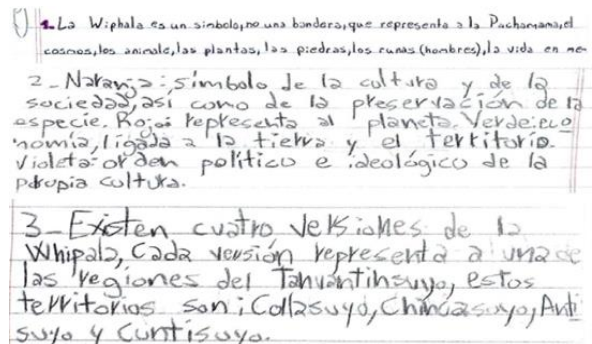


Imagen 3: Algunas respuestas sobre *Wiphala*

Luego de la indagación, se socializan los avances y se puntualiza que: *Wiphala* es un símbolo, existen cuatro tipos en Sudamérica que difieren por la disposición de los colores en función del pueblo andino representado: la *Collasuyu*, en Chile, Argentina, Bolivia y Perú; la *Antisuyu*, en ciertas zonas de Bolivia o de Perú, Ecuador y Colombia; la *Chinchasuyu*, en Perú, Ecuador y Colombia y el *Cuntisuyu* en algunas zonas de Perú. Cada color tiene un significado; todas son cuadradas de 7 cuadrados de lado y están formadas por 49 cuadrados.

La profesora solicita al estudiantado que, en grupos, armen un boceto en hoja A4 mostrando cómo les gustaría pintar este símbolo en un mural escolar (ver Imagen 4).



Imagen 4: Bocetos construidos por los estudiantes (Notas de Campo)

Se avanza con este proyecto en 2023 en el que participan los 20 estudiantes de quinto grado. Con este grupo, la profesora realiza una presentación con los resultados de la indagación del grupo de sexto grado y el boceto seleccionado (el que incluye la frase todos somos iguales) por los estudiantes del 2022 para ser pintado en la escuela.

Luego, la profesora solicita al estudiantado que se agrupe de 4 y, tomando como referencia el boceto seleccionado en 2022, armen un boceto similar en hoja A4 (como si la hoja fuera una pared). También les pide que: detallen medidas; definan tamaño de las letras y cómo dibujarlas; propongan cómo dibujar la bandera.

Ante esta consigna, un grupo (Grupo Tapial) pregunta: “el dibujo debe ser así tal cual a ese boceto o puede cambiar de lugar las letras, es decir hacerlo a nuestra manera” (Notas de campo). La profesora responde que pueden hacer modificaciones, siempre que se visualice el símbolo, la frase y las manos.

Cada grupo diseña su boceto y luego, el grupo clase, acompañado por la profesora, recorren la escuela con el objetivo de que cada grupo seleccione la pared en la cual plasmar su boceto. Seleccionada la pared, se solicita que describan cómo lo dibujarían en la pared a fin de que el mural final tenga la misma forma que el boceto. Los grupos empiezan planificando cómo dibujar el cuadrado en la pared. Para ello, por ejemplo, un integrante del Grupo Tapial propone que cada lado de los cuadraditos, que tiene 1 cm en la hoja se dibuje de 10cm en la pared. Sin embargo, otro propone que 1cm de la hoja sean 15cm en la pared para que se pueda ver desde lejos. Para acordar, el grupo decide volver con sus dos propuestas a la pared notando que, dibujando cuadrados de 15cm de lado, el dibujo no entraría en la pared escogida cuyo alto es de 120 cm. Descubren así que ese hecho condiciona la escala a utilizar. Se hace notar que el grupo toma decisiones solo considerando el alto solo pues

en la pared escogida contaban con todo el ancho necesario. Así, ese grupo propone diseñar el boceto final como en la Imagen 5.

El Grupo Grande utiliza el pizarrón para plasmar el diseño de la bandera a un tamaño real, deciden que cada lado de los cuadraditos tenga 10 cm en la realidad. Una vez construido el cuadrado reconocen que la bandera va a quedar muy chica. Deciden entonces aumentar a 15cm el lado de cada cuadrado y dibujan este último cuadrado encima del anterior para poder visualizar cómo va a quedar en la realidad (Imagen 6).

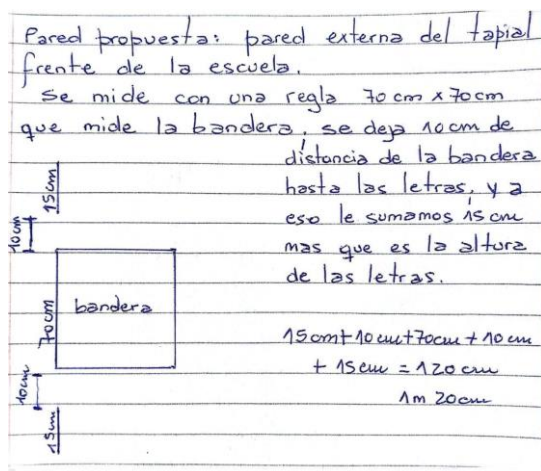


Imagen 5: Propuesta del Grupo Tapial



Imagen 6: Grupo Grande dibujando en el pizarrón

Una vez que todos los grupos tienen su boceto y han definido como llevarlo a la pared escogida, realizan una presentación ante un jurado conformado por: directora, vicedirectora y tres profesoras de las asignaturas: Danza, Música y Ciencias Sociales. El jurado rescata de cada grupo aquello que encuentra mejor fundamentado, pero no define un boceto ganador. Los estudiantes manifiestan su disconformidad con la decisión del jurado. Ante esta situación, la profesora de matemática del curso, propone que sean ellos los que realicen la selección del boceto mediante una votación secreta. Como resultado de la votación resulta seleccionado el boceto elaborado por Grupo Grande. Luego se ofrecen mayores precisiones para pintar el mural de manera colectiva por todo el curso. Se definen espacios para escribir la frase. El boceto seleccionado tiene una distribución diferente al de la Imagen 4 para las palabras. Respecto de la bandera: TODOS se ubica inmediatamente arriba, SOMOS a su izquierda e IGUALES a su derecha. Se decide que la palabra TODOS quede centrada encima del cuadrado. Como cada cuadradito tiene 15cm de lado, deciden hacer las letras también de 15cm de ancho y colocar la letra “D” a la altura del cuar-

to cuadradito. Con este propósito, realizan un esquema en el pizarrón y utilizan la propiedad asociativa de la adición de números naturales para determinar el espacio que ocuparán las letras de la palabra TODOS (Imagen 7). En dicha imagen observamos cómo determinan los espacios que van a dejar en blanco y los espacios para las otras letras. Sobre este esquema plantean que la letra “S” de SOMOS y la letra “I” de Iguales queden en la misma línea o fila de TODOS. Plantean también la necesidad de trazar rectas para dibujar las letras y trazar rectas paralelas para controlar el tamaño de las letras.

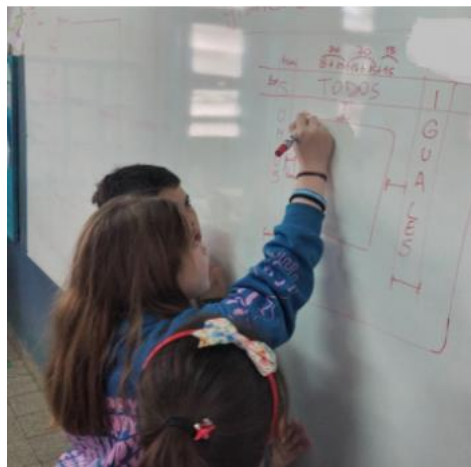


Imagen 7: Esquema para centrar las palabras (Notas de campo)

Finalmente, se pone en marcha el plasmado en la pared. Empiezan dibujando la bandera, controlando que quede centrada midiendo el ancho de la pared y dividiendo el ancho en dos para marcar el centro del cuarto cuadradito de la bandera. Luego realizan el dibujo en la pared utilizando elementos de geometría como regla y escuadra para delimitar los espacios para las letras y para trazar el cuadrado respetando las medidas definidas. Terminado el dibujo, el grupo clase, pinta colectivamente el mural (Imagen 8).



Imagen 8: El dibujo y la pintada en la pared (Notas de campo)

Análisis de capacidades de MM puestas en juego por el estudiantado

Lo indagado por 6to grado sobre la temática de MM, ofrece aportes para las actividades matemáticas de MM del 5to. Así, acorde a las categorías presentadas en metodología, el análisis focaliza en 6to o en 5to. grado según corresponda.

Dentro de la categoría **1-Comprender el problema real y la creación de un modelo basado en la realidad**, observamos la puesta en juego de la dimensión **1a-Hacer supuestos para el problema y simplificar la situación**- en los estudiantes de sexto grado. Ello se evidencia en el momento de indagación escolar cuando, para diseñar, reconocen de modo simplificado similitudes y diferencias entre distintas banderas. Por ejemplo, puntualizan que, a pesar de las diferencias visuales, todas son cuadrados compuestos por 49 cuadraditos (7 cuadrados de ancho y 7 de largo), conservan los mismos colores y además, cada color posee un significado. Sin embargo, presentan diferencias en cuanto a la distribución de los colores. Distinguen cuatro versiones de la bandera y que cada una representa a una región de pueblos originarios de Sudamérica. Así, se reconocen supuestos sobre formas vinculadas con las banderas; composición, distribución y significados de colores y sobre orígenes culturales en relación con variedad en formas, colores o aspectos de las banderas. Bajo esos primeros supuestos deciden recortar la realidad considerando el caso de la única bandera que es utilizada por pueblos originarios de Argentina, como es el caso de la Collasuyo.

Focalicemos ahora solo en 5to. Allí, observamos que los estudiantes proponen supuestos y simplificaciones (**1a**) para decidir acerca de las letras que escogerían;

por ejemplo, dónde ubicarlas, el tamaño que le asignarán o el tamaño de la pared escogida y relaciones visuales. Se pudo observar también capacidades relativas a la dimensión **1b-Reconocer cantidades que influyen a la situación, nombrarlas e identificarlas como variables claves**-. Esto se manifiesta en el momento en que los estudiantes manifiestan que la escala que definen entre el dibujo en la hoja A4 y el mural en la realidad de la pared dada, es una variable que pueden modificar. Eso parece claro cuando; por ejemplo, Grupo Tapial nota que tiene que modificar el tamaño de los cuadraditos en la realidad de la pared para que les entre el boceto en aquella que escogieron. Otras variables son reconocidas como necesarias por los estudiantes al proponer cambios en el boceto escogido, como son: la elección de cómo distribuir las letras en el dibujo, el tamaño de la bandera, la distribución y color de las manos. Observamos **1c-Construir relaciones entre las variables**- en momentos en que los estudiantes reconocen y manifiestan que, para que el boceto les quede con la misma forma en la realidad que el ideal que tienen en la hoja, necesitan relacionar el tamaño que definen para cada cuadradito de la bandera con el tamaño de las letras. Es decir, no hay independencia entre los elementos que conforman la bandera. Aspecto este que quizás no fue determinante para el momento de la creación en papel. En ese mismo sentido, a fin que las letras queden centrada en el mural, también reconocen relación entre la medida de cuadraditos y el tamaño de letras. De la categoría 1 fue factible observar también **1d-Mirar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante**- cuando los estudiantes, para el mural, reconocen como relevante el tamaño de letra, aunque el color y la forma de estas no son determinantes y por lo tanto pueden pensarse irrelevantes en ese caso. También reconocen como relevante y condicionante la altura o el ancho de la pared que escogen porque condiciona fuertemente la escala que escogen.

Respecto a la categoría **2- Construir un modelo matemático desde el modelo real**, podemos identificar en el trabajo de los estudiantes la dimensión **2a-Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones**- que se evidencia en el momento en el que los estudiantes: cambian unidades de medida (de metro a centímetros); utilizan operaciones con naturales (adición, multiplicación y división); aplican propiedades (conmutativa y asociativa) de las operaciones; construyen cuadrados usando rectas y paralelas. Fue factible observar la dimensión **2b-Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad**-

en momentos en los que los estudiantes toman decisiones para simplificar la ampliación desde la hoja a la pared, por ejemplo, al considerar que 1 cm de la hoja se correspondería con 10 cm en la realidad. Se observa **2c**-Escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente- cuando trazan paralelas para que las letras queden todas de igual tamaño; al admitir la necesidad de utilizar regla y escuadra para la construcción de cuadrado o cuando usan la operación división para que la bandera quede centrada en la pared.

Respecto a la categoría **3-Resolver preguntas matemáticas con este modelo matemático**, reconocemos **3a**-Uso de estrategias heurísticas tal como división del problema en partes- cuando, para realizar el boceto, fraccionan la toma de decisiones para el dibujo del cuadrado, luego de las letras y por último de las manos. Respecto de **3b** -Uso del conocimiento matemático para resolver el problema- notamos su ocurrencia cuando: cambian unidades de medida (de metro a centímetros) para controlar que el boceto entre en la pared; utilizan operaciones con naturales (suma, multiplicación y división) y aplican propiedades (conmutativa y asociativa) de esas operaciones para definir los espacios que necesitan para la bandera y las letras o realizan la construcción de cuadrados así como el trazado de rectas y paralelas empleando regla y escuadra.

Para la categoría **4-Interpretar el resultado matemático en una situación real**, se observa **4a**-Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos- cuando reconocen que los usos de los conocimientos matemáticos les permiten que el boceto quede plasmado en la pared respetando forma y relaciones entre bandera y letras. Se observa **4b**- Generalizar situaciones que fueron desarrolladas para una situación especial- al considerar que la definición de una escala para ampliar, la representación de cuadrados o el trazado de paralelas son desarrolladas para este proyecto y que pueden ser extrapolados fuera de esta situación. **4c**-Ver soluciones a un problema usando lenguaje matemático apropiado y/o comunicar sobre las soluciones- se manifiesta cuando los distintos grupos realizan sus presentaciones para mostrar al jurado sus propuestas de diseño, sobre qué pared lo harían y de qué forma proponen realizar el cambio del diseño de la hoja a la pared.

Finalmente, en relación con la categoría **5-Validar la solución**, observamos **5a**- Reflexionar y chequear críticamente en las soluciones encontradas- en momentos en los que se produce un espacio de reflexión y crítica cuando los estudiantes cuestionan lo decidido por el jurado y toman la decisión de asumir en el curso esa deci-

sión primero, para luego realizar y sostener una propuesta colectiva consensuada para realizar el mural. Respecto a **5b** -Revisar algunas partes del modelo o ir de nuevo a través del proceso de modelación si las soluciones no encajan en la situación-, emerge cuando notan que el alto o ancho de la pared no les permite dibujar su boceto y necesitan volver a su boceto y modificar la escala seleccionada. **5c**.- Reflexionar el problema bajo otras rutas de modelación o si las soluciones pueden ser desarrolladas de forma distinta- se evidencia durante las presentaciones de los distintos grupos momento este, en el que los estudiantes reconocen las distintas formas según los distintos valores que proponen para las variables en juego: tamaño de pared; tamaño de letra; tamaño del cuadrado.

Lo observado y reportado sobre el trabajo de los estudiantes, daría cuenta de la puesta en juego de las cinco competencias de MM propuestas por Blum y Kaiser (1997).

Conclusiones

Los estudiantes comprenden el problema presentado cuando necesitan llevar a una pared un boceto realizado en una hoja y para que la pintada del mural preserve la forma del boceto. Este problema lleva a los estudiantes a producir modelos matemáticos y resolver preguntas matemáticas (que requiere de operaciones y representaciones matemáticas); a interpretar el resultado matemático en una situación real y finalmente a validar la solución. Notamos que en el proceso de MM vivenciado se visualizan distintos tipos de capacidades que van desde comprender un problema a la recuperación o construcción de saberes matemáticos, la utilización de conocimiento matemático para responder a ese problema, a instancias de comunicación y validación. Se destacan además, capacidades vinculadas a la reflexión crítica y al trabajo colectivo como superador de propuestas individuales o personales. Estas últimas se ponen de manifiesto cuando los estudiantes discrepan con la decisión del jurado sobre la devolución y sugieren que sean ellos quienes elijan el diseño y luego, entre todos, resuelvan los aspectos pendientes que son necesarios para llevar a cabo la pintura del mural.

Bibliografía

- Blomhøj, Morten y Højgaard Jensen, Tomas** (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, 22 (3), 123-139.
- Blum, Werner** (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer.
- Blum, Werner y Kaiser, Gabriele** (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.
- Borromeo, Rita** (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95.
- Borromeo, Rita** (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99-118.
- Huincahué, Jaime, Borromeo, Rita y Mena Lorca, Jaime** (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 99-115.
- Kemmis, Stephen, McTaggart, Robin y Nixon, Rhonda** (2014). *The Action Research Planner: Doing Critical Participatory Action Research*. Springer.
- Kincheloe, Joe, McLaren, Peter, Steinberg, Shirley y Monzó, Lilia** (2018). Critical Pedagogy and Qualitative Research: Advancing the Bricolage. En Denzin, N. y Lincoln, Y.S. (eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Quinta Edición), (pp. 418-436). Sage.
- Maaß, Katja** (2006). What are modeling competencies? *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 38, 113–142.
- Pollak, Henry** (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. En *UNESCO (Ed.), New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp.232-248). UNESCO.

Avances de una experiencia colaborativa en torno a la enseñanza de los números racionales en una escuela primaria de la provincia de Santa Fe

MARÍA LAURA IMVINKELRIED

mimvinkelried@gmail.com

Escuela Normal Superior N° 32

Resumen

El presente trabajo se enmarca en el recorrido llevado a cabo en una primera etapa de una investigación de doctorado que lleva el título “La adaptación e implementación de situaciones didácticas y el análisis de las clases, como un medio privilegiado de formación de maestros y de producción de conocimientos didácticos. Se trata de presentar un avance sólo de los fundamentos y del trabajo de campo realizado hasta el momento, pero no se presentan hallazgos ni conclusiones surgidas de los análisis.

Comenzaré esta presentación desarrollando el tema de investigación, junto a los antecedentes y el marco teórico profundizado hasta el momento. Luego expresaré algunas decisiones tomadas en torno al trabajo de campo y realizaré algunas descripciones sobre la implementación del taller de iniciación, la planificación de las secuencias didácticas y por último algunas escenas del aula de 4^{to} grado.

Si bien aún no he realizado un análisis detallado y riguroso de los resultados obtenidos en las etapas de co-situación y co-operación, la intención al escribir esta comunicación fue compartir el trabajo realizado en estos meses junto al equipo de investigación y las maestras participantes, y en ese compartir poder visibilizar el trabajo docente que se realiza a diario en las escuelas y los desafíos que implica.

Palabras clave: experiencia /colaborativa / primaria / fracciones

Sobre la problemática de investigación

El tema elegido para la investigación¹ es el estudio de una experiencia colaborativa de formación de docentes destinada a enriquecer la enseñanza de los racionales en el segundo ciclo de una escuela primaria, en un contexto de formación continua y contextualizada. Si bien nos referimos a los números racionales, en el nivel primario no se suele estudiar el concepto de racional definido como clase de fracciones equivalentes, ni las propiedades estructurales del conjunto de los racionales, sino las fracciones y las expresiones decimales, y los distintos significados que admiten en contextos diversos. Por ello a continuación, hablaré de fracciones excepto cuando, por el sentido de lo que afirme, sea pertinente referirse al concepto de número racional.

El objeto de estudio hace referencia a una experiencia de trabajo colaborativo - entre maestros de 2^{do} ciclo del nivel primario e investigadores- de adaptación, experimentación y análisis de situaciones didácticas, orientado al enriquecimiento de las prácticas habituales y a la producción didáctica. La experiencia de formación incluyó la puesta en práctica por cada maestra, en su aula, de una secuencia didáctica y el análisis posterior, colectivo, de dicha implementación. Las secuencias didácticas fueron propuestas por nosotros -los investigadores- y adaptadas en conjunto - investigadores y maestros-. Así, si bien la experiencia colaborativa para la formación docente es el principal objeto de estudio de esta investigación, hay un segundo objeto que se deriva de aquél: se trata de las situaciones didácticas mismas que generará el colectivo, y que, al ser implementadas, permitirán generar conocimientos valiosos sobre situaciones didácticas viables para la enseñanza de las fracciones en el nivel primario.

Las preguntas que guiaron las acciones realizadas en el trabajo de campo y el proceso investigativo que continúa son:

* ¿Qué conocimientos sobre la enseñanza construyen los maestros a partir de las interacciones y las retroalimentaciones que brinda la experiencia, considerando principalmente dos fuentes de retroalimentación: la que ofrecen los compañeros y los investigadores, por un lado; y la que ofrece la experiencia en el aula por otro?

1 La investigación se desarrolla en el marco del trabajo para una tesis de Doctorado denominada "El caso de una experiencia colaborativa en torno a la enseñanza de los números racionales en la escuela primaria" cuyo director es el Dr. Nicolás Gerez Cuevas y el co-director el Dr. David Block Sevilla, correspondiente al Doctorado en Educación en Ciencias básicas y Tecnología (UNC).

¿Qué lugar ocupan en estos aprendizajes los conocimientos de didáctica aportados por los investigadores, por un lado, y los conocimientos de la experiencia aportados por los docentes, por el otro? A lo largo de la experiencia, ¿Se pueden reconocer indicios de cambios en sus prácticas de enseñanza de las fracciones? ¿En qué aspectos los maestros manifiestan que se han dado estos cambios?

*¿Qué características didácticas tienen las secuencias analizadas y adaptadas en la fase de cooperación? ¿Cómo se articulan en dicha fase los aportes de la investigación didáctica y los conocimientos sobre la enseñanza de los maestros participantes? ¿Qué tipo de transformaciones hacen los docentes al implementarlas -qué se conserva, qué cambia, cómo se responde ante lo no previsto- con respecto a lo planeado?

Antecedentes sobre el tema y marco teórico

A) Didáctica de las matemáticas

Entre los actuales enfoques de la Educación Matemática, elijo como un primer marco teórico para el análisis didáctico de esta investigación a la Escuela Francesa y fundamentalmente a la Teoría de las Situaciones Didácticas, en adelante TSD. Esta teoría nace en los años 70 en Francia de la mano de Guy Brousseau con el objetivo de construir un modelo de las situaciones. En palabras de Brousseau (2000):

La búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento, así como la idea que tienen de las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica. (p. 17)

En este trabajo las secuencias de situaciones didácticas fueron centrales para los análisis colectivos previos y posteriores, por lo que esta teoría resulta muy oportuna. Con ella, asumí la postura de analizar los conocimientos a través de las situaciones problemáticas que los ponen en juego, que los funcionaliza, así como la conceptualización del aprendizaje según la cual los estudiantes aprenden al enfrentarse a problemas que resultan desafíos para ellos; esto es, adhiero a la idea de que, para aprender matemáticas, hay que producirlas, hay que hacerlas.

En cuanto al tema de la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria, pretendo recuperar los aportes de algunos investigadores fundamentales en el campo: Brousseau *et al.* (2004), Freudenthal (op.cit.), y también considero los trabajos más recientes realizados por Block, (2006, 2007), entre otros.

B) La investigación colaborativa

En este proyecto opté por la investigación colaborativa entre maestros e investigadores. Esta modalidad se relaciona con tradiciones en el campo educativo que han procurado integrar el punto de vista de los docentes en la construcción de un conocimiento más ajustado a la realidad de la práctica (Bednarz, 2009).

Dentro del conjunto de enfoques desarrollados como investigación colaborativa retomo la tradición [o la perspectiva] nacida en Quebec a partir de los estudios de Bednarz (Bednarz, 2013; Desgagne, Bednarz, Lehuis, Poirier et Couture, 2001). Esta modalidad consta de tres momentos: la etapa de co-situación (se decide el qué y el cómo), la cooperación (se implementa) y la coproducción (se elaboran productos a raíz de la experiencia llevada a cabo).

Metodología

A continuación, detallo brevemente las tres etapas que componen la modalidad colaborativa: la etapa de co-situación, la de co-operación y la de co-producción. Algunas de las acciones previstas ya fueron realizadas y otras están por realizarse en los próximos meses.

- *Características previstas para la etapa de co-situación*

-Revisión documental por parte de los investigadores acerca de distintos proyectos colaborativos, como así también de la situación actual de la enseñanza de las fracciones.

-Encuentro con los directivos y los docentes que desean participar del proyecto, en el cual se presenta el objetivo del mismo y se negocia, con la finalidad de acordar un proyecto de trabajo que incorpore los intereses tanto de los investigadores como de los docentes.

-Realización de un taller de iniciación en el que se propone a los maestros participantes un análisis didáctico/epistemológico introductorio, sobre la noción de fracción.

-Análisis de secuencias de enseñanza -vinculadas con resultados de investigación en didáctica- en torno a la noción de fracción dirigidas a 4º, 5º, 6º y 7º grado. Dichas secuencias abordan significados diferentes de la noción de fracción. Se propone un trabajo en torno al significado de fracción como parte/todo vinculada a la medición, aspecto que se relaciona con la entrada clásica a las fracciones. También, mi objetivo es trabajar con la fracción como cociente, pues puede integrarse con la primera entrada a la fracción como relación parte-todo vinculada a la medición, permite un enriquecimiento importante del repertorio de situaciones y, en consecuencia, de la noción. Además, permite un acercamiento a la definición de fracción que prevalece en el nivel escolar siguiente (secundaria). Estas propuestas de enseñanza constan de una secuencia de actividades constituidas por problemas en contextos extramatemáticos e intramatemáticos, que incluyen distintos tipos de tareas matemáticas y teniendo en cuenta algunas variables didácticas que permitan el avance en los procedimientos y conocimientos puestos en juego.

- *Características previstas para la etapa de co-operación*

A continuación, presento las posibles acciones que configuran la etapa co-situación:

- Observaciones de sesiones de clases. Las observaciones se llevan a cabo una vez que se valore la construcción de cierto nivel de confianza entre los maestros y los investigadores. En las primeras sesiones puede suceder que los maestros se observen entre sí o que sólo se produzcan relatos de la experiencia y/o registros escritos; las observaciones por investigadores se incluyen en sesiones posteriores. Estas

observaciones tienen dos propósitos centrales: brindar información a los observadores para poder retroalimentar a los docentes (además de que los docentes también reciben información valiosa para sí mismos cuando observan a un compañero); y recabar datos para la investigación.

- Sesiones grupales de investigadores y docentes para ajustar detalles de planeación de la sesión próxima y analizar conjuntamente aspectos relevantes de la sesión recién implementada.

- Análisis de las situaciones didácticas atendiendo a los diferentes aspectos: espacios, tiempos, agrupamientos de los estudiantes; como también a las intencionalidades docentes; conocimientos, tipos de tareas, procedimientos y validaciones producidas por parte de los niños, intervenciones docentes, anticipaciones factibles de los docentes y evaluación. La gestión de estos espacios estará a mi cargo y eventualmente del director de la tesis.

- Entrevistas semiestructuradas a los maestros que participan de la investigación.

- *Características previstas para la etapa de co-producción*

Para los investigadores:

- Análisis de los datos obtenidos en la etapa de cooperación (las secuencias planeadas y su justificación; registros de las sesiones colectivas con los maestros; registros de clases; registros de las entrevistas) y elaboración de las conclusiones en relación con el objeto de estudio y los objetivos planteados en la tesis.

- Escritura de artículos por parte de los investigadores sobre la experiencia realizada, para presentar en revistas de educación o socializar por otros canales con maestros de escuela primaria y formadores.

Para los investigadores y maestros:

- Escritura de artículos con los maestros, para socializar las situaciones didácticas implementadas

Para los maestros:

- Incorporación de las propuestas de enseñanza analizadas, modificadas e implementadas, a su acervo personal; como así también al material didáctico de la escuela.

Algunas decisiones sobre el trabajo de campo

En el mes de noviembre de 2022, acordé con el equipo directivo de la escuela, un primer acercamiento con todas las docentes de la institución para el mes de febrero de 2023 a través de un Taller de Iniciación.

A lo largo del segundo cuatrimestre del 2022, planifiqué el Taller de Iniciación y la escritura del mismo. Esto requirió tiempo de estudio, planificación y encuentros virtuales con el Director y Codirector de la investigación para realizar ajustes a la planificación. En este Taller se propuso a los maestros participantes un análisis didáctico/epistemológico introductorio sobre la noción de fracción. En el apartado *“El Taller de Iniciación con todas las docentes de la escuela”* describiré las características que tuvo el mismo y algunos análisis de las producciones de las maestras.

Cabe aclarar que, ya estando en campo, tomé algunas decisiones que me llevaron a plantear otras estrategias metodológicas que no había anticipado en el proyecto. Una de las estrategias fue organizar unos primeros encuentros grupales en el primer cuatrimestre del año 2023 para reconstruir prácticas y sentidos de las maestras de 2^{do} ciclo que participarían en el proyecto.

Por último, en el primer cuatrimestre del año 2023, luego de los encuentros realizados con las maestras, me dediqué al diseño de las secuencias de enseñanza para luego ser analizadas junto con las maestras de 2^{do} ciclo, acción considerada también en la etapa de co-situación. Para luego, en el 2^{do} cuatrimestre poder implementar dichas secuencias en cuarto, quinto, sexto y séptimo grado. En los apartados *“El diseño de las secuencias didácticas”* y *“Sobre la implementación de las secuencias didácticas”* describo algunas acciones llevadas a cabo y unos primeros análisis.

El Taller de Iniciación con todas las docentes de la escuela

En el mes de febrero de 2023 se concretó el Taller de Iniciación -que estaba previsto en la etapa de co-situación- con la participación de los docentes de 1^{ero} a 7^{mo} grado. A lo largo de dos jornadas de trabajo, el taller permitió recuperar las voces de las docentes y continuar estableciendo los vínculos necesarios para abordar el trabajo colaborativo posterior.

El propósito que me planteé con el taller fue ofrecer un panorama de la graduación de problemas en contexto de reparto -desde 1^{er} grado hasta 7^{mo} grado- donde intervienen los significados de la fracción como cociente, parte-todo y medida, a través de la resolución y el análisis de los mismos. Y en este sentido, considero que el propósito se pudo lograr en gran medida, ya que en los intercambios que se dieron se destaca por parte de las maestras que tenían por primera vez un panorama general del trabajo con fracciones a lo largo de todo el nivel.

Cabe aclarar que las situaciones que propuse intentaron poner en discusión con las maestras participantes, las posibilidades de trabajo en cada grado y ciclo de la escuela primaria y no pretendieron constituirse en secuencias didácticas para ser implementadas directamente en el aula.

A continuación, recupero una de las situaciones planteadas para un 5^{to} o 6^{to} grado, el análisis a priori y algunas respuestas de las docentes.

➤ Consigna para los estudiantes

Primera parte

a-Se quiere repartir en partes iguales y sin que sobre nada 1 torta entre 4 amigos. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

b-Y si tuviéramos 2 tortas para repartir entre 4 amigos, ¿cuánto le tocaría a cada uno? ¿Y si ahora hay 3 tortas? ¿Qué pasaría si tuviéramos 7 tortas para repartir? ¿Y si tuviéramos 11 tortas?

Segunda parte

a-El resultado de dividir 1 unidad (torta) entre 4 chicos es igual a $\frac{1}{4}$ de unidad. Observe que el dividendo (1) resulta ser el numerador de la fracción, y el divisor (4) es el denominador. ¿Ocurre esto siempre o es coincidencia?

b) ¿Pasaré lo mismo si se dividen 2 unidades entre 4? y ¿y 3 unidades entre 4? y ¿Y 7 unidades entre 4? ¿Y 11 unidades entre 4?

c- ¿Siempre ocurre que el numerador es el número de unidades (tortas) a repartir y el denominador es el número de niños? ¿Cómo lo sabes?

➤ Consignas para las maestras

a-Resolver los ítems a- y b- de la primera parte, con los posibles procedimientos que podrían realizar los chicos y chicas de estos grados.

b- En la situación hubo una actividad en la que se trató de encontrar el resultado de varios repartos, todos entre 4 niños. ¿En qué ayudó que el número de niños fuera una constante?

c- En la primaria hay ocasiones en las que, sin una explicación, se hace uso, de manera implícita, de la definición de fracción como cociente. Si conoce alguna de esas ocasiones, descríbala y después compártela.

En la primera parte, se plantea una serie de repartos con una característica particular: la cantidad de niños (divisor) es constante, con el propósito de que los niños puedan aplicar razonamientos del tipo: “2 tortas entre 4 chicos debe ser el doble que 1 torta entre 4 chicos” o “3 tortas entre 4 debe ser el triple que 1 torta entre 4”. Además, se proponen cantidades como 7 tortas u 11 tortas luego, para modificar los procedimientos de resolución de los chicos y chicas y en lo posible evitar el uso de gráficos para provocar el uso de expresiones fraccionarias.

En la segunda parte, se intenta generalizar que m unidades entre $n = m/n$ de unidad. Concretamente, se trata de asociar los repartos a cuentas de dividir en un desafío intramatemático.

Analicemos la pregunta b-, de las consignas para las maestras, sobre cómo favorece, en alguna medida, que en la consigna haya varios repartos todos entre 4 niños. Podemos pensar en procedimientos como el de considerar que, en 3 tortas entre 4 niños, les toca 3 veces lo que les tocaría si solamente hubiera una torta (entre los mismos 4 niños), o también que si tiene 7 tortas entre 4 niños les tocaría 7 veces lo que le tocaría con 1 torta.

Sólo uno de los grupos de maestras respondió que “Que el número de niños sea una constante ayudó en que puedan darse cuenta ya que si hubiera denominadores diferentes le costaría más”, pero nada dicen por qué favorece o qué procedimientos favorece esta variable. Los demás grupos de maestras no responden a esta pregunta.

En relación con la consigna c-, nuestro análisis a priori fue que algunas de las ocasiones en las que se hace uso, de manera implícita, de la definición de fracción como cociente son:

- Cuando se enseña a pasar una fracción a expresión decimal, dividiendo numerador entre denominador, por ejemplo, para pasar a expresión decimal se hace $5 \div 8 = 0,625$.

- Cuando se usa la barra de la fracción para indicar división, por ejemplo, al expresar fórmulas como la del área del triángulo: $\frac{b \cdot h}{2}$.

De lo anterior, Block (2022) expresa “no se desprende que «no se deba hacer» el uso implícito referido, pero sí, al menos, informar a los alumnos que se trata de una relación (entre fracción y división) que aún no se ha justificado y que posiblemente más adelante estudiarán” (p. 184).

Algunos saberes que nombraron las docentes para el inciso c- fueron:

M₁: Cuando pasamos una fracción a número decimal

M₂: Cuando usamos el concepto/palabra “entre”. Ej.: una torta entre cuatro chicos.

Nuevamente, la mayoría de las maestras no respondieron a este ítem y en la puesta en común expresaron que no habían comprendido la pregunta. Podríamos pensar aquí como una primera hipótesis que las docentes no conocen ni tampoco trabajan la relación entre la fracción y la división -al notar tantas omisiones en las respuestas- o que una de las pocas prácticas y/o afirmaciones que conocen es cuando se afirma “la raya de fracción significa división”. La idea anterior se vio confirmada en el intercambio de la puesta en común, cuando la mayoría expresó que nunca había trabajado de esta manera, asociando la fracción, la división y los problemas de reparto.

El diseño de las secuencias didácticas y su implementación

Para el diseño de las secuencias didácticas tomé como referencia y material de análisis a Block Sevilla (2022). Este texto me permitió analizar y seleccionar problemas que las fracciones resuelven teniendo en cuenta la diversidad de problemas que existen y los roles que las fracciones juegan en diversos contextos. También, fue un insumo para analizar el tipo de consignas y las tareas matemáticas que se ponen en juego en cada actividad que se presenta en la secuencia didáctica.

Se realizó el acompañamiento en cada una de las aulas de la puesta en acto de las secuencias didácticas, articulando los horarios de modo de poder estar presente en el desarrollo de las mismas.

En este apartado compartimos algunas primeras escenas del aula de 4^{to} grado, en las que los intercambios entre los estudiantes, como así también entre la maestra y los estudiantes, son potentes para advertir y analizar la riqueza en cuanto a los saberes que circulan de forma explícita e implícita en la clase. Lo que me motivó a seleccionar este registro -como lo expresé unas líneas más arriba- es la riqueza de los intercambios y conocimientos de los chicos. Cabe aclarar que el grupo de 4^{to} grado no había trabajado ningún contenido relacionado con fracciones el año anterior, ni tampoco del eje medida, lo cual hace aún más interesante el análisis. En cuanto a los intercambios, se nota claramente que la maestra pudo apropiarse del análisis realizado a priori de la actividad, es decir, pudo intervenir haciendo notar que *lo que hace que una fracción sea $\frac{1}{2}$ de otra cantidad de superficie, es que “entra 2 veces en ella” y no importa si tiene la misma forma o si la cantidad está formada por 1 pedazo, 2 pedazos o más.*

La secuencia de 4^{to} grado que se implementó consta de catorce actividades y se desarrolló a lo largo del mes de septiembre y una semana del mes de octubre de 2023, en un grupo de diecinueve estudiantes. De este grupo de actividades, seleccioné la Actividad 12: ¿Cuáles son mitades?²

1º momento: Organización

Se entrega a cada equipo (2 o 3 estudiantes) una hoja entera y los pedazos de la *Figura 1*. La docente presenta la consigna oralmente a los grupos: “Voy a entregar a cada equipo una torta entera (representada por la hoja entera) y varios pedazos. Ustedes me tienen que ayudar a elegir todos los que son mitades de la torta y explicar por qué son mitades”.

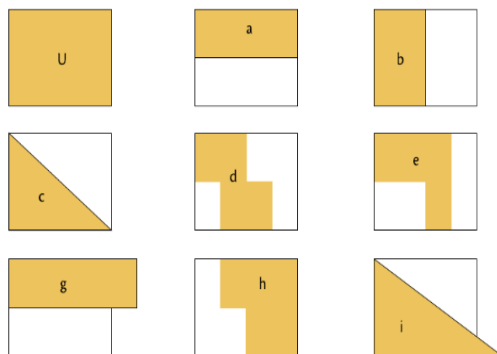


Figura 1: ¿Cuáles son mitades?

² Extraída y adaptada de Block (2022).

En el análisis previo habíamos dicho que, si bien continuamos con el trabajo de medición utilizando fracciones, ahora lo hacemos con superficies. Este tipo de trabajo permite representar una misma fracción de distinta manera. Notemos que la idea central es que: *lo que hace que una fracción sea $\frac{1}{2}$ de otra cantidad de superficie, es que “entra 2 veces en ella” y no importa si tiene la misma forma o si la cantidad está formada por 1 pedazo, 2 pedazos o más.* Podríamos asegurar que esta idea no está en los niños y tendrá que ser discutida en la puesta en común. ¿Qué tipo de intervenciones podría realizar si hay un pedazo que sí es mitad, pero todo dejan de lado (puede pasar con d y e porque quedan 3 partes)? Si al recorrer los grupos notamos que hay un conflicto con las partes d- y e- se puede intervenir diciendo que, si necesitan recortar y cambiar la forma, pueden hacerlo, lo que no se puede hacer es quitar o agregar pedazos.

El siguiente registro es parte de la puesta en común que realizó la maestra. Notemos que la idea central que queríamos trabajar “una fracción es $\frac{1}{2}$ de otra cantidad de superficie cuando “entra” dos veces en ella” surge en los diálogos y es recuperada e institucionalizada por la docente.

Maestra: Se acuerdan de esas figuras que estuvimos trabajando, ¿cuáles eran mitades y cuáles no?

A₁: la A, B, C, D.

Maestra: A, B, C, la D, que ahí buscábamos cómo armarla.

(La maestra arma en el pizarrón las mitades con cartulinas como muestra la Figura 2)

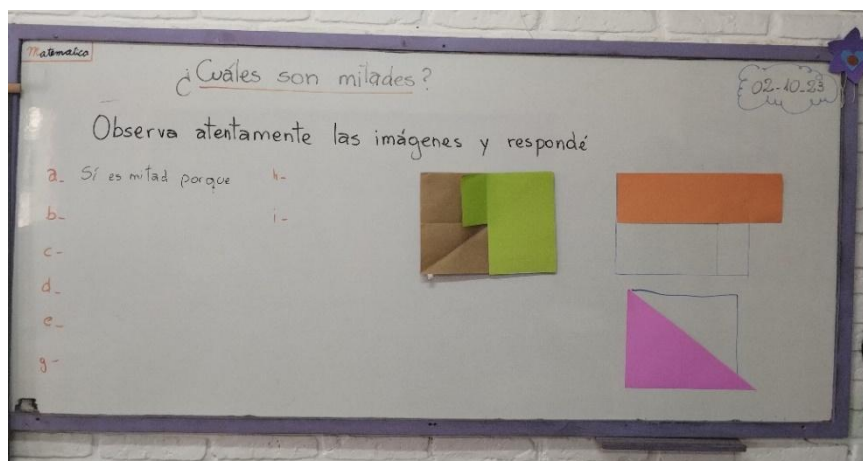


Figura 2: Pizarrón para la puesta en común de la actividad: ¿Cuáles son mitades?

Maestra: Pensando en eso que habíamos charlado la clase pasada sobre estos gráficos, estas imágenes. Dijimos, las que correspondían a la mitad son A, B, C, la D y había otras tres figuras que no eran la mitad, como la G, la H y la I. Ustedes habían dicho, ¿Me recuerdan por qué eran las mitades de estas figuras de colores?

A₁: Porque las dos partes son iguales.

A₂: Por qué no sobresale.

A₃: Porque puedo cortar partes.

Maestra: Si corto partes, ¿cómo hago?

A₃: La pongo por encima de la otra y por eso te queda cortando.

Maestra: La voy acomodando, como hicimos con esta y esta, que las recortamos y las fuimos acomodando.

A₄: Porque lo pintado ocupa lo mismo que lo que no está pintado.

Maestra: Porque exactamente, lo pintado corresponde a lo mismo que la figura o el gráfico U. ¿Qué más? ¿Qué otra manera me habían dicho? Se acuerdan que nosotros habíamos dicho principalmente de las dos primeras, que si yo la recortaba a esta imagen o a la imagen que teníamos allí y la ubicaba, como hicieron algunos, sobre ese gráfico U, ¿entraba cuántas veces?

A₅: dos.

Maestra: Me acuerdo que uno de ustedes era el que lo hizo sobre la unidad U. Puso esa mitad que había marcado hasta donde llegaba y otra vez la ubicó al lado. Para ver si realmente entraba al lado. Entonces, esas mitades, que corresponden al gráfico U, a la unidad, al entero, como ustedes bien me dijeron, entran dos veces dentro de la unidad.

¿Y las formas? ¿Tienen que ser siempre las mismas? ¿Tienen todas las mismas formas?

Alumnos a coro: ¡No!

Maestra: No siempre, no es necesario que tenga justo la mitad o la forma rectangular. Fíjense que nosotros vimos que podía ser rectangular, en forma vertical, horizontal, podía ser un triángulo, y podía tener otras formas, como vemos acá. Sí, en L, tipo S. Así que cuando siempre trabajemos con la mitad, ¿qué fracción representa la mitad? ¿Qué fracción es la mitad de un entero...?

A₁: Un medio.

Maestra: Un medio y ¿cómo se escribe un medio?

La clase continúa y la docente realiza un análisis de la expresión fraccionaria en el pizarrón, y agrega cómo se le llama al “número de arriba y al de abajo”, según las expresiones de los chicos.

A modo de cierre

Comenzaba esta presentación desarrollando el tema de investigación, junto a los antecedentes y el marco teórico profundizado hasta el momento. Luego expresé algunas decisiones tomadas en torno al trabajo de campo y realicé algunas descripciones sobre la implementación del taller de iniciación, la planificación de las secuencias didácticas para los cuatro grados del 2^{do} ciclo y por último algunas escenas del aula de 4^{to} grado.

Si bien aún no he realizado un análisis detallado y riguroso de los resultados obtenidos en las etapas de co-situación y co-operación, la intención al escribir estas páginas fue compartir el trabajo realizado en estos meses junto al equipo de investigación y las maestras participantes, y en ese compartir poder visibilizar el trabajo docente que se realiza a diario en las escuelas y los desafíos que implica. Y si de desafíos se trata, queda por delante el gran trabajo de análisis de todo el material producido y el avanzar en la etapa de co-producción propuesta en el proyecto.

Bibliografía

- Bednarz, Nadine** (2009). *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*. L’Harmatan.
- Block, David** (2006). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. (1 ed.) (Tesis de Doctorado DIE). Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav.
- Block, David** (2007). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. (Tesis Maestría DIE). Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.
- Block, David** (2022). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica*. Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.

Brousseau, Guy (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, 12 (1), 5-38.

Brousseau, Guy, Brousseau, Nadine y Warfield, Virginia (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (1), 1–20.

Eje 2. Educación matemática en el nivel secundario

Reportes de investigación

Enseñanza de funciones polinómicas: propuesta didáctica que incorpora el aprendizaje móvil y el uso de GeoGebra

AGUSTINA BAYÉS

agustina.bayes@ing.unlp.edu.ar

VIVIANA ANGÉLICA COSTA

vacosta@ing.unlp.edu.ar

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de La Plata (UNLP)

Resumen

Este artículo presenta una secuencia didáctica diseñada para la enseñanza de polinomios y funciones polinómicas en cursos de 4to y 5to año de escuelas secundarias en la Provincia de Buenos Aires. La secuencia, rediseñada a partir de una creada por el "Grupo de los lunes", forma parte de una investigación de posgrado que incluye su implementación, análisis y evaluación. Este estudio se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, así como en enfoques educativos que promueven el uso de Tecnologías de la Información y Comunicación, especialmente GeoGebra, y el Aprendizaje Móvil.

Palabras clave: didáctica de la matemática / enseñanza de funciones polinómicas / GeoGebra / escuela secundaria

Introducción

Las funciones polinómicas son las más “simples” dentro del conjunto de funciones, ya que son continuas, derivables e integrables, en todo su dominio, y por ello son utilizadas para modelar matemáticamente diversos fenómenos reales (físicos, económicos, biológicos, geométricos, entre otros), además de ser utilizadas para aproximar un conjunto de datos. Los polinomios son expresiones algebraicas que representan a las funciones polinómicas, y su análisis desempeña un papel fundamental en la comprensión y el estudio del comportamiento de estas funciones.

La enseñanza de polinomios y funciones polinómicas comienza en la escuela secundaria y continúa en los niveles de educación superior, siendo estos contenidos fundamentales para profundizar y abordar los que se sustentan en ellos. En el nivel secundario, la enseñanza de estos temas se propone en el Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires (DGCyE, 2010)¹, al finalizar el ciclo básico (3er año) y continúa durante el ciclo superior (4to y 5to) y se utilizan en el tratamiento de temas de 6to año. Los contenidos se organizan del siguiente modo:

3er año	4to año	5to año
Trabajo con expresiones algebraicas. Funciones: fórmulas, tablas y gráficos. Estudio de funciones. Resolución de ecuaciones e inequaciones.	Funciones cuadráticas y sus distintas expresiones. Polinomios. Operaciones. Factorización. Teorema de Ruffini. Teorema de Gauss. Uso de software para el estudio de funciones.	Funciones polinómicas: Ceros. Gráficos. Conjunto de positividad y de negatividad. Continuidad de una función. Uso de software para el estudio de funciones.

Tabla 1: Resumen de lo propuesto en el Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires

En el Diseño Curricular también se sugieren algunas actividades para que el docente utilice o se apoye para la enseñanza de los contenidos mencionados. Además, en el documento se propone el uso de software para el estudio de funciones. Es sabido que la implementación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas constituye una problemática actual y

¹ Los contenidos en el área Matemática se organizan en cuatro ejes: Geometría y álgebra, Números y Operaciones, Álgebra y Estudio de Funciones, Probabilidades y Estadística. En los mismos se incluyen núcleos sintéticos de contenidos que agrupan conocimientos que están vinculados entre sí.

es estudiada por la comunidad educativa. Uno de los objetivos de la implementación de recursos educativos tecnológicos es contribuir con el mejoramiento del proceso de aprendizaje, ofreciendo al alumnado un entorno para la exploración, la experimentación y la creatividad que favorezca la comprensión y apropiación de los conceptos y significados de los objetos matemáticos de estudio a partir de la visualización gráfica (Carrillo, 2012; Hohenwarter, 2014).

Sin embargo, es estudiado también que la sola incorporación de estas tecnologías en el proceso educativo no garantiza las mejoras esperadas, sino que debe acompañarse con reformas en las estrategias de enseñanza, ya que “no se trata de utilizar los mismos problemas pensados para lápiz y papel; cuando los enunciados son llevados a entornos informáticos, en general, cambia la actividad de los estudiantes” (Duarte, 2014, p. 1). Como menciona Carrillo (2012), la utilización de las TIC en los procesos de enseñanza no es sinónimo de integración, y por eso los docentes deben realizar cambios en sus planificaciones áulicas y en el desarrollo de sus clases.

En relación al uso de TIC en el aula, una opción a considerar es la elección de los dispositivos móviles, que en general están a disposición de los jóvenes y presentes en casi todas las modalidades comunicativas por parte de ellos (Casablancas, Caldeiro y Odetti, 2016). En este sentido, un enfoque educativo que estaría en acuerdo con las dinámicas actuales de los jóvenes es el Aprendizaje Móvil, ya que una de sus ventajas es la portabilidad de los dispositivos a utilizar y su ubicuidad (pueden utilizarse en cualquier momento y lugar) (Bayés y Costa, 2022). En particular, la Calculadora Gráfica de GeoGebra (<https://www.geogebra.org/calculator>), hace posible este tipo de aprendizaje, pudiendo ser usada tanto en línea, como en una aplicación móvil descargable desde Apps Store y Google Play. GeoGebra, es un software de geometría dinámica, de licencia libre y gratuita, utilizado por docentes de todo el mundo.

Por lo mencionado, se propone el diseño de una secuencia didáctica (basada en el “Grupo de los lunes”) elaborada en un Libro de GeoGebra para ser utilizada en dispositivos móviles que contemple lo existente en el Diseño Curricular. Además, la secuencia pretende ser un nexo entre los contenidos estudiados por los alumnos en el 3er año (expresiones algebraicas y polinómicas) con lo estudiado en 4to (ecuación de la recta como representación gráfica de un polinomio de grado uno, y fun-

ciones lineales y cuadráticas, como un tipo de funciones polinómicas) y en 5to (funciones polinómicas).

El “Grupo de los lunes” (Fioriti y Sessa, 2015), coordinado por Carmen Sessa, propone una secuencia didáctica basada en la construcción y exploración de las funciones polinómicas a partir del producto de funciones polinómicas de menor grado, entendiendo que las funciones resultantes de ese producto, conservan algunas de las propiedades de las funciones factores. Además, dicha secuencia plantea la incorporación del uso de GeoGebra como herramienta para la resolución de algunas actividades, y provee a los estudiantes de una producción de contenidos matemáticos para el trabajo áulico, incorporando problemas que serían dificultosos o tediosos de implementar en lápiz y papel. También, en este caso, el uso de GeoGebra colabora en diseñar “un trayecto de aprendizaje en el cual los estudiantes podrían apropiarse de las ideas relativas a funciones de mayor grado con un fuerte soporte en sus presentaciones gráficas” (Fioriti y Sessa, 2015, p. 13). La secuencia planteada en dicho trabajo, comienza con el estudio de la función cuadrática, como producto de dos funciones lineales, donde mediante la observación de las gráficas de las mismas, se puede construir el gráfico de la función resultante y observar, por ejemplo, que las raíces de la función cuadrática son las mismas raíces que las de las funciones lineales. Luego, se continúa con el estudio de funciones polinómicas de mayor grado, en especial la función polinómica de grado tres, de un modo similar.

Marco Teórico

La investigación se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), el Aprendizaje Móvil (AM) y el uso de TIC, en particular del software GeoGebra. La TAD sustenta los aspectos didácticos del diseño y el análisis futuro de la secuencia didáctica propuesta para el estudio de polinomios y funciones polinómicas. Esta teoría concibe a la matemática como una práctica humana antropológica (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). En especial, nos centramos en la noción de *praxeología*, que aporta un modelo para describir cualquier actividad humana regularmente realizada (Otero *et al.*, 2013), distinguiendo dos niveles: la *praxis* (saber-hacer) que engloba las *tareas* y las *técnicas*; y el *logos* (saber) que incluye la *teoría* y la *tecnología* que explican la *praxis*. A su vez, en la noción de *praxeología*, se distinguen

dos categorías: la Organización Matemática (OM) y la Organización Didáctica del profesor (OD). Además, utilizaremos de la TAD el constructo llamado *momentos de estudio o momentos didácticos*, que representan las fases de un proceso de aprendizaje. Estos momentos son:

- *primer encuentro* con la organización matemática,
- *exploración de un tipo de tareas*, lo que permite la elaboración de una técnica relativa a ese tipo de tareas,
- *constitución del entorno tecnológico teórico* relativo a una técnica, relacionado con los dos momentos mencionados anteriormente,
- *trabajo de la técnica*, para mejorarla y que se vuelva más eficaz,
- *institucionalización*, cuyo objetivo es precisar la OM elaborada y
- *evaluación*, momento que se articula con el de la institucionalización.

Estos seis *momentos de estudio* tienen dos propósitos para los docentes. Por un lado, permiten ser una herramienta para hacer un análisis de los procesos didácticos (OD), y por otro, plantear el problema docente de cuándo llevar a cabo los diferentes momentos, como por ejemplo, “¿cómo realizar concretamente el primer encuentro con tal OM? ¿con tal tipo de tareas? ¿cómo conducir el estudio exploratorio de un tipo de tareas dado? ¿cómo llevar a cabo la institucionalización? ¿cómo realizar el momento de la evaluación?” (Chevallard, 1999, p. 25). Los mismos no necesariamente siguen ese orden mencionado, sino que dependen además de la planificación docente, y del proceso de enseñanza y de aprendizaje que puede requerir volver y/o reorganizar tales momentos de otro modo.

En relación al Aprendizaje Móvil, se utiliza como enfoque educativo para la incorporación de dispositivos móviles en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y por último, el uso de TIC, y en especial el uso de GeoGebra, como herramienta para colaborar en dichos procesos. El AM (o mobile learning) es una corriente de aprendizaje que se realiza a través del uso de dispositivos móviles, en general en tabletas digitales y/o celulares, permitiendo que el usuario pueda interactuar con la información en cualquier momento y lugar, ingresar a internet, descargar archivos y usar aplicaciones creadas para un fin educativo (Ballesteros *et al.*, 2020; Göksu y Atici, 2013). El AM cuenta con ventajas descritas en Bayés, del Río y Costa, (2018). Además, se contempla el uso de GeoGebra que constituye una herramienta tecnológica que favorece la interactividad entre diversos conceptos ma-

temáticos y su visualización, gracias a las diferentes vistas de los objetos matemáticos (gráfica, algebraica, 3d, entre otras) (Arteaga Valdés, Medina Mendieta, Del Sol Martínez, 2019).

Secuencia didáctica

A continuación se presenta la secuencia didáctica, soportada en un Libro de GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/drnezdat>) y se describe en el marco de la TAD: OM (tareas y técnicas, en el *saber* funciones polinómicas, en la *teoría* Álgebra y Análisis Matemático) que permite explorar cada actividad, OD propuesta para su implementación áulica, y los posibles *momentos de estudio* que guiarán el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La secuencia se organiza en cinco Actividades, que los alumnos del curso donde se implemente puedan realizarlas en celulares descargando la aplicación móvil de GeoGebra, dando lugar al AM. En el detalle de cada Actividad, se puede notar que las funciones polinómicas están destacadas en distintos colores que se corresponden con directrices especificadas en Bayés, del Río y Costa (2018), en acuerdo con el AM, para la creación de recursos educativos digitales. La secuencia podría planificarse para aproximadamente diez clases de una hora reloj cada una, en un curso, con los estudiantes trabajando en grupos e interactuando entre ellos.

La Actividad 1 se presenta en la Tabla 2, y pretende ser el *primer encuentro* con la OM funciones polinómicas (*saber*).

Actividad 1 Graficar las funciones lineales $p(x)=x$ y $q(x)=2x$ en GeoGebra. A partir del gráfico, respondé a las siguientes preguntas: a. ¿Para qué valores de x, si existen, $p(x)$ y $q(x)$ son cero? En caso de que existan, podés encontrarlos en GeoGebra con la ayuda de la herramienta . b. En base a lo anterior, ¿en qué rango de valores de x las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas o negativas? c. A partir de las funciones lineales $p(x)$ y $q(x)$, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x, $h(x)=p(x).q(x)$ Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso, utilizando la vista gráfica y colocar los puntos encontrados usando la herramienta : • $h(2)$ • $h(0)$ • $h(-1)$

- $h(-3)$
- $h(-2)$

d. Realiza un posible gráfico para $h(x)$ según lo encontrado en el inciso c, usando la herramienta lápiz . Si lo consideras necesario, podés calcular más puntos de la función $h(x)$.

e. Ahora seleccionen la casilla de la función $h(x)$ y comprueben si el gráfico que habían pensado es el que se muestra en GeoGebra.

f. En base al gráfico realizado de la función $h(x)$, ¿para qué valores de la variable x , la función $h(x)$ es cero? ¿Para qué valores de la variable x , $h(x)$ es positiva y negativa? ¿Existe alguna relación con lo encontrado en el inciso a? Si la respuesta es sí, indicar cuál, y si la respuesta es no, explicar por qué.

g. Escribí la expresión algebraica de la función $h(x)$. Podés ayudarte con las expresiones algebraicas de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.

Tabla 2: Actividad 1 de la secuencia didáctica

La Actividad 1 pretende la construcción de funciones polinómicas de grado 2 a partir de operar algebraica y gráficamente, en la app de GeoGebra, con el producto de dos funciones polinómicas de grado 1, que en este caso tienen al punto (0;0) en sus gráficas. Se utilizarán las herramientas de GeoGebra: punto, intersección, dibujo a mano alzada y entrada de funciones. Las *tareas* y *técnicas* incluyen las de: calcular raíces o ceros de funciones, evaluar valor numérico de funciones, esbozar gráficas, graficar funciones, hallar intervalos de positividad y negatividad. En particular, la primera actividad comienza con funciones cuya ordenada al origen y raíces son iguales.

La Actividad 2 se presenta en la Tabla 3. La misma pretende que los estudiantes continúen explorando el mismo tipo de *tareas* presentadas en la Actividad 1, en el que se les agrega un nuevo desafío, ya que el punto (0;0) no pertenece a la gráfica de una de las dos funciones de grado 1.

Actividad 2

Sean las funciones $p(x)=x$ y $q(x)=2x-1$, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x , $h(x)=p(x) \cdot q(x)$. A partir del gráfico, respondé las siguientes preguntas:

a. ¿Para qué valores de x , si existen, $p(x)$ y $q(x)$ son cero? En caso de que existan, podés encontrarlos en GeoGebra con la ayuda de la herramienta  y realizando los gráficos de las funciones lineales en GeoGebra.

b. En base a lo anterior (puede ser el gráfico o la expresión algebraica), ¿en qué rango de valores de x las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas o negativas?

c. Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso, utilizando la vista gráfica y colocar los puntos encontrados usando la herramienta :

• $h(2)$ • $h(0)$ • $h(-1)$ • $h(-4)$ d. Realiza un posible gráfico para $h(x)$ según lo encontrado en el inciso c, usando la herramienta . Si lo consideras necesario, podés calcular más puntos de la función $h(x)$ e. Ahora seleccionen la casilla de la función $h(x)$ y comprueben si el gráfico que habían pensado es el que se muestra en GeoGebra. f. Escribí la expresión algebraica de la función $h(x)$

Tabla 3: Actividad 2 de la secuencia didáctica

La Actividad 3, presentada en la Tabla 4, pretende el *trabajo de la técnica*, es decir, calcular raíces y valor numérico de funciones, esbozar gráficas, graficar funciones, hallar intervalos de positividad y negatividad. Se complejizan en relación a las Actividades anteriores ya que las funciones de grado 1 no tienen al (0;0) en sus gráficas.

Actividad 3 Sean las funciones $p(x)=x+1$ y $q(x)=2x-1$, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x, $h(x)=p(x) \cdot q(x)$ A partir del gráfico, respondé las siguientes preguntas: a. ¿Para qué valores de x, si existen, $p(x)$ y $q(x)$ son cero? En caso de que existan, podés encontrarlos en GeoGebra con la ayuda de la herramienta  b. En base a lo anterior ¿En qué rango de valores de x las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas o negativas? c. Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso, utilizando la vista gráfica y colocar los puntos encontrados usando la herramienta : • $h(2)$ • $h(0)$ • $h(-1)$ • $h(-4)$ d. Realiza un posible gráfico para $h(x)$ según lo encontrado en el inciso c, usando la herramienta . Si lo consideras necesario, podés calcular más puntos de la función $h(x)$ e. Escribí la expresión algebraica de la función $h(x)$ y graficala en GeoGebra escribiéndola en la vista algebraica.

Tabla 4: Actividad 3 de la secuencia didáctica

Observar que en las Actividades 1, 2 y 3, los estudiantes obtendrán una expresión algebraica de la función $h(x)$ de grado 2, en forma factorizada con factores de grado 1.

La Actividad 4, exhibida en la Tabla 5, pretende llevar a cabo la *institucionalización* del concepto de función polinómica de grado 2. Además, se incluye otra herramienta de GeoGebra, como son los deslizadores, para explorar las diversas funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ que se pueden generar variando los coeficientes. Esto daría lugar a observar que existen funciones cuadráticas que no pueden ser expresadas algebraicamente como el producto de dos funciones lineales. Por ejemplo, si $c=0$, y $b=0$, a distinto de cero, se encuentran funciones cuadráticas del tipo de la construida en la Actividad 1, por otro lado, $c=0$, y b distinto de cero y a distinto de 0, se obtienen funciones cuadráticas del tipo de las exploradas en la Actividad 2.

Actividad 4 Toda función cuadrática puede ser escrita algebraicamente de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a distinto de 0 Con lo trabajado en las actividades 1, 2 y 3, respondé las preguntas que se encuentran a continuación: a. Crear un applet que grafique en GeoGebra cualquier función cuadrática (podés ayudarte con el uso de la herramienta ) b. Ahora moviendo algunos de los deslizadores, escribí que sucede en cada caso: - Sin mover los valores de a y b, ¿qué sucede con la gráfica cuando se modifica el valor de c? Explica con tus palabras. - Sin mover los valores de a y c, ¿qué sucede con la gráfica cuando se modifica el valor de b? Explica con tus palabras. - Sin mover los valores de b y c, ¿qué sucede con la gráfica cuando se modifica el valor de a? Explica con tus palabras c. Grafica la función $f(x) = x^2 + 2x$ (podés ayudarte con los deslizadores o escribiéndola en la barra de entrada). ¿Se puede escribir a la función $f(x)$ como producto de dos funciones lineales? Si la respuesta es sí, encontrá las funciones y si la respuesta es no, explica por qué. d. Ahora grafica la función $g(x) = x^2 + 4x + 4$ en GeoGebra y respondé la misma pregunta del inciso anterior. e. Por último, grafica la función $t(x) = x^2 + 2x + 2$ y respondé la misma pregunta del inciso c.

Tabla 5: Actividad 4 de la secuencia didáctica

La Actividad 4, permitiría explorar por qué no todas las funciones cuadráticas pueden ser expresadas como el producto de funciones lineales, este análisis también ayuda a desarrollar habilidades en la *técnica* del factoro de polinomios. El factoro de polinomios es una técnica crucial en álgebra que permite descomponer un polinomio en factores más simples. En el caso de las funciones cuadráticas, identificar si pueden ser factorizadas (o no) nos ayuda a comprender mejor su es-

estructura y a encontrar posibles raíces, lo cual es fundamental en diversos contextos matemáticos y científicos.

Al observar cómo cambian las gráficas de las funciones cuadráticas al modificar sus coeficientes a , b y c , los estudiantes pueden obtener algún indicio sobre cómo factorizarlas (escribirlas como producto de dos funciones lineales). Por ejemplo, en el caso de la función $g(x) = x^2 + 4x + 4$, al reconocer que es un cuadrado perfecto, es posible escribirla como $g(x) = (x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$, lo que permite comprender mejor su estructura y propiedades. Sin embargo, la función $t(x) = x^2 + 2x + 2$, no es posible escribirla como producto de dos funciones lineales.

Al finalizar esta Actividad, se propone implementar el *momento de estudio de la evaluación*, en forma grupal y utilizando la app de GeoGebra. Esto se realizaría antes de explorar las funciones polinómicas de mayor grado mayor o igual a 3. Cabe mencionar que si bien el momento de estudio se lista como último momento, este es posible implementarlo en distintas fases del proceso educativo donde el docente considere necesario.

Por último, la Actividad 5, expuesta en la Tabla 6, propone dar continuidad al estudio de las funciones polinómicas de grado mayor a dos. Esta actividad es un *primer encuentro* con la OM de funciones polinómicas de grado 3, obteniéndolas mediante el producto entre una función polinómica de grado uno y una función polinómica de grado dos. Se ha decidido que la función lineal sea una que tiene al $(0,0)$ en su gráfica y que los estudiantes la han trabajado en la Actividad 1 y 2.

Actividad 5

Sean las funciones $p(x)=x$ y $q(x)=x^2+2x-3$, definimos la función $h(x)$ de la siguiente manera: para cada valor de x , $h(x)=p(x) \cdot q(x)$

A partir del gráfico, respondé las siguientes preguntas:

a. ¿Para qué valores de x , si existen, $p(x)$ y $q(x)$ son cero? Vamos a encontrarlo

en GeoGebra con la ayuda de la herramienta 

b. En base a lo anterior ¿En qué rango de valores de x las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son positivas o negativas?

c. Calcular el valor de $h(x)$ en cada caso, utilizando la vista gráfica y colocar los puntos encontrados usando la herramienta:

- $h(2)$
- $h(0)$
- $h(-1)$
- $h(-3)$
- $h(-2)$

d. ¿Para qué valores de la variable x , la función $h(x)$ es cero? ¿Para qué valores de la variable x , $h(x)$ es positiva y negativa? ¿Qué relación existe con lo encontrado en el inciso a?

e. Realiza un posible gráfico para $h(x)$ según lo encontrado en el inciso c, usando

la herramienta . Si lo consideras necesario, podés calcular más puntos de la función $h(x)$.
f. Ahora seleccionen la casilla de la función $h(x)$ y comprueben si el gráfico que habían pensado es el que se muestra en GeoGebra.
g. Escribí la expresión algebraica de la función $h(x)$

Tabla 6: Actividad 5 de la secuencia didáctica

Por último, cabe mencionar que la secuencia didáctica diseñada contiene algunas Actividades más para trabajar las OM de funciones polinómicas de grado 3 o mayor, que no se incluyen en este artículo, por cuestiones de espacio.

Conclusiones y trabajos a futuro

El artículo presenta una secuencia didáctica diseñada para enseñar polinomios y funciones polinómicas en cursos de 4to y 5to año de escuelas secundarias en la Provincia de Buenos Aires. Esta secuencia, basada en una diseñada por el “Grupo de los lunes”, se enfoca en el uso de tecnología como GeoGebra y en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en el Aprendizaje Móvil. Se organiza en cinco actividades que los estudiantes realizan utilizando la aplicación móvil de GeoGebra. Cada actividad se centra en diferentes aspectos de las funciones polinómicas, desde su construcción hasta su manipulación algebraica y gráfica. Se fomenta el trabajo en grupo y la interacción entre estudiantes. La secuencia institucionaliza el concepto de función polinómica de grado 2, utilizando herramientas como deslizadores para explorar diversas funciones cuadráticas y destaca la importancia de observar que no todas las funciones cuadráticas pueden expresarse algebraicamente como el producto de dos funciones lineales. Finalmente propone más actividades para explorar funciones polinómicas de mayor grado. Se espera que esta investigación realice aportes e instale un debate acerca de la enseñanza y aprendizaje de polinomios y funciones polinómicas en el nivel secundario en el marco de la didáctica de la matemática, además, motivar a los docentes al uso educativo de GeoGebra en dispositivos móviles y fomentar el aprendizaje móvil como una herramienta de aprendizaje. A futuro se espera obtener resultados relativos a su implementación y análisis.

Bibliografía

- Arteaga Valdés, Eloy, Medina Mendieta, Juan y Del Sol Martínez, Jorge** (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Revista Conrado*, 15(70), 102-108. <http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>.
- Bayés, Agustina, Del Río, Laura y Costa, Viviana** (2018). Diseño de materiales educativos para dispositivos móviles con GeoGebra: Análisis de un caso. *Virtual Educa Buenos Aires 2018*.
- Bayés, Agustina y Costa, Viviana** (2022). Calculadora gráfica GeoGebra para el estudio de funciones polinómicas, polinómicas y series de Taylor. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 11.
- Carrillo, Agustín** (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 9–22.
- Casablancas, Silvina, Caldeiro, Graciela y Odetti, Valeria** (2016). *La mirada de los sujetos de educación secundaria en los nuevos escenarios educativos. ¿Qué cambió a partir de la llegada de las netbooks de Conectar Igualdad?* III Congreso Internacional de Educación de la Universidad Nacional de La Pampa.
- Chevallard, Yves, Bosch, Mariana y Gascón, Josep** (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. 1a.ed. Universitat de Barcelona.
- Chevallard, Yves** (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires** (2010). Diseño curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior ES4: Matemática. http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/materias_comunes_a_todas_las_orientaciones_de_4anio/matematica_4.pdf
- Duarte, Betina** (2014). Algunas experiencias y reflexiones sobre la enseñanza de la matemática en entornos con tecnología. https://www.researchgate.net/publication/276289639_Algunas_experiencias_y_reflexiones_sobre_la_ensenanza_de_la_matematica_en_entornos_con_tecnologia
- Fioriti, Gema y Sessa, Carmen** (Coords.) (2015). *Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas: incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula*. Unipe: editorial universitaria. <https://www.educ.ar/recursos/fullscreen/show/46467>
- Hohenwarter, Markus** (2014). Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 11–18.

Otero, María, Fanaro, María, Corica, Ana, Llanos, Viviana, Sureda, Patricia y Parra, Verónica (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Dunken.

El sentido de la clasificación de los cuadriláteros. Análisis praxeológico de un problema

GABRIELA PEREZ

perezgabriela.base@gmail.com

Instituto Provincial de Educación Técnica (IPET) N° 258. Mayor Ing. Francisco de Arteaga

CECILIA ELGUERO

celguero@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Resumen

En este trabajo se describe la *praxeología matemática* presente en un problema seleccionado a priori como fértil para estudiar con *sentido* la clasificación de cuadriláteros en la escuela secundaria, planteando, además, posibles cuestiones y tareas que se podrían proponer en el contexto del mismo para “ampliar” dicha *praxeología* y la reconstrucción del saber que permite. El estudio forma parte de una investigación desarrollada en un Trabajo Final Integrador de la carrera Especialización en Didáctica de la Matemática (Universidad Nacional de Río Cuarto), tomando como marco teórico y metodológico la *Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Se presenta el análisis del problema a la luz de los elementos teóricos considerados, y avances proyectados y en proceso en relación a lo producido en la investigación.

Palabras clave: clasificación/cuadriláteros convexos/ enseñanza

Introducción

Se presenta parte de una investigación desarrollada en el marco de un Trabajo Final Integrador (TFI) de la Carrera de posgrado Especialización en Didáctica de la Matemática (Universidad Nacional de Río Cuarto). El problema abordado en el TFI se relaciona con el estudio de la cuestión clasificación de los cuadriláteros convexos en la escuela secundaria (CCs en adelante) y se configura en torno a la siguiente pregunta general: *¿Qué características tendría que tener una propuesta de enseñanza para propiciar un estudio con sentido de la CCs?* La investigación pretende aportar respuestas a la pregunta planteada a partir de un estudio específico y desde el marco teórico y metodológico de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD).

Una noción medular en la TAD, y considerada en la investigación, es la de *praxeología*. Se considera que toda actividad humana puede describirse en términos de *praxeologías*, y ello da sentido a hablar, en particular, de *praxeología matemática u organización matemática* (OM). Una OM se compone de dos categorías relacionadas de elementos:

- la *praxis*, que abarca los *tipos de tareas* problemáticas que se estudian, y las *técnicas* (“maneras de hacer”) que se utilizan para resolverlas,
- el *logos* que es el discurso racional que justifica la praxis abarcando dos niveles de justificación: la *tecnología*, cuya función es hacer inteligibles las *técnicas*, describirlas, interpretarlas y justificar su funcionamiento, y la *teoría*, que es el argumento formal que permite fundamentar el discurso *tecnológico*.

Abordar la pregunta que guía la investigación desde el marco de la TAD supone, como punto de partida, la delimitación de rasgos que tendría que tener una OM que permita un estudio con *sentido* de la clasificación de cuadriláteros en la *institución* de la Escuela Secundaria –¿por qué tendrían que ser estudiados ciertos objetos y otros no?–. Este sistema de referencia es llamado en la TAD *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER). Así, el primer objetivo, O1, propuesto para abordar la pregunta de investigación refiere a la elaboración de principios constitutivos de un posible MER relativo a la CCs.

Para la consecución de O1 se han revisado trabajos de investigación desarrollados en el ámbito de la Educación Matemática (De Villiers, 1994; De Villiers, Goven-der y Patterson, 2009; Gascón, 2004; Mariotti y Fischbein, 1997; Rosso, 2005, entre otros), seleccionados por encontrar en ellos elementos que aportan en algún

sentido al estudio de cuestiones relativas a: *¿Qué se entiende por clasificación? ¿Qué relación hay entre los procesos de clasificar y definir? ¿Existen distintas formas de clasificar? ¿Qué las distingue? ¿Cuál es el la “utilidad” de ellas? ¿Qué conexiones es posible establecer entre la CCs y otras cuestiones escolares?*

A partir de este estudio se elaboraron algunos principios del MER pretendido, los cuales se traducen en posturas en torno a: posibles *razones de ser* de la CCs y tipo de *tareas* matemáticas que se consideran relevantes para su estudio. Respecto a las *razones de ser*, las posturas se configuran contemplando los siguientes aspectos:

- El proceso de clasificación y el tipo de organización en clases de los cuadriláteros que se puede establecer.

- Situaciones geométricas *umbilicales* ligadas a la clasificación de cuadriláteros.

- Posibles conexiones que podrían establecerse entre la clasificación de cuadriláteros y otras cuestiones que se estudian en la escuela secundaria.

Se considera que el modelo propuesto aporta herramientas para describir, cuestionar y analizar propuestas de estudio relacionadas con la CCs, como también, para proponer y gestionar procesos de estudios alternativos.

El segundo objetivo planteado, O2, refiere a la puesta en funcionamiento del MER elaborado para, por un lado, analizar y describir la OM presente en un problema seleccionado a priori como fértil para estudiar la CCs y, por otro lado, para sugerir posibles cuestiones y tareas que se podrían proponer ampliar lo que se construye en el contexto del mismo.

En particular, en este trabajo se reporta parte de lo trabajado en torno a O2. Finalmente, se describen algunos avances proyectados y en proceso en relación a lo producido en la investigación, los cuales involucran el estudio del *problema profesional del sentido de la CCs* en el ámbito de la formación del Profesor en Matemática (FPM).

El problema. Análisis praxeológico

El problema seleccionado, denominado **El problema de la paisajista**, fue diseñado por Elguero (2020) a partir de una propuesta de De Villiers (1993) con el objetivo de abordar con docentes de la formación inicial y continua cómo la demostración puede ser un medio de descubrimiento de nuevas propiedades. Plantea una

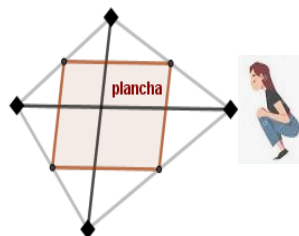
cuestión extramatemática de construcción de cuadriláteros, que de manera general puede describirse como sigue: *¿Qué formas de canteros cuadrangulares podría diseñar una paisajista si quiere que por los puntos medios de sus lados se inscriban planchas de granito con formas de paralelogramos particulares? ¿Cómo podría hacer los diseños cruzando varillas en el piso?*

Su resolución pone en funcionamiento conocimientos geométricos del ciclo básico: congruencia de triángulos; propiedades de ángulos entre dos rectas paralelas y una transversal, definiciones de cuadriláteros particulares, propiedad de la base media de un triángulo.

Se irá presentando el recorrido de consignas y un breve análisis de las mismas.

Una paisajista diseña canteros cuadrangulares en los que inscribe, por los puntos medios de sus lados, planchas de granito.

Para hacer los canteros ***cruza dos varillas en el terreno, pone estacas en sus extremos y tira hilos para obtener así los bordes del cantero en los que se inscribirá la plancha.***



a) Un cliente le pide que construya en el parque de su casa un cantero y que la plancha de granito inscripta sea rectangular. Para ello la paisajista toma dos varillas de distinta medida y las ubica en el suelo de manera que se crucen perpendicularmente y que una de ellas biseque a la otra. **i)** ¿Qué formas tienen los canteros que se obtienen con esta técnica? **ii)** ¿Es válida la técnica de la paisajista? Es decir, ¿por qué le garantiza que va a cumplir con los requerimientos del cliente?

Las tres condiciones sobre las diagonales de los cuadriláteros canteros -las varillas- son: *tienen distinta medida, se cortan perpendicularmente, una biseca a la otra*. A partir de ellas y, teniendo en cuenta que, la tercera puede considerarse como “solo una diagonal es bisecada por la otra”, o bien, “ambas se bisecan”, la paisajista podría diseñar cuadriláteros canteros con forma de romboide y rombo respectivamente.

Determinar qué formas pueden tener los canteros plantea la tarea de reconocer clases de cuadriláteros, lo cual implica poner en juego una definición de las mismos y una relación, jerárquica o partitiva, entre ellas - ¿qué relación hay entre el rom-

boide y el rombo? -. Usando el criterio de congruencia de triángulos “lado-ángulo-lado” se valida tales formas posibles.

Respecto a la cuestión planteada en ii), se podría probar que el cuadrilátero $EFGH$ (fig. 1) es un rectángulo argumentando que sus lados opuestos son paralelos –por la propiedad de la base media de un triángulo– y que uno de sus ángulos interiores es recto –usando la hipótesis “las diagonales del cuadrilátero cantero $ABCD$ son perpendiculares” y la propiedad de los ángulos conjugados internos entre paralelas -. Se puede continuar el camino argumentativo según la definición de rectángulo que se ponga en funcionamiento, por ejemplo, si se lo define como *paralelogramo con un ángulo recto*, se podría ya afirmar que $EFGH$ es un rectángulo, incluyendo al cuadrado como un rectángulo particular.

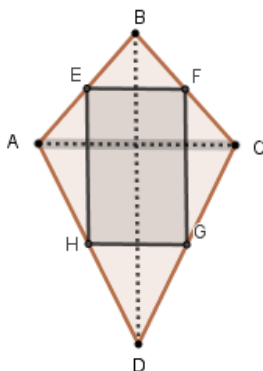


Figura 1: Plancha de granito $EFGH$ inscrita en un cantero romboide

Validar la técnica de la paisajista involucra la revisión de definiciones, jerárquicas/partitivas, disponibles de rectángulo: ¿paralelogramo con un ángulo recto?, ¿cuadrilátero con cuatro ángulos rectos?, ¿cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y no equilátero?, etc. A partir de ello, el trabajo se traduce en probar que las propiedades consideradas en la definición se satisfacen. Así, la cuestión que se plantea en **ii)** propicia la discusión en torno a cómo la elección de una definición bajo el criterio de minimalidad (Winicki Landman, 2006) simplifica el trabajo de verificación respecto a que el cuadrilátero inscripto es un rectángulo.

Por la propiedad métrica de la base media de un triángulo se puede concluir que los lados opuestos de $EFGH$ son congruentes (fig. 1) y, además, por ser las diagonales de $ABCD$ de distinta medida, sus lados no son todos congruentes, o sea, la plancha de granito $EFGH$ es un rectángulo no cuadrado.

b) Le pregunta al cliente si lo diseñado es o no de su agrado. Este le responde que preferiría, si es posible otra forma de cantero, pero con la misma plancha de granito rectangular inscrita por los puntos medios de sus lados. ¿Podrá la paisajista acceder al pedido del cliente?

Esta consigna invita a hacer una mirada retrospectiva sobre lo probado en **a)** y deducir, si ya no se la ha hecho, que se puede prescindir de la condición “una diagonal biseca a la otra” ya que ella no determina la forma rectangular de la plancha a inscribir en los canteros (fig. 2). También se puede revisar en este punto cómo el camino argumentativo seguido no involucra el uso de propiedades relativas a simetrías del romboide y del rombo, ni propiedades de sus lados. De esta manera, tomando argumentos utilizados en **a)** se puede concluir que, si se cruzan perpendicularmente las dos varillas de distintas medidas disponibles, se logra construir canteros de modo tal que por los puntos medios de sus lados se puede inscribir la misma plancha rectangular no cuadrada.

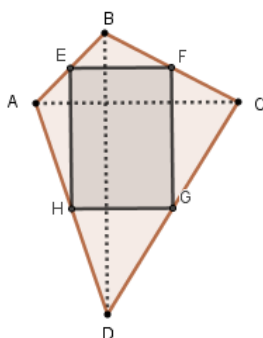


Figura 2: Cuadrilátero cantero con la misma plancha de granito EFGH de a)

A partir de estas relaciones que se establecen en el contexto del problema se podría avanzar y enunciar en el ámbito matemático la siguiente propiedad: Si un cuadrilátero convexo es ortodiagonal y no equidiagonal, entonces los puntos medios de sus lados forman un rectángulo no cuadrado. El contexto del problema invita a considerar si esa condición es necesaria además de suficiente, lo cual implica analizar la validez de la siguiente propiedad: Si los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo forman un rectángulo no cuadrado, entonces dicho cuadrilátero es ortodiagonal y no equidiagonal.

El trabajo en un entorno dinámico permite observar que hay un universo de formas de cuadriláteros ortodiagonales y no equidiagonales –con la particularidad de que por los puntos medios de sus lados se inscribe el mismo rectángulo– que se

obtienen al variar la ubicación del punto de corte de las diagonales sobre las mismas. Invita así a pensar nuevas cuestiones en el contexto del problema, las cuales pueden formularse como sigue: ¿Cómo tendría que cruzar las varillas la paisajista si quiere una forma determinada de cuadrilátero cantero en la que por los puntos medios de sus lados se pueda inscribir una plancha de granito rectangular? ¿Cómo cruzarlas para que el cantero tenga forma de trapecio, o de trapecio isósceles, o de rombo? ¿Es posible?, etc. En el ámbito matemático tales preguntas se traducen en la siguiente: ¿cómo caracterizar una forma de cuadrilátero particular a partir de propiedades de sus diagonales? Sobre esta cuestión se vuelve más adelante.

Las tareas que se enuncian a continuación permiten avanzar en el estudio de relaciones entre clases de cuadriláteros caracterizados por la conjunción de dos propiedades de sus diagonales –perpendicularidad vs no perpendicularidad y congruencia vs no congruencia– y clases de paralelogramos inscriptos por los puntos medios de sus lados:

- c)** *Otro cliente le pide un cantero de tal modo que la plancha de granito inscripta por los puntos medios de sus lados, sea un cuadrado. ¿Puede acceder al pedido? ¿Puede diseñar más de un cantero? Justifica.*
- d)** *¿Es posible con la técnica de "cruzar varillas" construir canteros de modo que la plancha inscripta tenga forma de rombo? Justifica.*
- e)** *¿Hay otras formas de planchas de granito que podría usar la paisajista para diseñar canteros con su técnica de "cruzar varillas"? Justifica.*
- f)** *Propone una síntesis que describa la relación entre las formas de las planchas de granito y las formas de los canteros en las que se "inscriben" las mismas.*

Siguiendo la estrategia de modificar sistemáticamente las condiciones sobre las diagonales -las varillas- y ver cómo ello afecta lo argumentado en consignas previas, se puede concluir que la paisajista puede realizar la construcción con su técnica de “cruzar varillas”:

*Cruzándolas perpendicularmente y cambiando la condición “varillas de distinta medidas” de la consigna b) por “varillas de igual medida”, la plancha de granito es un cuadrado –consigna **c)**–.

*Cruzándolas no perpendicularmente y:

-tomando las varillas de la misma medida, la plancha de granito tiene forma de rombo no cuadrado –consigna **d)**–.

-tomando las varillas de distinta medida, la plancha de granito tiene forma de paralelogramo propiamente dicho –consigna **e)**–.

En el ámbito matemático lo anterior se traduce en propiedades que relacionan cuadriláteros convexos con tipo particulares de paralelogramos que se forman al unir los puntos medios de sus lados (fig. 3)

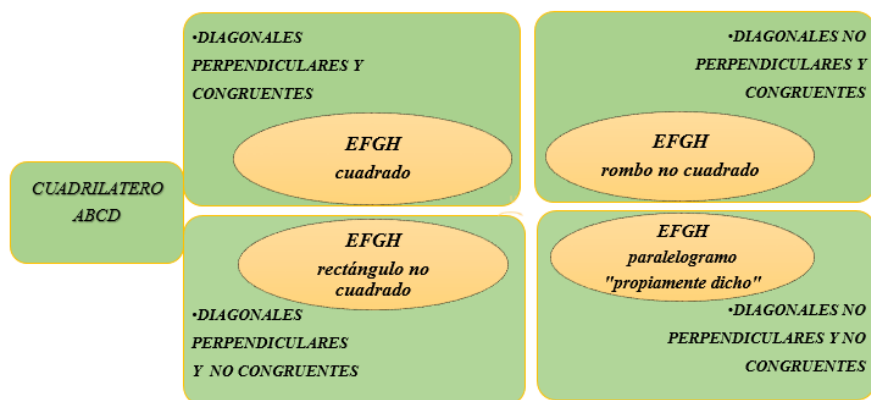


Figura 3: Esquema que sintetiza la relación “cuadriláteros canteros – planchas de granito”

Lo propuesto en la consigna **f)** permite avanzar hacia la construcción de un nuevo resultado teórico que generaliza lo trabajado en las consignas previas, el Teorema de Varignon sobre cuadriláteros.

Mediante una clasificación constructiva (De Villiers, 1994) los cuadriláteros quedan organizados en cuatro clases disjuntas a partir de considerar la conjunción de dos propiedades de sus diagonales –perpendicularidad vs no perpendicularidad y congruencia vs no congruencia–, o equivalentemente, a partir del tipo de paralelogramo que se pueden inscribir por los puntos medios de sus lados (fig. 3).

Los paralelogramos quedan caracterizados partitivamente porque lo que interesa en el contexto del problema es distinguir formas -las planchas de granito-. Hay, además, cuestiones que propician el uso de definiciones jerárquicas de paralelogramos y la reflexión de su utilidad en términos de “economía” deductiva y de formulación de propiedades. De esta manera, el problema aporta a la cuestión del para qué clasificar los cuadriláteros en forma jerárquica o en forma partitiva.

En el recorrido de consignas se despliegan tareas consideradas relevantes en el MER propuesto para la CCs, tales como: tareas de construcción de cuadriláteros (validar un procedimiento de construcción; dar condiciones para una construc-

ción), tareas de formulación y demostración de propiedades de cuadriláteros, tareas de reconocimiento y determinación de cuadriláteros.

Un posible camino para ampliar lo construido en el contexto del problema

Como se señaló, se podría avanzar y ampliar lo construido proponiendo un trabajo geométrico que abarque el estudio de cómo la manera en que quedan divididas las diagonales por el punto de intersección determina formas particulares en cada una de las cuatro clases sintetizadas. Una cuestión que de manera natural surge si se piensa en las figuras “conocidas” (rombo, trapecio isósceles, rectángulo, etc.) es en cuál de las cuatro clases está. Avanzar en esta dirección involucra inicialmente la exploración y formulación de las siguientes propiedades:

Si las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan formando segmentos proporcionales, entonces el cuadrilátero tiene un par de lados paralelos.

Recíprocamente, *Si un cuadrilátero convexo tiene un par de lados opuestos paralelos, entonces las diagonales se cortan formando segmentos proporcionales.*

La validación de tales propiedades requiere ampliar el repertorio de recursos geométricos del ciclo básico utilizados en el problema, e incorporar la semejanza de triángulos. Se tiene así una caracterización de los trapecios a partir de una propiedad de sus diagonales. Si se agrega la restricción que la razón en la que quedan divididos los segmentos es 1, entonces las diagonales se bisecan y en tal caso el cuadrilátero es un paralelogramo. Claramente por equivalencia lógica de un bicondicional, se tiene también una caracterización de los trapezoides, esto es, *un cuadrilátero es un trapezoide si y solo si sus diagonales se cortan sin formar segmentos proporcionales.*

El siguiente esquema (fig. 4) muestra una clasificación de los cuadriláteros que puede emerger a partir del trabajo geométrico propuesto. En la primera fila están las cuatro clases que emergieron en el problema, en la segunda están las ocho clases que surgen al considerar la forma en que se intersecan las diagonales (formando o no segmentos proporcionales), y en la tercera están los paralelogramos distinguidos en clases disjuntas y dos tipos de romboides.

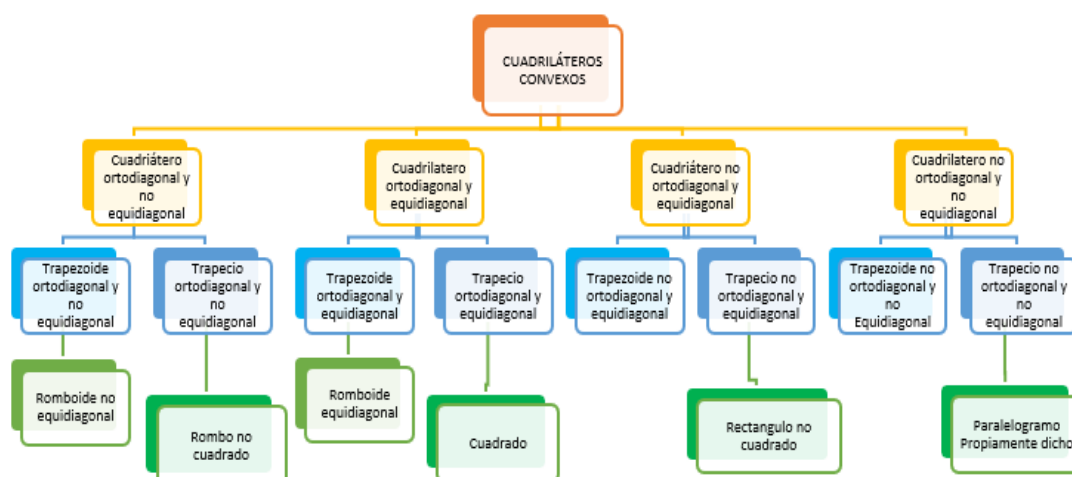


Figura 4: Clasificación que emerge en el contexto del problema

A la luz del MER se considera que avanzar y desarrollar un estudio en la dirección descrita permitiría:

- Ampliar lo construido en el contexto del problema y definir, mediante un proceso *constructivo*, nuevas clases –algunas de ellas no “prototípicas”– a partir del estudio de condiciones sobre las diagonales que las determinan.

- Establecer relaciones entre clases y examinar cómo se podría obtener una determinada forma a partir de otra modificando alguna de las condiciones que la determinan –estudio del *cambio de las formas* en la terminología de Gascón (2004)–.

- Disponer de *técnicas* de construcción de cuadriláteros y de determinación de cuadriláteros semejantes.

El siguiente ejemplo ilustra el último ítem. Si se quiere construir un cuadrilátero de la clase *trapezoide ortodiagonal y no equidiagonal* (fig. 5), la información que se requiere es: la medida de la diagonal mayor D (4 en fig. 5), de la menor d (3 en fig. 5) y las razones k_D y k_d entre los segmentos determinados en cada diagonal por el punto de intersección, $1/3$ y $1/2$ respectivamente. El cuadrilátero queda determinado con la información dada.

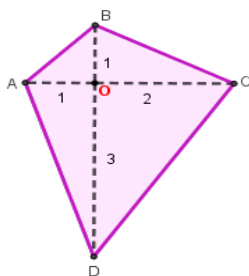


Figura 5: Trapezoide ortodiagonal y no equidiagonal

Si se quiere determinar la semejanza entre formas de dicha clase habría que considerar las respectivas razones k_D y k_d y la razón D/d entre las medidas de las diagonales –en el ejemplo considerado $d=0,75 D$ (fig 5)–.

Se plantea a continuación un tipo de tarea que ilustra cómo se podría desarrollar parte del trabajo geométrico antes descrito, para “ampliar” lo construido en el contexto del problema. El propósito de la misma es caracterizar las clases trapecio y trapezoides por sus diagonales, buscando, además, avanzar hacia la caracterización de los paralelogramos por sus diagonales.

Tarea Se dispone de una plancha de granito cuadrada de 1.20 metros de lado.

i) ¿Es posible construir un cantero con forma de trapecio en el cual ella esté inscrita? ¿Más de uno? ii) ¿Es posible inscribirla en algún cantero que tenga sus lados opuestos paralelos? ¿Puede ese cantero ser rectángulo? ¿Y rombo?

En cada caso, si es posible la construcción de un cantero, considera varillas con las medidas correspondientes y da instrucciones sobre cómo debieran cruzarse para construir los mismos. Si no es posible la construcción, explicar por qué.

Es una tarea de construcción –dar condiciones para que sea posible una construcción– que ilustra cómo se podría avanzar en la distinción de formas cuadrangulares en el contexto de lo construido en la consigna c) del problema de la paisajista. Por lo trabajado en esta consigna, se sabe que hay que tomar las varillas de igual medida –2,40 metros– y cruzarlas perpendicularmente por ser la plancha un cuadrado. Como se señaló, el trabajo en un entorno dinámico propicia que se visibilice que hay un universo de formas y, en particular, a partir de lo propuesto en la nueva tarea, que se explore qué condición sobre las diagonales determina que algunas de esas formas sean trapecios –y en particular trapecios isósceles–. Se podrían plantear tareas análogas en el contexto de las restantes consignas del problema de la paisajista abarcando los paralelogramos particulares involucrados – planchas de granito –, y ampliando en el proceso lo construido siguiendo la estrategia de obtener nuevas formas cuadrangulares y propiedades de las mismas agregando/ modificando condiciones sobre sus diagonales.

Siguiendo la estrategia propuesta en el problema, las “nuevas” clases de formas emergen vía un proceso *constructivo* a partir de la modificación sistemática de condiciones sobre las diagonales que las determinan, lo cual permite que se vayan estableciendo relaciones entre las clases que se van obteniendo. De esta manera, la

clasificación de cuadriláteros queda relacionada con el *estudio del cambio de forma de los cuadriláteros*, el cual surge para responder al problema de identificar clases de cuadriláteros -los canteros- en los cuales puede inscribirse por los puntos medios de sus lados una subclase de paralelogramo determinada -la plancha de granito-.

Consideraciones finales

Se considera que el estudio realizado aporta respuestas a la pregunta de la investigación, esencialmente en relación a rasgos distintivos que tendría que tener una OM en torno a la CCs que supere el tratamiento *monumentalista* que se propone habitualmente en la escuela. Además, el análisis realizado al problema y a lo propuesto para su ampliación, aportan también respuestas a dicha pregunta, dado que permite comprender cómo algunos de esos rasgos podrían sustentar una secuencia de enseñanza.

Siguiendo a Gascón (2004), si el estudio de un saber conduce o está relacionado con otras cuestiones que se estudian en la Escuela, entonces su abordaje en el aula estaría impregnado de *sentido*. Esta postura forma parte del MER, y el análisis del problema da cuenta cómo es posible articular la CCs con las cuestiones escolares construcción de figuras y semejanza de figuras, aportando *técnicas y tecnologías* para la construcción de cuadriláteros. También con el estudio del triángulo en la escuela, ya que el *trabajo técnico* que se despliega requiere imperiosamente de *técnicas, tecnologías y elementos teóricos* relativos a triángulos.

De manera general, se considera que el estudio desarrollado aporta criterios para analizar de manera crítica y reflexiva lo instituido en la escuela en torno a la clasificación de cuadriláteros, y para pensar en propuestas de enseñanza que den cuenta del *sentido* de este saber. A partir de esta postura, se está trabajando en el rediseño del problema con el objetivo de abordar en la FPM el *problema profesional ligado al sentido de los saberes geométricos*, en particular al *sentido* de la CCs. Se parte de la hipótesis que el ámbito de la FPM es un espacio pertinente para que el estudiante -futuro docente- construya una posición epistemológica y didáctica relativa al *sentido* de la enseñanza en el ámbito donde desempeñará su práctica profesional, la escuela secundaria. Se está finalizando la elaboración de las tareas constitutivas de la propuesta y se prevé su implementación en la asignatura Geome-

tría I del Profesorado en Matemática. Las tareas involucran el análisis matemático y didáctico del problema a la luz algunas posturas consideradas en el MER.

Bibliografía

- De Villiers, Micheal** (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.
- De Villiers, Micheal** (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- De Villiers, Micheal, Govender, Rajendran y Patterson, Nikita** (2009). Defining in Geometry. Understanding Geometry for Channing World (pp.189-203). NCTM.
- Elguero, Cecilia** (2020). Una experiencia en la formación continua de profesores en torno al estudio de la función de la demostración en Geometría [ponencia virtual]. *XLIII Reunión de Educación Matemática*. <https://virtuma2020.com.ar/>
- Gascón, Josep** (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. II: La clasificación de los cuadriláteros convexos *Suma*, 45, 41-5.2
- Mariotti, M. Alessandra y Fischbein, Efrain** (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- Rosso, Fabiana** (2005). *La clasificación de cuadriláteros. Razones de ser de su enseñanza*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Winicki Landman, Greisy** (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martinez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 19* (pp. 528-537). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

La exploración en los primeros acercamientos al trabajo algebraico: el papel de los ejemplos en la construcción de la generalización

MARINA ANDRÉS

marinaandres@yahoo.com.ar

VALERIA BORSANI

valeria.borsani@unipe.edu.ar

JUAN PABLO LUNA

juan.luna@unipe.edu.ar

ENRIQUE DI RICO

enrique.dirico@unipe.edu.ar

MARIANA MATOVICH

mariana.matovich@gmail.com

CARMEN SESSA

carmen.sessa@unipe.edu.ar

Universidad Pedagógica Nacional- UNIPE

VERÓNICA CAMBRIGLIA

vcambrig@campus.ungs.edu.ar

Universidad Nacional de General Sarmiento- UNGS

NICOLÁS IGOLNIKOV

nicolasigolnikov@hotmail.com

Universidad de Buenos Aires- UBA

Resumen

En esta comunicación identificamos y analizamos la complejidad que conlleva, para los estudiantes, acceder a la generalidad y expresarla en el proceso de apropiación con sentido de objetos, propiedades y formas de trabajo propias del álgebra.

En el marco de una investigación colaborativa, se elaboró y se puso en aula una propuesta en el contexto de la divisibilidad que vincula el trabajo aritmético previo de los estudiantes y las primeras prácticas algebraicas que queremos desplegar en el aula de la escuela secundaria. En esta comunicación analizamos situaciones de aula en las que los estudiantes se enfrentan a los primeros problemas que involucran expresiones alge-

braicas y nos centraremos en producciones y discusiones que involucran diferentes usos de los ejemplos en procesos de exploración que permiten arribar a la generalidad.

Palabras clave: transición aritmética-álgebra / proceso de generalización y ejemplos / situaciones de aula

Introducción

Las indagaciones de las que daremos cuenta en este trabajo se inscriben en una investigación colaborativa¹ de un grupo conformado por docentes de escuela secundaria y docentes investigadores universitarias. Este grupo viene trabajando desde 2008 en diferentes proyectos relativos al diseño y análisis de situaciones de enseñanza. En cada proyecto se elaboran propuestas para la escuela secundaria que se implementan en las aulas de algunos profesores del grupo, con la presencia de otros integrantes que registran de diferentes maneras lo que acontece en las clases. Los registros obtenidos se analizan, identificando episodios que permiten profundizar en la comprensión de diferentes asuntos didácticos anclados en cada contenido abordado. En función de este análisis, eventualmente, la propuesta se ajusta o reformula para que vuelva a ser estudiada en el aula, en un proceso iterativo.

Desde el 2017 el grupo está abocado al estudio de una entrada al álgebra en los primeros años de la escuela secundaria. En este marco, se diseñó y estudió un trayecto de enseñanza que permitiera un tejido entre las experiencias aritméticas de los estudiantes y las prácticas algebraicas en las que se les quiere involucrar.

En este trabajo, analizamos situaciones de aula² en las que los estudiantes se enfrentan a los primeros problemas que involucran expresiones algebraicas. En particular nos centraremos en producciones de estudiantes que contienen diferentes usos de los ejemplos en procesos de exploración que permiten arribar a la generalidad.

Algunos elementos teóricos que dan un marco de nuestro trabajo

Chevallard (1984), Vergnaud, Cortés y Favre-Artigue (1987), Sadovsky (2004) y Grugeon-Allys & Pilet (2017) han puesto en evidencia en sus investigaciones que el

1 Esta investigación se enmarca en proyectos de dos universidades: "Una entrada al álgebra en el contexto aritmético de la divisibilidad: estudio de las interacciones en el aula y diálogos entre docentes", Proyecto UNIFE 2022-2024 dirigido por Carmen Sessa, y "Emergentes colectivos de generalización en una entrada al álgebra pensada en un espacio de trabajo colaborativo." Proyecto UNGS 30/3329. dirigido por Verónica Cambriglia (2021- 2023).

2 Los ejemplos de aula corresponden, en gran parte, a la experiencia llevada adelante en la Escuela de Educación Secundaria N° 36 de Alte Brown, Provincia de Buenos Aires, cuya docente es Cecilia Pineda, integrante del grupo. Agradecemos la participación de Cecilia quien, además de ofrecer su aula como objeto de estudio, participó de las discusiones finales sobre las temáticas de esta comunicación.

pensamiento algebraico se construye con apoyo en el *pensamiento aritmético* y, al mismo tiempo, con importantes marcas de rupturas con él.

Squalli (2015) propone una caracterización del pensamiento algebraico sobre el cual señala que puede ser movilizado sin hacer uso del lenguaje simbólico algebraico. Un aspecto que considera para esta caracterización –y tuvimos en cuenta para nuestra propuesta– es “tener una visión estructural (ver, por ejemplo, una expresión numérica como un objeto en sí y no únicamente como una cadena de cálculo)” (Squalli 2015, p. 347; la traducción es nuestra).

Chevallard (1984) señala que mientras la *aritmética práctica* utiliza el lenguaje numérico por su poder designativo, la *aritmética algebraica*, por el contrario, aprovecha el valor mostrativo de las escrituras, lo cual constituye la característica esencial del lenguaje algebraico. Sus investigaciones fueron fundantes para el desarrollo de la didáctica del álgebra. En Borsani, Luna y Sessa (2021), se retoman estas ideas y se estudia el valor mostrativo de las escrituras, cuando se discuten en un aula actividades sobre expresiones numéricas de nuestra propuesta.

En su ya clásico texto, Arcavi (1994) enuncia diferentes *conductas* que considera que es necesario adquirir para lograr tener un sentido de los símbolos. En particular, retenemos para nuestro trabajo la idea potente de que se puede *leer* información de una expresión algebraica, antes de *manipularla* y también que se puede manipular para leer nueva información.

Las ideas que hemos referenciado en los párrafos anteriores dieron fundamento a la propuesta didáctica elaborada por el grupo y al mismo tiempo son herramientas conceptuales que enmarcan el análisis de las producciones en el aula.

Consideramos también las conceptualizaciones de Mason (1996) en torno a la generalización como actividad central en la producción matemática escolar, y en este contexto el autor distingue entre *ejemplo* y *particular*: la característica de un ejemplo es la expresión de una determinada generalidad para un sujeto dado, mientras que el particular no posee una característica general que el sujeto está considerando.

Sobre nuestra propuesta didáctica

Nuestro grupo diseñó un trayecto de enseñanza para la escuela secundaria en el contexto de la divisibilidad, con el objetivo de que las expresiones algebraicas sean

los primeros objetos algebraicos con los cuales se encuentren los estudiantes, en coincidencia con la prescripción de los diseños curriculares de varias jurisdicciones de nuestro país. Al inicio de la secuencia de problemas se propone que los estudiantes trabajen con expresiones numéricas horizontales y la cuestión que articula estas actividades es decidir si el número dado a través de esas expresiones es múltiplo de otro. En la segunda parte se incluyen expresiones algebraicas y la tarea es estudiar los valores de la variable para que cada expresión resulte divisible por un número dado.³

Por ejemplo, en una de las primeras actividades se propone decidir si $4 \cdot 7 + 62$ es múltiplo de 4, sin hallar el resultado. Se espera que, con el sostén de la docente, los estudiantes pongan en juego la propiedad: al sumar un múltiplo de 4 con un no múltiplo de 4, el resultado es un no múltiplo de 4. Es preciso también que lean (en el sentido de Arcavi, 1994) que el sumando $4 \cdot 7$ es múltiplo de 4. En relación con el número 62 podrían apelar a una descomposición como $40 + 20 + 2$, para concluir que no es múltiplo de 4. La restricción sobre la posibilidad de hacer la cuenta hace necesario el despliegue de estrategias de lectura y/o de transformación de la expresión numérica, y la puesta en juego de propiedades aritméticas que se van elaborando (o reelaborando) a lo largo de la secuencia.

Otras actividades promueven el desarrollo de estrategias que incorporan transformaciones, de manera que la expresión equivalente obtenida permita leer nueva información. Por ejemplo, para estudiar si los números dados por las expresiones $17 + 17 + 17$, o $4 \times 11008 + 11008 + 7 \times 11008$, son múltiplos de 3, es posible transformarlas en 3×17 o 12×11008 recuperando el sentido de la multiplicación como suma reiterada.

Al comienzo de la segunda parte, se trabaja con expresiones algebraicas y se pide reemplazar la variable por algunos números dados para decidir si la expresión numérica resultante, es o no múltiplo de un cierto número. Inicialmente, muchos alumnos recurren al número que se obtiene como resultado del reemplazo para decidir por la divisibilidad pedida y la intención de la acción docente es que se recuperen las prácticas de lectura de información de la expresión numérica, desplegadas en la primera parte. En lo que sigue nos interesa nombrar de manera diferente a estas dos representaciones que pueden resultar del reemplazo de la variable por un

3 Para más detalles de la propuesta se sugiere leer Grupo Lunes (2022) y una versión de la secuencia completa que se encuentra en https://drive.google.com/file/d/1yd_cEAA9gCSURrgZ3cPd_C3e3kZyIffB/view

número en una expresión algebraica: con el término de *especialización* nos referiremos a la expresión numérica que resulta de haber reemplazado la variable por un número guardando la traza de las operaciones; y con *evaluación*, al número que se obtiene al resolver las operaciones involucradas. Nos resulta necesario distinguir estas dos representaciones a los efectos de poder interpretar el trabajo de los estudiantes.

Más adelante, a partir de una expresión algebraica, son los estudiantes quienes deben buscar valores de la variable para lograr que el número representado por la expresión especializada cumpla una cierta condición de divisibilidad. Por ejemplo, en un problema se pide encontrar, cuando sea posible, tres valores de la variable c para los cuales $3.c + 12.15$ resulte múltiplo de 12, y tres valores de c para que no lo sea.

En problemas posteriores se busca que los estudiantes abandonen progresivamente la tarea de reemplazar la variable por valores numéricos (ya sea evaluando o especializando) y elaboren argumentos sobre la expresión algebraica en estudio. Apuntamos a que los estudiantes se posicionen en el ámbito de la generalidad y conciban la expresión como la representación de una familia de números. Por ejemplo, avanzada la secuencia se pide estudiar, en cada caso, los valores de n para los cuales

- a) $5n + 15 + n$ es múltiplo de 5
- b) $5n + 15 + n$ es múltiplo de 6

Para el ítem a), los estudiantes deberán leer que la suma de los dos primeros términos resultará múltiplo de 5 para cualquier valor de n y que alcanza entonces con analizar el último sumando. Para el ítem b), se espera que transformen la expresión en otra equivalente, $6n + 15$, para concluir que no se obtendrá un múltiplo de 6 para ningún valor de la variable n .

A lo largo de toda la secuencia se va aprendiendo una conducta propia del trabajo algebraico: leer información de una expresión, eventualmente luego de transformarla, y elegir qué transformación hacer con un propósito (Arcavi, 1994).

En este trabajo nos interesa detenernos en las producciones –y en las interacciones en el aula que tienen lugar a propósito de ellas– cuando los estudiantes enfrentan un problema en el que deben elegir valores de la variable. Analicemos brevemente el problema, cuyo enunciado es el siguiente:

PROBLEMA

- a.** Si es posible, encontrá tres valores de la variable x para los cuales $14 \cdot x + 7$ sea múltiplo de 7, y tres valores de x para que no lo sea. Explicá tus respuestas.
- b.** Si es posible, encontrá tres valores de la variable x para los cuales $14 \cdot x + 8$ sea múltiplo de 7, y tres valores de x para que no lo sea. Explicá tus respuestas.

Una particularidad de este problema es que la producción de una respuesta involucra necesariamente la presencia –quizás implícita– de cuantificadores, lo que comporta una marca importante de ruptura entre el trabajo aritmético y el algebraico.

En ambos ítems se pide hallar valores particulares de la variable para que el número que se obtiene al reemplazar en la expresión algebraica cumpla cierta condición (que sea o no múltiplo de 7). Nuestra intención es que les estudiantes, apoyados en los diferentes reemplazos que realicen, puedan producir argumentos de carácter general que involucren el uso de cuantificadores.

Las expresiones algebraicas propuestas difieren solamente en su término independiente y según cuál sea su valor las expresiones evaluadas serán múltiplos de 7 para todo valor de la variable o para ningún valor de la variable. La intención del problema, al solicitar que se encuentren varios valores, es que les estudiantes exploren y conjeturen acerca de la posibilidad o imposibilidad de dar respuesta. Consideramos que la imposibilidad de cumplir parte de la consigna permite movilizar la producción de argumentos de carácter general.

En lo que resta del trabajo nos detendremos en producciones de estudiantes y en las interacciones que se producen en el aula de la docente Cecilia al resolver el ítem a) del problema. Por esta razón, a continuación, centraremos nuestro análisis en ese ítem.

Anticipábamos que, para cualquier valor que propusieran, les estudiantes podrían leer que la expresión numérica resultante es múltiplo de 7, lo cual les permitiría responder la primera parte de la consigna. Para realizar esta lectura, podrían poner en juego estrategias construidas en las primeras actividades, al interactuar con expresiones numéricas.

Por otro lado, suponíamos que algunos estudiantes, a la hora de encontrar tres valores para que la expresión evaluada resulte múltiplo de 7, elegirían valores de x que son múltiplos de 7, fusionando de algún modo la condición pedida sobre la ex-

presión con la condición sobre la variable. La pregunta por tres valores para los cuales la expresión no sea múltiplo de 7 abriría la posibilidad de discutir en el aula que no es necesario considerar valores de la variable que sean múltiplos de 7 para lograr que la expresión numérica lo sea. Se esperaba concluir colectivamente que “para todo valor de la variable la expresión resulta múltiplo de 7”.

A continuación, nos detendremos en la intimidad de un proceso de producción en el aula referido a la construcción de una generalización y su relación con los números particulares y los ejemplos (en el sentido de Mason, 1996).

El uso de ejemplos en la construcción de la generalización en el aula

Entendemos que hay diferentes maneras en que los estudiantes pueden poner en vínculo el trabajo con particulares y la construcción de una generalidad. Consideramos que, para que los particulares se constituyan en ejemplos, será necesario que produzcan argumentos que tengan en cuenta determinadas relaciones y propiedades de la familia de la cual son elegidos esos particulares. Identificamos, en los hechos del aula, algunas posibles formas en que este vínculo puede tener lugar y elegimos la producción del alumno R (ver Figur 1) para desarrollar nuestro análisis.

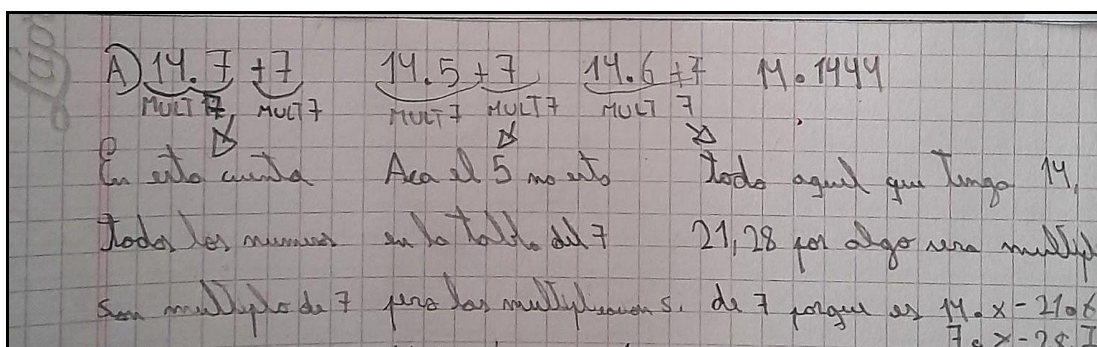


Figura 1: Producción del alumno R al resolver el problema

Pondremos el foco en la elección que hace R de los valores de x , en su manera de argumentar en cada reemplazo, y en la relación entre la lectura que realiza de la expresión en cada uno y la generalización a la que arriba. Proponemos un análisis sucesivo de cada reemplazo, de izquierda a derecha, considerando los números que elige en cada uno. Interpretamos, apoyados en estas elecciones y en el orden en que

las escribe, un cambio en la elección de los números que es solidaria con una cierta progresión de los argumentos.

En el primero, el valor de x elegido es 7. El texto que escribe R es “en esta cuenta todos los números son múltiplos de 7” y, además, apela a la utilización de unos arcos por debajo de cada número, y a la escritura “Mult. 7” para mostrarlo. Interpretamos que lo que intenta comunicar R es que la expresión numérica es múltiplo de 7 porque cada número involucrado lo es.

En el segundo reemplazo, bajo un solo arco que abarca la expresión 14.5, escribe “el 5 no está en la tabla del 7, pero la multiplicación sí”. Entendemos que apela implícitamente a la propiedad: en una multiplicación, si uno de los factores es múltiplo de un número dado, el producto también lo es. La aclaración de que el 5 no está en la tabla del 7 no es necesaria para sostener dicho argumento; no obstante, R enfatiza la cualidad de este número de no ser múltiplo de 7, ubicándolo como un representante de los números de esa categoría. En este sentido, el número 5 adquiere para el estudiante el carácter de ejemplo y no de un mero particular. Alojamos la posibilidad de que, en el reemplazo anterior, R haya considerado al 7 como un ejemplo de los múltiplos de 7.

En el tercer reemplazo, interpretamos que el 6 es un ejemplo de un número cualquiera, dado que no menciona ninguna característica de ese número. En lo que escribe, el 6 no aparece mencionado, sino en su lugar la palabra “algo”⁴. Advertimos que al utilizar la palabra “algo” en su explicación se posiciona desde una perspectiva general y estudia la condición de “ser múltiplo de 7” sobre la expresión algebraica $14 \cdot x + 7$, trascendiendo el análisis de las distintas expresiones especializadas.

Además, al escribir la frase “todo aquel que tenga 14, 21, 28 por algo será múltiplo de 7 (...)” el alumno se posiciona de manera general respecto del primer término. Las expresiones coloquiales “todo aquel” y “algo” son versiones personales de R para enunciar generalidades diferentes. Una reformulación posible de lo enunciado por el estudiante es: toda multiplicación entre un múltiplo de 7 (“todo aquel que tenga 14, 21 y 28”) y cualquier otro número (“por algo”) da como resultado un múltiplo de 7.

4 El uso de la palabra “algo” fue frecuente en el aula de la docente Cecilia. En ocasiones anteriores, algunas propiedades fueron enunciadas utilizando esa palabra; por ejemplo, “ $7 \times \text{algo}$ es múltiplo de 7”.

Notemos que R define la familia de los múltiplos de 7, recurriendo a la enumeración de 4 ejemplos y en el final de la frase incluye la escritura de cuatro expresiones algebraicas, a modo de justificación de la propiedad que enunció antes.

En relación con el último valor que propone el estudiante, $x = 1444$, resaltamos que no lo acompaña de otras marcas que permitan precisar el sentido de ese reemplazo. Sin embargo, en el espacio de discusión colectiva, R hace mención a este valor. Nos interesa analizar a continuación los intercambios que tuvieron lugar en clase con el objetivo de comprender la intención con la que lo elige. En función de ese análisis, conjeturamos que este reemplazo es posterior a los otros tres que ya mencionamos.

En el espacio de discusión colectiva a propósito de la primera parte del ítem a), una estudiante propone $x=5$ como posible valor a reemplazar. La docente aborda un análisis entre todos de la expresión numérica $14.5 + 7$. El argumento al que se arriba puede expresarse como sigue: como 14 es 7.2, el número 14.5 es múltiplo de 7, ya que es $7 \cdot (2.5)$, y luego la expresión $14.5 + 7$ es múltiplo de 7 porque es suma de múltiplos de 7. Este argumento se elabora sin considerar ninguna característica del número 5, por lo que podría resignificarse como un argumento general. Con la intención de hacer visible la generalidad del argumento, la docente pregunta por otro valor para reemplazar en la expresión de manera que el resultado sea múltiplo de 7. Otros estudiantes proponen valores (7, 14, 4 entre otros) y entonces R menciona el valor 1444. Esta intervención genera un momento de revuelo en el aula, y habilita a otro estudiante a proponer el valor 1.000.000. Ante esto, otra estudiante pregunta por qué eligieron un número tan grande y R contesta: “para que se den cuenta de que pueden poner cualquier número”. La pregunta de la estudiante hace posible que R explicité una intencionalidad del valor numérico elegido para reemplazar, que interpretamos asociada a que el número 1444 no puede ser rápidamente ubicado en la categoría de múltiplo o no múltiplo de 7 y, en ese sentido, es un ejemplo de un número natural cualquiera.

La producción de R y las discusiones en el aula dan cuenta de un trabajo que trasciende la tarea de producción de tres valores de la variable pedidos y se encuadra en un proceso de generalización. Distinguimos dos diferentes usos de ejemplos y de particulares que se dieron en el aula para la construcción de argumentos generales:

- Por un lado, entendemos que R en su escrito construye un argumento general a partir de reemplazar primero por un múltiplo de 7 (elige el número 7) y luego por un no múltiplo de 7 (elige el número 5). Esta *exploración*⁵ apoyada en ejemplos –que como mencionamos anteriormente, no revisten el carácter de números particulares (Mason, op.cit.)– le permite sostener (usando el número 6) que la expresión evaluada será múltiplo de 7 para cualquier valor de la variable. Es una de las posibles maneras en que se puede construir un argumento para validar que una cierta propiedad se cumple para todo valor de una variable en un conjunto A: considerar diferentes subconjuntos cuya unión sea A, y estudiar la validez en cada uno a partir del uso de *ejemplos genéricos* (en el sentido de Balacheff, 1987).
- Por otro lado, a partir del valor 1444 que propone R, tiene lugar en el aula otra manera de argumentar. En un primer momento sus compañeros podrían considerarlo como un particular más. Sin embargo, la explicación de R “para que se den cuenta de que pueden poner cualquier número” podría dar lugar a un cambio de posición de ellos a partir de entender que el argumento que valida que 1444 es una respuesta posible, no depende de ninguna característica específica del número y sí de las particularidades de los números y operaciones que lo acompañan. De este modo, el argumento reviste un carácter general. Vemos esta manera de tomar el particular para construir una idea general cercana a lo que Mason (1996) llama *mirar a través*: como un gesto del sujeto que le permite, a partir de un particular, trascenderlo “como una ventana para mirar a través de ella” (p. 69).

Hasta aquí hemos reflexionado en torno a la relación entre particulares, ejemplos y generalización a partir del análisis de lo acontecido en un aula cuando los estudiantes se enfrentan a la tarea de encontrar tres valores de x para que se cumpla una determinada condición sobre una expresión algebraica, que en realidad se cumple para todos los valores de x . Los hechos que hemos analizado nos llevan a

⁵ Llamaremos exploración a un proceso situado y cognitivamente exigente, por el cual los estudiantes buscan esclarecer el comportamiento o las características de una situación dada, mediante acciones y determinaciones que incluyan el uso de particulares y/o ejemplos.

extender nuestras reflexiones y caracterizar cuatro maneras en que se podría vincular el tratamiento de particulares y ejemplos con la construcción y validación de una generalización, en el contexto de la resolución de una determinada tarea:

- Elegir y analizar particulares en función de resolver una tarea, sin intención de extraer del análisis de cada uno conjeturas que guíen la búsqueda de otros. Cada particular es en sí mismo un todo que en principio no tiene relación con los demás y no hay un proyecto de generalización detrás de estas elecciones.

- Explorar el problema a partir de una colección de particulares, en busca de regularidades y de la formulación de conjeturas que los pongan en vínculo con una determinada generalización. Llamaremos a esta forma de hacer con el nombre de *exploración pragmática*. Sadovsky (2005) estudia una situación para el aula en la que la organización tabular de casos particulares permitiría arribar a una conjetura en torno a los posibles restos en la división por 3 de los números de la forma $5k + 22$ con k natural.

Llevar adelante una exploración pragmática –elegir con algún criterio determinados particulares y posiblemente organizados de algún modo– permitiría arribar a la formulación de generalizaciones. La validación de estas afirmaciones podría requerir de conocimientos y técnicas distintos de los puestos en juego para el análisis de los particulares y para la formulación de la conjetura. Por ejemplo, la validación de la conjetura que se menciona en Sadovsky (op.cit), puede realizarse gracias a sustituciones en la expresión algebraica, muy distante de las herramientas numéricas requeridas para arribar a las conjeturas.

- Argumentar la validez de una conjetura a partir de determinados particulares que tienen el estatus de ejemplos. En esta manera de hacer, que nombraremos *exploración intelectual*⁶, se dispone de una conjetura de carácter general a la que se puede haber arribado de diferentes maneras: a partir de la puesta en acto de conocimientos correctos o incorrectos, a partir de una exploración pragmática, a partir de un aporte de conocimiento –voluntario o no– por parte de le docente, entre otras. El análisis de la validez de la conjetura, a partir de particulares elegidos de una determinada familia, es acompañado por argumentos que se apoyan en condi-

6 Balacheff (1987) en el contexto del desarrollo de constructos teóricos para el estudio de procesos de prueba, acuña la noción de *Prueba pragmática* y *Prueba intelectual*. El uso de los adjetivos para distinguir diferentes maneras de realizar una prueba nos sirvió de inspiración para nombrar estas dos posibles maneras en que, a propósito de la construcción de un argumento general, los estudiantes pueden llevar adelante un proceso de exploración: para ver qué pasa (exploración pragmática) o para ver que algo pasa y por qué (exploración intelectual).

ciones que la caracterizan, lo que habilita a ser considerados como ejemplos de esa familia.

-. Producir un argumento general que no dependa de la apoyatura en particulares o ejemplos. En el campo de la aritmética, un cierto dominio del sentido algebraico puede ser una apoyatura para establecer y validar una afirmación sobre los números y las operaciones, sin pasar por la exploración en casos particulares.

Considerar los cuatro modos de articular particulares, ejemplos y generalizaciones enunciados previamente –que no pretenden ser exhaustivos– puede ser valioso para comprender las acciones de los estudiantes, anticipando que, en su proceder, convivan varios de estos modos.

Reflexiones finales

A lo largo de este artículo, consideramos producciones en un aula – particularmente, del estudiante R– como punto de partida para elaborar cuatro categorías que permitan describir diferentes maneras en que el tratamiento de particulares y ejemplos pueden vincularse con el proceso de construcción de argumentos y/o conjeturas de carácter general en un aula. Estas categorías pueden engrosar la trama de relaciones y conocimientos de docentes interesados en comprender las producciones de sus estudiantes y gestionar las interacciones en una clase en que estas variadas formas de tratar lo general tienen lugar. No obstante, y como intentaremos mostrar a partir de la producción de R, la funcionalidad de estas categorías no está dada por la posibilidad de clasificar a los estudiantes según sus producciones.

Es posible ubicar la producción de R a propósito de sus reemplazos sucesivos en lo que hemos denominado exploración pragmática, suponiendo que a partir de explorar unos ejemplos elegidos según criterios apropiados (primero, el de pertenecer a la categoría de múltiplos de 7 y luego, de no múltiplos) el estudiante logra producir una conjetura general sobre la expresión $14 \cdot x + 7$ que expresa en su último reemplazo. Sin embargo, también es posible que, en vez de ser una conclusión obtenida a partir de la exploración, sea una conjetura que el estudiante tuviera antes de comenzar a argumentar, y que haya podido validar a partir de la exploración con ejemplos. En este último caso, ubicaríamos al trabajo del estudiante en lo que llamamos una exploración intelectual. Y aún más, es posible que ni la conjetura haya

sido totalmente producida a partir de su exploración pragmática, ni que dicha exploración estuviera totalmente comandada por la conjetura, sino que fueran procesos imbricados en la compleja trama de la producción de conocimiento del estudiante, para quien conjeturar y explorar sean procesos en diálogo.

Bibliografía

- Arcavi, Abraham** (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Balacheff, Nicolas** (1987). Procesos de Prueba y situaciones de validación. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Borsani, Valeria; Luna, Juan Pablo y Sessa, Carmen** (2021). El valor mostrativo de las expresiones numéricas: tensiones entre las escrituras de los estudiantes y las que ofrece el docente. *Revista EFI- DGES*. Min. de Educación (Prov. de Córdoba), 7(12), 29-47. <http://dges-cba.edu.ar/wp/index.php/revista-efi/>
- Chevallard, Yves** (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Grugeon-Allys, Brigitte y Pilet, Julia** (2017). Quelles connaissances et raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130.
- Grupo Lunes** (2022). Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética. *Revista Urania*. 12, 8-20. <https://drive.google.com/file/d/11IZKDOR9tKsLb6cJNm8Y9tAU1GvlyfKB/view>
- Mason, John** (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.
- Sadovsky, Patricia** (2004). *Condiciones Didácticas para un Estudio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas* [Tesis Doctoral]. Universidad de Buenos Aires-Facultad de Filosofía y Letras.
- Sadovsky, Patricia** (2005). *Enseñar Matemática Hoy Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal.
- Vergnaud, Gérard; Cortes, Anibal et Favre-Artigue, Pierre** (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-288). La Pensée Sauvage.

Squalli, Hassane (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. En L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage –Actes du colloque EMF2015– GT3* (pp. 346-356). Alger.

Pensamiento deductivo y contenido matemático en la escuela secundaria

MARCELA FALSETTI

mfalse@campus.ungs.edu.ar

MARISA ÁLVAREZ

malvarez@campus.ungs.edu.ar

MATÍAS MAIDANA

mmaidana@campus.ungs.edu.ar

MIGUEL RODRÍGUEZ

marodriguez@campus.ungs.edu.ar

Universidad Nacional de General Sarmiento - UNGS

Resumen

Se presentan avances de una investigación que trata sobre el aprendizaje del razonamiento deductivo en el ciclo superior de la escuela secundaria, desde una perspectiva contextual y situacional en matemáticas. La metodología es exploratoria, de tipo interpretativo-descriptiva, con análisis de producciones de estudiantes de clases en las que se implementó un recurso didáctico tecnológico. Mostramos aquí cómo algunos principios y resultados de psicología cognitiva de la Teoría de Modelos Mentales orientaron el diseño del recurso y el análisis de las producciones de estudiantes en una situación de justificación del valor de verdad.

Palabras clave: razonamiento deductivo / teoría de modelos mentales / matemática de escuela secundaria

Introducción

El tema de nuestro estudio es el aprendizaje del razonamiento deductivo en las clases de matemática. Razonar deductivamente es un proceso mental que vincula información expresada en frases (premisas), referidas a conceptos, conectadas o afectadas por conectores lógico-lingüísticos (si...entonces, o, y, no), y da lugar a una conclusión que explicita algo introducido en las premisas. El razonamiento deductivo garantiza que siempre que las premisas sean verdaderas la conclusión también lo es. La importancia del razonar deductivamente radica en el hallazgo de la conclusión, así como en la organización de la información, la validación del conocimiento no experimental y en los indicios que la conclusión brinda para la acción y la decisión.

El razonamiento lógico, y en particular el deductivo, es fundamental en el quehacer matemático para estructurar el conocimiento, mejorar procesos de pensamiento, para no reducir la acción a ensayos de prueba y error o al “aplicacionismo” sin razón de ser, para validar las nuevas construcciones teóricas y para la demostración matemática. No obstante, la práctica deductiva no es fácil y, en términos didácticos, una cuestión abierta es “cómo hacer que estudiantes con relativa poca experiencia en razonamiento lógico puedan aprender a razonar lógicamente en varias situaciones y reconocer falacias” tal como lo plantean Bronkhorst, Roorda, Suhre y Goedhart (2021, p.379). Al proponernos realizar una contribución didáctica para la enseñanza de cómo razonar deductivamente en Matemática, no podemos desconocer que los individuos en su cotidianidad utilizan el razonamiento informal y que ese es entonces uno de los puntos de partida. El razonamiento informal se caracteriza por expresarse en lenguaje coloquial, utilizar esquemas implícitos de pensamiento, arribar a conclusiones agregando información no contenida en las premisas. Es dependiente del contexto y está influido por el lenguaje y los significados que se asignan al contenido de dichas premisas (Bronkhorst *et al.*, 2021). También hay que tener en cuenta que al contenido matemático se accede mediante registros semióticos (Duval, 2006) y es necesario comprender el modo en que tales registros funcionan y los significados que se construyen a partir de ellos. Por estas condiciones iniciales adoptamos una perspectiva teórica que considera la deducción como un proceso semántico de asignación de significados tanto a la información presentada mediante diferentes registros semióticos (verbal, matemáti-

co-simbólico, gráfico, de visualización), como a los esquemas lógico-lingüísticos de las oraciones compuestas vinculadas por conectores lógicos. Esta perspectiva encuentra soporte en la Teoría de Modelos Mentales (TMM) que sostiene que los individuos deducen manipulando modelos mentales que son representaciones icónicas, de acción o proposicionales, basadas en la percepción y la analogía, de aquello que el sujeto capta transversalmente en una amplia cantidad de casos (Johnson-Laird, 2006).

Creemos que debemos pensar en una acción didáctica específica para la enseñanza del razonamiento deductivo que en forma comprensiva y junto con el contenido matemático, oriente al estudiante para distinguir cuándo y por qué una proposición es verdadera o falsa, en especial las proposiciones compuestas mediante conectores lógico-lingüísticos, lo oriente a inferir, a reconocer contradicciones y construir contraejemplos.

En suma, abordamos el *problema del aprendizaje del razonamiento deductivo, desde una perspectiva contextual y situacional, con el contenido matemático, en la escuela secundaria superior*. La perspectiva contextual está dada por el conjunto de: definiciones, propiedades que relacionan los objetos matemáticos, consignas de los problemas y de ejercicios, procedimientos explicados, enseñados por el profesor o materiales de estudio que circulan en la clase. En esta perspectiva son fundamentales el lenguaje, el sistema de representación de los objetos matemáticos y el tratamiento de lo matemático. La perspectiva situacional está dada por el tipo de tarea y la situación que la misma plantea: juego, respuesta de elección múltiple, resolución de problemas, tarea de justificación, toma de decisión, debate, demostración matemática, etc.

Esta investigación se inició en el año 2021, bajo la ASPO-DISPO por COVID del 2020 y 2021 que imprimieron nuevas maneras de intercambio, de aprovechamiento de los recursos en línea y dieron una envión para mayor incorporación de estos recursos. Por eso es que para avanzar en la investigación propusimos un recurso didáctico digital que describimos en la sección Diseño y desarrollo del material didáctico.

Consideramos que uno de los aportes de nuestro trabajo es integrar aspectos de una teoría de la psicología cognitiva, como lo es la TMM, a la didáctica de la Matemática. En esta dirección encontramos algunos antecedentes (Otero y Banks-Leite, 2006; Stylianides y Stylianides, 2009). Llevamos a cabo una investigación explora-

toria con metodología cualitativa. Mostramos aquí cómo algunos principios y resultados de psicología cognitiva de la Teoría de Modelos Mentales orientaron el diseño del recurso y el análisis de las producciones de estudiantes en una situación de justificación del valor de verdad.

Marco Teórico

La Teoría de Modelos Mentales sostiene que deducir es un proceso semántico por el que se manipulan mentalmente modelos del contenido de las premisas, se formulan débiles conclusiones a partir de ellas y se chequean su validez asegurándose que no hay otro modelo alternativo que lo refute (Johnson-Laird, Byrne y Shaeken, 1992; Johnson-Laird, 2001). Un modelo mental representa una posibilidad y su estructura y contenido captura lo que es común a las diferentes maneras en las que dicha posibilidad puede ocurrir, es transversal a varias representaciones como las verbales, figurales, esquemáticas, gestuales y se construye mediante la percepción, analogía, imaginación. Según la TMM, en la deducción, asumiendo la veracidad de las premisas, la conclusión es posible si está sostenida en por lo menos uno de los modelos de las premisas y es necesariamente válida si es sostenida en todos los modelos de ocurrencia de las premisas (Johnson-Laird y Byrne, 2002).

En base a estudios experimentales, la TMM sostiene principios que explican la racionalidad humana según lo describen Johnson-Laird y Byrne (2002), por ejemplo:

- *Principio de verdad.* Sostiene que las personas minimizan la memoria de trabajo a corto plazo tendiendo a construir modelos mentales simples que representan explícitamente lo que es verdadero y no lo que es falso.

Esto sugiere que el individuo razona en función de las posibilidades de ocurrencia de lo declarado en las premisas y no en función de su valor de verdad. Se explica así que cuando se decide, por ejemplo, la validez de una implicación, no es común pensar en términos de un antecedente falso, como sí sucede en las tablas de verdad.

En nuestra investigación prestamos especial atención a la implicación, dado que en general las propiedades matemáticas se enuncian de manera condicional (con hipótesis y tesis) y a partir de ellas se razona inferencialmente (modus ponens,

modus tollens). Para el razonamiento con condicionales la TMM tiene los siguientes principios (Johnson-Laird y Byrne, 2002):

- *Principio del significado central o nuclear (core meaning) para la oración condicional.* En el caso de una implicación, el antecedente p de un condicional básico del tipo *si p entonces q* describe una posibilidad, al menos en parte, y el consecuente ocurre en esa posibilidad.
- *Principio de modelo implícito para la oración condicional.* “Los condicionales básicos tienen modelos mentales que representan las posibilidades en las que sus antecedentes y sus consecuentes se satisfacen y sólo modelos implícitos en los que sus antecedentes no se satisfacen. Una “nota agregada o de atención”, de tipo mental, sobre el modelo implícito puede ser usada para llegar al modelo explícito completo, pero los individuos son proclives a olvidar esas notas mentales e incluso a olvidar el modelo implícito en las aseveraciones compuestas complejas.” (Johnson-Laird y Byrne, 2002, pg. 654). (Traducción de los autores)¹.

Según la TMM, el principio de modelo implícito de $p \rightarrow q$, conduce a tratar a las sentencias condicionales como conjunciones en las que ocurren p y q , pues no se hace explícito, o se omite, la posibilidad en la que pueda no ocurrir p .

- *Principio de modulación semántica y Principio de modulación pragmática.* Establecen que los significados de los términos en el antecedente y en el consecuente, el uso de enlaces co referenciales entre ellos, como los pronombres, por ejemplo, el conocimiento general, el conocimiento del contexto, los modos de hacer, pueden “modular” (alterar, afectar) los modelos de un condicional, pueden ayudar, o entorpecer, la construcción de los modelos.

Según la TMM el razonamiento deductivo se lleva a cabo por un proceso semántico que comprende las siguientes etapas:

1) *Interpretación y representación inicial de las premisas.* Los sujetos usan su conocimiento del lenguaje y del mundo para entender las premisas. Ello se lleva a

1 The principle of implicit models: Basic conditionals have mental models representing the possibilities in which their antecedents are satisfied, but only implicit mental models for the possibilities in which their antecedents are not satisfied. A mental footnote on the implicit model can be used to make fully explicit models [...], but individuals are liable to forget the footnote [...] and even to forget the implicit model itself for complex compound assertions.

cabo mediante la construcción de modelos mentales, los cuales, en su estructura, recogen el estado de cosas que describen las premisas.

2) *Combinación de las interpretaciones en un modelo simple.* Una vez construido el modelo de la primera premisa, los sujetos construyen el modelo de la segunda premisa y lo integran al de la primera.

3) *Formulación de una conclusión informativa.* En esta etapa los sujetos obtienen una conclusión inicial, transitoria y simple, la cual no expresa lo mismo que está explicitado en las premisas.

4) *Búsqueda de un modelo alternativo.* La veracidad de la conclusión inicial transitoria obtenida en el proceso anterior depende de encontrar, o no, modelos alternativos que la refuten. En esta etapa los sujetos buscan modelos alternativos, consistentes con las premisas, que hagan falsa la conclusión obtenida; en caso de encontrarlo, volverían a alguna etapa anterior y reiniciarían el proceso.

Una situación posible consistente con las premisas e inconsistente con la conclusión es un contraejemplo. Cuando los individuos encuentran un contraejemplo saben que la conclusión no es necesariamente derivada de las premisas (Johnson-Laird y Hasson, 2003) y así el “razonador novel” puede entender que el razonamiento no es válido en general, independientemente del contenido tratado en las afirmaciones, dado que, por la existencia del contraejemplo, no es cierto que siempre que las premisas sean verdaderas, la conclusión también lo es.

Metodología de trabajo

La investigación comenzó con una entrevista a profesores de cuatro escuelas del conurbano bonaerense que accedieron a llevar a cabo la propuesta en las aulas. Se acordó un tema que fuera transversal en la escolaridad secundaria: función cuadrática. Se revisaron las programaciones de aula para que el material a diseñar no resultara disruptivo y pudiera complementar la propuesta del profesor. Se programaron las actividades y se redactaron las consignas en el material didáctico. Se realizó una prueba piloto y se hicieron ajustes al material. Luego se implementó el material en clases de quinto año previo consentimiento de los profesores e incorporación de sus sugerencias. Cada experiencia duró entre cuatro a seis clases de dos horas. Se hicieron observaciones participantes, se recogieron escritos de los estudiantes, se

hicieron grabaciones en audio y se recogieron respuestas de los estudiantes mediante formularios en línea. Se procedió luego al análisis de los datos recabados de estudiantes. La investigación cualitativa nos permitió trabajar con un diseño flexible e interactivo, pues se termina de elaborar con su desarrollo a partir de unas primeras interpretaciones de la información que se va recolectando (Maxwell, 1996). Nos permitió indagar sobre determinadas situaciones del contexto, interpretando fenómenos particulares (Denzin y Lincoln, 1994).

Diseño y desarrollo del material didáctico

Al momento de diseñar y elaborar el material tuvimos en cuenta los siguientes lineamientos inspirados en el marco teórico:

- Proponer tareas cortas y enfocadas a cuestiones de razonamiento que se basen en el entendimiento de información, para no “desbordar” la memoria de trabajo.
- Proponer situaciones de justificación, de obtención de conclusiones, de refutación para dar lugar el proceso semántico de las etapas de razonamiento según la TMM.
- Presentar tareas en distintos registros semióticos con el fin de enriquecer la transversalidad de los modelos mentales de los conceptos matemáticos involucrados.
- Ofrecer fácil acceso a explicaciones y ejemplos sobre los conceptos, procedimientos y registros involucrados para que el usuario no tenga que recurrir a otras fuentes y que el contexto quede circunscrito al material.
- Brindar distintas oportunidades para que se construya el modelo explícito del condicional.
- Presentar situaciones en las que se favorezca la estrategia de construcción de contraejemplos.

El material, desarrollado con la herramienta de diseño Genially², focaliza en la actividad del estudiante y está organizado en dos bloques o módulos. En el bloque

22 Disponible en <https://es.wikipedia.org/wiki/Genially> (consultado el 11/7/23)

¹³ se revisan conceptos, procedimientos, lenguaje y representaciones de la función cuadrática. El bloque ²⁴ tiene tareas para extraer información de las premisas dadas en diferentes registros, familiarizarse con expresiones discursivas con conectores lógicos como la conjunción y el condicional, estudiar validez de afirmaciones, construir contraejemplos.

La utilización del Genially permite aprovechar la interactividad, el uso de registros semióticos distintos articulados en una misma página, la retroalimentación y la animación. Se han incorporado actividades de gamificación haciendo énfasis en la toma de decisiones según condiciones dadas, así como videos explicativos y audios para diversificar el uso de diferentes registros de representación y para que, gracias a la animación que estos recursos ofrecen, el estudiante capte que la realización de la tarea es un proceso que involucra pasos que se van relacionando entre sí. Hemos embebido applets de Geogebra, con cuadros de entrada y deslizadores que el usuario puede manipular para explorar la relación gráfico-fórmula, ampliar los significados de simetría de la curva y para anticipar respuestas. Para que las respuestas queden registradas en la nube y el docente e investigadores accedan a ellas, se han embebido formularios que el estudiante puede responder online sin recurrir a un acceso externo al dispositivo.

Análisis de producciones en una situación de justificación

Los estudiantes trabajaron por su cuenta con cada bloque en el aula. El profesor orientaba el uso del material y aclaraba, de manera individual o por equipos, pero no exponía sobre los asuntos del material. Mostramos un ejemplo de tarea del Bloque 2, con información presentada en registro gráfico que corresponde a una situación de justificación y analizamos las respuestas de estudiantes.

3 Bloque 1: <https://view.genial.ly/629a80641dd32d0018c7c4cf/learning-experience-didactic-unit-b1-funcion-cuadratic>

4 Bloque 2: <https://view.genial.ly/629a947c1dd32d0018c7e80c/learning-experience-didactic-unit-b2-funcion-cuadratica>

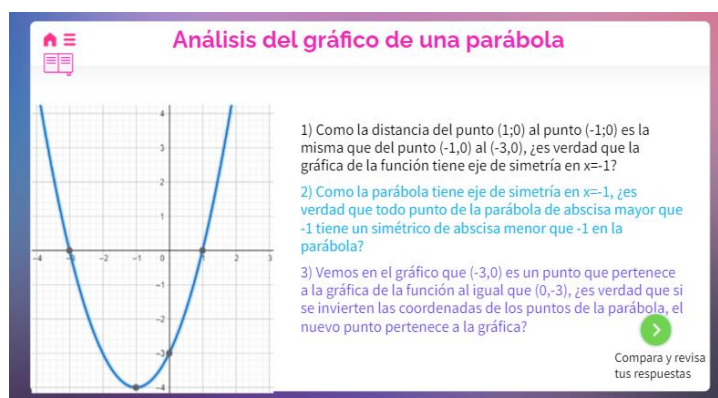


Figura 1: Bloque 2. Consignas vinculadas a la interpretación del gráfico

La pregunta 1) (Fig. 1) apunta a confirmar que $x=-1$ es el eje de simetría de la parábola y a recordar que la abscisa $x=-1$ es promedio de las dos raíces, en este caso. Este tipo de consigna, obliga al estudiante a aprovechar la simetría de una parábola y a no recurrir a la fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$.

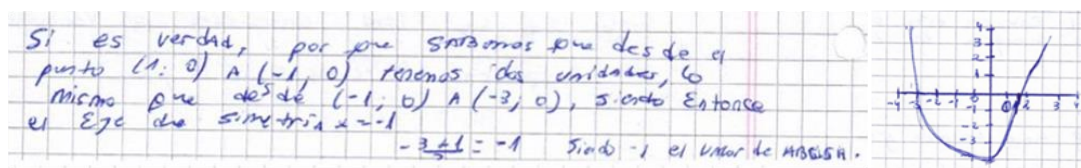


Figura 2: Respuesta de un estudiante de quinto año a la pregunta 1.
Interpretación de la simetría de la parábola en términos numéricos

Transcripción: “Si es verdad, porque sabemos que desde el punto (1;0) a (-1;0) tenemos dos unidades, lo mismo que desde (-1;0) a (-3;0), siendo entonces el eje de simetría en -1. $(-3+1)/2=-1$, siendo -1 el valor de abscisa”. El estudiante realiza un gráfico a mano alzada muy impreciso en el que el eje no “luce” en $x=-1$, por lo que su respuesta no se basa en los atributos de simetría de su dibujo, sino que éste es una herramienta de pensamiento en donde representa los puntos (-3,0) y (1,0) confirmando que pertenecen a la gráfica para realizar con ellos el promedio, asumiendo que son puntos simétricos de una parábola. Desde la TMM se puede interpretar que el estudiante pasa por la etapa de interpretación y representación inicial de las premisas cuando utiliza la descripción de una representación mental visual (aunque no la dibuje) donde dice “tenemos dos unidades” de un punto al otro y “lo mismo desde” el otro par de puntos. Justifica la veracidad de la afirmación a través del cálculo del promedio y quiere asignar significado al resultado del cálculo diciendo “siendo -1 la abscisa (de los puntos del eje)” aunque esta frase está incompleta. En

la Figura 3, otro estudiante se refiere al gráfico, pero enuncia una propiedad con sus palabras “el eje siempre cortará a la mitad a los puntos de la función”.

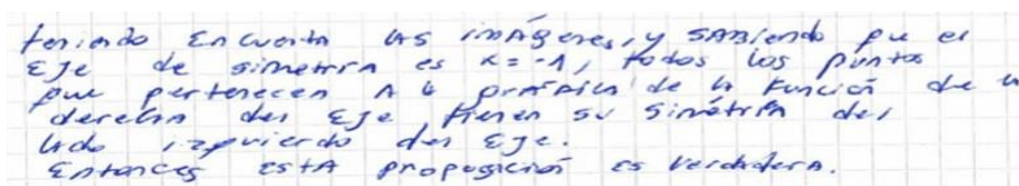
viendo el gráfico se puede sacar el eje de simetría, que es $x=-1$

Esto se debe a que el eje de simetría siempre cortará a la mitad a los dos puntos de la función (de -3 a -1 existe la misma distancia que desde -1 a 1)

Figura 3: Respuesta a un formulario embebido a la herramienta de diseño

Se observa que el estudiante interpreta la premisa a partir de un modelo mental que considera la simetría y que los puntos se encuentran a igual distancia del eje de simetría.

La pregunta 2) (Fig. 1), tiene el esquema implicativo: “Si $x=-1$ es la ecuación del eje de simetría de la función del gráfico, entonces un punto de la gráfica en uno de los semiplanos determinados por el eje tiene su simétrico en el semiplano opuesto también sobre la gráfica”. La información que $x=-1$ es el eje, es ahora el antecedente. Los semiplanos que la recta determina están presentados en términos de puntos de abscisa mayor o menor que $x=-1$. El estudiante interpreta la simetría con un criterio espacial diciendo “a derecha” y “a izquierda” (Fig. 4). Él afirma la veracidad de la proposición a partir de considerar casos particulares donde cada punto tiene su simétrico y generaliza la validez de la afirmación para “todos los puntos”, de acuerdo con la TMM para la que una conclusión es válida si la premisa es válida en cada una de sus posibilidades.



teniendo en cuenta las imágenes, y sabiendo que el eje de simetría es $x=-1$, todos los puntos que pertenecen a la gráfica de la función de la derecha del eje tienen su simétrico del lado izquierdo del eje. Entonces esta proposición es verdadera.

Figura 4: Respuesta a pregunta 2. Interpretación de la simetría en términos espaciales

Transcripción: “Teniendo en cuenta las imágenes, y sabiendo que el eje de simetría es $x=-1$, todos los puntos que pertenecen a la gráfica de la función de la derecha del eje tienen su simetría del lado izquierdo del eje. Entonces esta proposición es verdadera.”

En estos casos analizados de la pregunta 2) vemos que la consigna invita a interpretar que la conclusión ocurre a partir de la posibilidad de ocurrencia del antecedente (core meaning).

La pregunta 3) (Fig. 1) apunta a que no se confunda la relación de simetría entre puntos de una parábola con simetría de componentes del par ordenado; apunta también a poner atención a que la inducción no siempre lleva a una conclusión válida. El esquema implicativo es: “Si $(-3,0)$ y $(0,-3)$ son puntos de la parábola entonces $(x,0)$ y $(0,x)$ son puntos de la parábola, para todo x ”. Para mostrar que el enunciado es falso, basta mostrar un par de puntos de la forma $(x,0)$ y $(0,x)$ que no sean puntos de la parábola. Esta construcción tiene dos partes, una consistente con encontrar un par de puntos $(x,0)$ y $(0,x)$ y la otra no consistente con que sean puntos de la parábola. Hemos observado que, para algunos estudiantes, no es evidente construir esta conjunción, tal como se muestra en Fig. 5, aunque se clarifica al final cuando expresa: “con encontrar al menos un punto”.

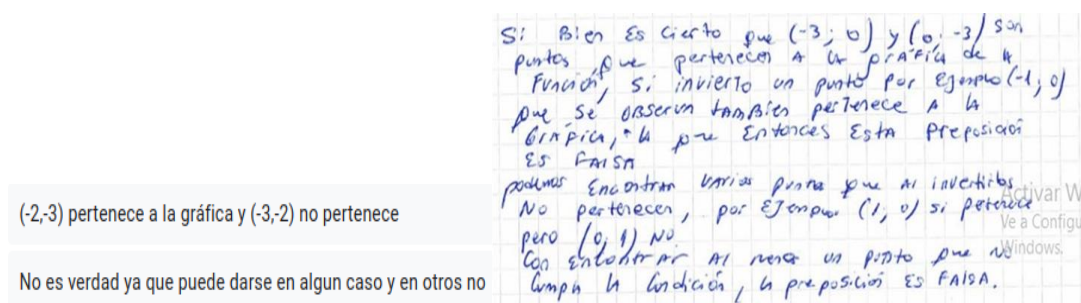


Figura 5: Respuestas a pregunta 3. Construcción del contraejemplo

Se muestra también otra respuesta por formulario. Aquí el registro gráfico que presenta la consigna, permite construir un contraejemplo mostrando concretamente qué puntos no pertenecen a la parábola. Identificar que es suficiente encontrar un par de puntos que no cumplan la condición para asegurar que la afirmación es falsa se condice con la TMM que analiza la validez de proposiciones a partir de posibilidades de ocurrencia.

Otras producciones de los estudiantes para dar respuesta a la pregunta 3 (Fig 1) son:

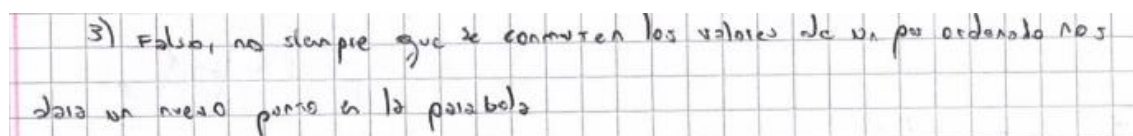


Figura 6: Respuestas a pregunta 3

Transcripción: “Falso, no siempre que se conmuten los valores de un par ordenado nos dará un nuevo punto en la parábola”

Observamos una respuesta donde el estudiante no se detiene en un caso particular ni sobre los valores de los datos de la consigna. Si bien era más esperable una formulación donde se utilice un contraejemplo tomando elementos de la consigna, vemos que la generalidad del “no siempre” es un indicio hacia un aspecto más abarcativo, que permite pensar en las condiciones de posibilidad destacando que en la generalidad puede haber varios contraejemplos.

Para la situación que presentamos en la Figura 7 se utilizó el registro gráfico en la respuesta:

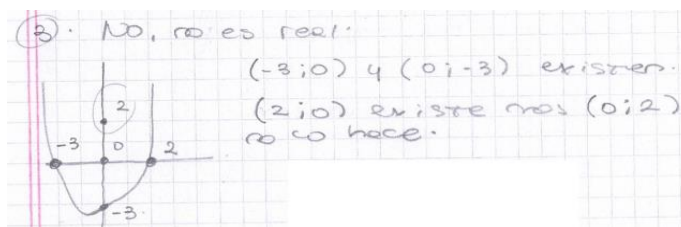


Figura 7: Respuestas a pregunta 3

Transcripción: “No, no es real. (-3;0) y (0;-3) existen. (2;0) existe. (0;2) no lo hace”

Este estudiante construye un contraejemplo basado en el gráfico de la parábola con datos de la consigna y agrega dos puntos en él para mostrar que la proposición es falsa. Describe la veracidad de la proposición en términos de existencia, o sea de posibilidad de ocurrencia, tal como la TMM lo anticipa en su Principio de verdad. Observamos la importancia de la representación por medio de una imagen para describir el modelo mental de la pertenencia o no pertenencia a la curva.

3. Falso, porque al conmutar los puntos las coordenadas no pertenecen al gráfico, esto observando el gráfico. Si hubiera una fórmula, conmutaría los puntos y la evaluaría para ver si el punto satisface la ecuación. La fórmula

Figura 8: Respuestas a pregunta 3

Transcripción: “Falso, porque al conmutar los puntos las coordenadas no pertenecen al gráfico, esto observando el gráfico. Si hubiera una fórmula conmutaría los puntos y la evaluaría [en la fórmula] para ver si el punto satisface la ecuación”.

Aquí se presenta una manera de generar contraejemplos. Para reafirmar lo que describe, el estudiante apela a otra representación, la fórmula, y realizaría una evaluación de los puntos en ella. Es interesante la combinación de representaciones en esta respuesta que evidencia distintos componentes del modelo.

Conclusión

Las variadas respuestas que mostramos de una misma tarea dan cuenta del principio de modulación semántica, en las distintas interpretaciones de la consigna, y pragmática, por las distintas formas de hacer o evidenciar qué debe hacerse para indicar por qué una aseveración se concluye, o no, a partir de las premisas.

En el marco de una propuesta didáctica que considera una perspectiva contextual y situacional para funciones cuadráticas, los estudiantes desplegaron el proceso del razonamiento deductivo atravesando por las distintas etapas del proceso semántico. Se observa la etapa de interpretación y representación inicial de las premisas a partir de sus modelos mentales, explícitos o implícitos; advertimos también que los estudiantes lograron alcanzar la etapa de formulación de una conclusión y la de analizar posibilidades en las que ocurre lo que la afirmación declara (Fig. 4) o no ocurre (Fig. 5) dando lugar al contraejemplo.

Destacamos que la búsqueda de contraejemplos para descartar la validez de una afirmación fue una práctica que surgió de los estudiantes, aunque algunos necesitaron encontrar más de una manera de justificar. Esta forma de decidir la veracidad de una conclusión a partir de encontrar o no casos que la refuten, que parece operar en el razonamiento de los estudiantes, es precisamente la que describe la TMM. Por esto es que consideramos que la construcción de contraejemplos es un punto crucial en la construcción de la racionalidad deductiva.

Bibliografía

Bronkhorst, Hugo, Roorda, Gerrit, Suhre, Cor y Goedhart, Martin (2021). Student development in logical reasoning: Results of an intervention guiding students

through different modes of visual and formal representation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21(2), 378-399.

Denzin, Norman K. y Lincoln, Yvonna S. (1994). Transforming qualitative research methods: Is it a revolution?" *Journal of Contemporary Ethnography*, 24(3), 349-358.

Duval, Raymond (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Johnson-Laird, Philip N. (2006). *How we reason*. Oxford University Press Inc.

Johnson-Laird, Philip N., Hasson, Uri. (2003). Counterexamples in sentential reasoning. *Memory and Cognition*, 31(7), 1105-1113.

Johnson-Laird, Philip N. y Byrne, Ruth. M. J. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychological Review*, 109, 646-678.

Johnson-Laird, Philip N. (2001). Mental models and deduction. *Trends in cognitive science*, 5(10), 434-442.

Johnson-Laird, Philip N., Byrne, Ruth. M. y Schaeken, Walter (1992). Propositional reasoning by model. *Psychological review*, 99(3), 418-439.

Maxwell, Joseph (1996). *Qualitative Research Design. An Interactive Approach*. 3ed edition. Sage Publications.

Otero, María R. y Banks-Leite, Luci (2006). Modelos mentales y modelos numéricos. *Relime*, 9(1), 151-178.

Stylianides, Andreas J. y Stylianides, Gabriel J. (2009). The Mental Models Theory of Deductive Reasoning: Implications for proof instructio. En D. Pitta–Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of CERME5, the 5th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp.665–674). http://lettredelapreuve.org/OldPreuve/CERME5Papers/WG4-Stylianides_Stylianides.pdf

Eje 2. Educación matemática en el nivel secundario

Reflexiones y experiencias para el aula

Rompiendo barreras: tareas de modelización matemática en el ciclo básico de Educación Secundaria obligatoria

MARTINA CASSINI

martincassini@gmail.com

MARÍA FLORENCIA CRUZ

mfcruz@fhuc.unl.edu.ar

MARÍA EUGENIA CAMMISI

meugeniacammissi@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral – UNL

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo diseñar y analizar dos tareas de modelización matemática focalizando en el desarrollo de contenidos que los diseños curriculares de Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe proponen para la educación actual. En primer lugar, se diseñan dos tareas para ser abordadas en el Ciclo Básico que promueven el desarrollo de diversos contenidos. En segundo lugar, se fundamentan estas tareas atendiendo a responder por qué son de modelización matemática y se categorizan según el tipo de tareas. Se considera que las mismas constituyen materiales útiles para docentes y se enfatiza en el potencial de desarrollar tareas de modelización matemática, ya que promueven la toma de decisiones de forma crítica y son pertinentes para potenciar el desarrollo del currículo prescripto.

Palabras clave: modelización matemática / diseño de tareas / educación secundaria / diseños curriculares

Introducción

En la actualidad la modelización matemática como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de la matemática posee relevancia a nivel internacional. A pesar de esto se presentan ciertas barreras para su implementación real en la educación obligatoria. Borromeo Ferri (2018) señala que el material, tiempo y evaluación resultan barreras para la enseñanza con modelización matemática. En el marco de esta idea la autora problematiza la demanda que ocasiona al profesorado el desarrollar tareas con las que se espera cubrir el currículo estipulado y manifiesta la necesidad de que se generen tareas matemáticas de alta calidad para que pueda implementarse la modelización en la enseñanza diaria.

La importancia de desarrollar la modelización matemática es evidente. Específicamente, para Blomhøj (2008, p.26) existen tres motivos principales para llevar a cabo la modelización matemática en la escuela: (1) “Motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca la matemática en la cultura”. (2) “En el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas, las competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de crucial importancia”. Desde una perspectiva individual, en relación con las oportunidades y desafíos educativos y laborales. Desde una perspectiva social, en relación con la necesidad de una fuerza laboral altamente educada. (3) En una sociedad basada en alta tecnología, “el desarrollo de competencias expertas y seculares para criticar modelos matemáticos y la forma en que son usados para la toma de decisiones se está convirtiendo en un imperativo para el mantenimiento y futuro desarrollo democrático”.

Argentina no es ajena a las demandas internacionales y también considera la enseñanza mediada por modelización matemática en la educación obligatoria. Los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) (2012) plantean que se debe reconocer la modelización como “un aspecto esencial de la práctica matemática” (p.14). En particular, en el documento del Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe (2014) se propone un trabajo en el aula que propicie el abordaje de la modelización a partir de la resolución de problemas ya que la misma “permite una mirada integradora de la actividad matemática, al tiempo que supera la perspectiva que fragmenta sus distintos aspectos: problemas, técnicas, representaciones, demostraciones, evitando la preeminencia de una sobre las otras”

(p.47). Asimismo, en la actualidad, es necesario profundizar la investigación nacional en temáticas vinculadas con modelización matemática (Cruz, 2023).

Teniendo en cuenta lo expuesto surge este trabajo que forma parte de una investigación amplia en la que se pretende diseñar y analizar tareas de modelización matemática para identificar categorías a tener en cuenta en el diseño de tareas de modelización matemática que promuevan el desarrollo del currículo en la educación obligatoria. El objetivo particular de este trabajo es diseñar y analizar dos tareas de modelización matemática focalizando en el desarrollo de ciertos contenidos que se promueven desarrollar en los diseños curriculares de la provincia de Santa Fe.

Marco teórico

Teniendo en cuenta el objetivo propuesto en este trabajo, se abordan dos nociones teóricas fundamentales. Por un lado, se avanza en la perspectiva de modelización matemática en la que posicionamos nuestro trabajo. Por otro lado, se recupera una categorización de tareas de modelización matemática.

Para Villa-Ochoa *et al.* (2017) la modelización matemática en la cotidianidad escolar, es decir, el “ambiente de aprendizaje asociado con el estudio, la problematización y la investigación de problemas no matemáticos por medio de las matemáticas” (p. 223), contribuye al desarrollo de habilidades características de la matemática y permite “comprender de forma crítica situaciones del mundo circundante por medio de las matemáticas” (p. 223).

En Bassanezi y Biembengut (1997), distinguen la modelización matemática de la modelación matemática como el método de enseñanza y de aprendizaje que utiliza el proceso de modelización en cursos regulares. En este trabajo elegimos aplicar estos conceptos como sinónimos y quedarnos únicamente con el término “modelización”.

Blomhøj (2008) describe a la modelización como un proceso cíclico de producción, validación y redefinición de un modelo matemático, es decir, generación de relaciones entre ciertos objetos matemáticos y fenómenos o situaciones de naturaleza no matemática. Según el autor, este proceso se puede organizar en seis subprocesos: formulación de un problema, selección de objetos y relaciones que permitan una re-

presentación matemática a partir de su idealización, traducción de dichos objetos y relaciones al lenguaje matemático, uso de métodos matemáticos para obtener resultados matemáticos y conclusiones, interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial y, por último, evaluación de la validez del modelo por comparación de datos observados o predichos y/o por conocimiento teórico. Los subprocesos definidos por Blomhøj (2008) tienen como base el “conocimiento teórico y los datos empíricos concernientes al dominio de investigación” (p. 24). Se entiende a la teoría en su bibliografía como el conocimiento acerca del dominio de investigación usado en el proceso de modelización, el cual puede tener un estatus epistemológico variado, definiendo según esto el modo de validación del modelo. Es por esto que la selección de actividades debe ser acorde al conocimiento abordado por los estudiantes al momento de implementar la tarea.

Para los fines de este trabajo, se adopta la clasificación de tareas de modelización presentadas por Villa-Ochoa *et al.* (2017) que está compuesta por cuatro categorías amplias: (i) enunciados verbales, (ii) construcción de representaciones, (iii) modelación a través de proyectos, y (iv) uso y análisis de modelos.

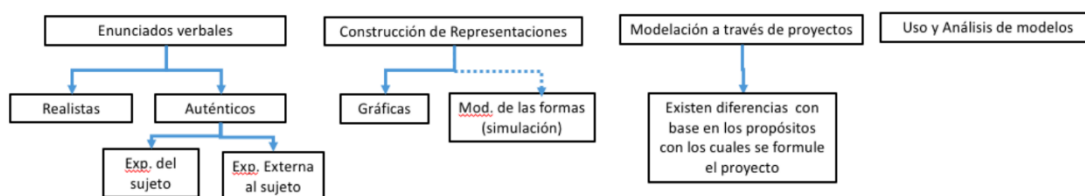


Imagen 1: Esquema de categorías y subcategorías de una clasificación alternativa de tareas de modelización propuesta en Villa-Ochoa *et al.* (2017, p. 229)

Los enunciados o problemas verbales consisten en textos que describen situaciones más o menos familiares y plantean preguntas cuantitativas que pueden ser resueltas con ayuda de las matemáticas. Existen dos tipos según los autores: (a) enunciados verbales realistas: “pueden incrustar o evocar aspectos realistas o imaginados sin que vinculen de forma necesaria contextos cercanos a la experiencia cotidiana del estudiante . . . la participación del estudiante se reduce a resolver la tarea” (pp. 230-231); (b) problemas auténticos presentados como enunciados verbales: deben tener alguna de las características de autenticidad, pueden ser auténticos de contexto, de actividad o proceso, de impacto, personales y de valor.

La construcción de representaciones como actividad puede tener “mayor o menor énfasis dependiendo de los propósitos de la clase y de las visiones que el profesor

tenga sobre las matemáticas y su enseñanza” (p. 236). Se reconocen dos tipos: (a) representaciones gráficas: se basan en la producción y manipulación de representaciones, lo cual para nuestra perspectiva de la “modelización como proceso que se involucra en el estudio de fenómenos de un dominio extramatemático a través de un dominio matemático, este tipo de tareas no podría considerarse como tareas de modelización” (p. 238); (b) modelización/simulación de formas: los autores reconocen dos usos, el primero relacionado con la construcción de “modelos matemáticos geométricos para representar objetos”(p. 239), el segundo tiene que ver con el “análisis geométrico de modelos ya construidos” (p. 239). En algunos casos el modelo se puede generar sin la comprensión de las variables y condiciones del sistema analizado, por lo que no necesariamente ofrece un estudio de las leyes que gobiernan el movimiento en el fenómeno, en otros, se pueden establecer mecanismos a partir de la representación que permiten explicar propiedades físicas de los objetos estudiados.

En la modelización a través de proyectos, a diferencia de las categorías ya explicadas, se hace posible “desarrollar procesos amplios de indagación y resolución de problemas” (p. 241), ya que los proyectos son tareas abiertas. Esta práctica “recrea parte de las actividades realizadas por los profesionales de la matemática aplicada” (p. 242). “Los proyectos de modelización no siempre atienden a la misma intencionalidad” (p. 242).

Finalmente, el uso y análisis de modelos, además de proporcionar una experiencia para estudiar las matemáticas a partir de modelos ya construidos, también incorporan actividades de modelización en sí: “ la confrontación del modelo con datos extraídos del contexto particular del estudiante, la proyección de la manera en que fue construido, incluso, en algunas ocasiones, reconocimiento de limitaciones de los modelos y elaboración de conjeturas sobre posibles aplicaciones o extensiones del mismo” (p. 247).

Tareas diseñadas

Tarea 01

Te encuentras de pie a dos metros de la ventana mirando hacia afuera. Escuchas un perrito cerca de la pared exterior, pero desde tu posición actual no llegas a verlo.

- a) Responde: ¿Cuál es la mínima distancia a la que debe estar el perrito de la pared para que puedas verlo?
- b) Realiza un esquema de la situación.

Tarea 02

En tu casa quieren cambiar todo el piso interior. Como tienes criterio, te piden que propongamos y compares las opciones que se ajustan al presupuesto para que luego decidas cuál conviene. Explica en detalles por qué elegiste esa opción.

Sugerencia: Se define un presupuesto que debe servir para el trabajo completo (selección del material y colocación).

Análisis de las tareas diseñadas

Para realizar el análisis de las tareas se describe por qué dichas actividades constituyen tareas de modelización matemática en el sentido de Blomhøj (2008), se justifica su encuadre en los años pertinentes del sistema educativo considerando el Diseño Curricular de la Provincia de Santa Fe y se realiza una categorización de las mismas atendiendo a los tipos de tareas de modelización matemática propuestas en Villa-Ochoa *et al.* (2017).

Tarea 01

Para llevar a cabo la tarea el/la docente podría realizar sugerencias según considere apropiado, por ejemplo: (1) brindar ejemplos de ventanas seleccionables para el trabajo o definir un ámbito particular de selección (casa/escuela), (2) recomendar el uso de la altura de una mascota propia (si es posible). Estas sugerencias que se podrían realizar, son acordes si se desea que el estudiante tome medidas de su entorno, sin embargo también se podría otorgar oportunidades para que obtenga la información de Internet u otros dispositivos.

Sin embargo, se considera que lo ideal es que inicialmente se otorgue libertad de trabajo al estudiantado. En el caso de no proporcionar estas opciones la selección de variables puede devenir de investigaciones, estimaciones o aproximaciones de alturas (tanto de la ventana como del perro), por lo que es importante que el estudiantado determine su objetivo para elegir la información junto a la tarea, e in-

cluso, en el marco de estas decisiones, se podría generar un problema por parte del estudiantado que acote la tarea con cierta información.

Acorde al documento del Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe (2014) se entiende que al finalizar este ciclo de la educación secundaria un estudiante debe acreditar los conocimientos que se consideran necesarios para desarrollar un modelo que dé respuesta a la consigna. Por un lado, dentro del área de geometría y medida: se exploran propiedades y demostraciones sencillas de los polígonos triángulos (1er año), se estudian los polígonos semejantes, se indaga sobre las condiciones necesarias y suficientes de semejanza entre triángulos y se realiza su construcción con regla graduada y compás (2do año). En el documento curricular se especifica que “las construcciones deben realizarse tanto con instrumentos tradicionales como con software de geometría dinámica” (pp. 51-52). Por otro lado, dentro del área de álgebra y funciones: se proponen “exploración y análisis de regularidades para la producción de fórmulas vinculadas al problema de contar grandes colecciones” (p. 54) y el trabajo con proporcionalidad directa e inversa y ecuaciones lineales de una incógnita (1er año). También, se promueve el abordaje de funciones lineales y no lineales: modelización utilizando diferentes métodos de representación, y el empleo de “ecuaciones con una y dos variables (“sistemas de ecuaciones lineales, interpretación y verificación del conjunto solución a partir de su resolución gráfica”, p. 56) (2do año). En este sentido, se destaca que es una tarea potente para abordar las nociones mencionadas y que incluso, se puede proponer antes de desarrollar tales contenidos como medio para la producción de conocimientos del estudiantado.

Se considera que con esta tarea se puede desarrollar un proceso de modelización matemática en términos de Blomhøj (2008), porque implica que el/la estudiante se ubique en un espacio determinado. Su accionar comienza con la sistematización, donde podría identificar su altura, la altura de la base de la ventana, la altura del perro y la posición relativa del perro respecto de la ventana como parámetros o variables de análisis que, mediante su idealización, permiten la aplicación de métodos matemáticos pertinentes. Los modelos que responden a la consigna son variados, dependen principalmente de los parámetros considerados inicialmente (podría entenderse una respuesta donde la posición relativa del perro sea despreciable) y de la profundidad con la que se haya trabajado la geometría en el aula al momento de implementarlo. Teniendo en cuenta esto último, se contemplan como

válidos los modelos que impliquen aproximaciones y pruebas de campo bien documentadas mediante fotos y/o croquis (por ejemplo, podría un/a estudiante pensar que el perro se encuentra en los brazos de una persona detrás de la ventana y que registre con fotos esta situación).

Dentro de la caracterización de Villa-Ochoa *et al.* (2017) se enmarca esta tarea como un problema auténtico presentado como enunciado verbal, ya que, evoca una situación semejante a la que ocurre en la experiencia cercana de la persona que resuelve (autenticidad de contexto e incluso personal). A su vez, la consigna involucra una construcción de representaciones del tipo modelización/simulación de formas, puesto que la construcción de un esquema a escala permite indagar sobre la resolución del problema planteado, definiendo los parámetros como segmentos móviles y utilizando las herramientas de medida del software o instrumentos tradicionales de geometría.

Tarea 02

Esta tarea también se puede presentar con total libertad al estudiantado, sin embargo, para la implementación en el aula se determinan diferentes etapas y sus respectivas consideraciones metodológicas que permitirían acotar en el caso que se considere necesario:

(1era etapa) El/la docente define un presupuesto por intervalos, es decir, acorde a la superficie del hogar asigna un presupuesto disponible. El presupuesto se entrega en una tabla general, cada estudiante debe identificar con qué presupuesto cuenta.

(2da etapa) Una vez que el alumnado haya desarrollado y entregado sus modelos por grupos, se espera que se confeccione un catálogo que incluya la información presentada. Esta etapa está sujeta al tiempo disponible para la implementación.

A partir del documento del Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe (2014) se determina que al finalizar el ciclo básico de la educación secundaria los/as estudiantes acreditan conocimientos suficientes para tener un desempeño satisfactorio en el abordaje de esta tarea o incluso se puede emplear para desarrollar nociones matemáticas en este ciclo. Dentro del área de geometría y medida se desarrolla: la “medida: estimación y cálculo de cantidades eligiendo unidades convenientes -no convencionales y convencionales- según la situación.” (p. 54) y se calcula “perímetro, superficie y volumen: comparación usando equivalencias entre figuras” (p.54), producción y uso de fórmulas e incluso el análisis de las relaciones entre perímetro y superficie, superficie y volumen tales magnitudes (1er año).

Además, se propone el trabajo con “polígonos cuadriláteros: exploración de propiedades a partir del análisis de regularidades y demostraciones sencillas” (p.55) (2do año). También, dentro del área de números y operaciones se desarrolla el trabajo con: “números racionales positivos en su expresión fraccionaria y como número decimal para ciertos cocientes, los argumentos sobre su equivalencia, y decisiones sobre la representación más conveniente en relación con el problema a resolver. La fracción como razón, porcentaje, escala” (p. 53) (1er año). Asimismo, la “presentación de números irracionales y noción intuitiva de número real” (p. 54) y nuevamente el trabajo con número racionales, trabajando por ejemplo la expresión fraccionaria, “decimal finita o periódica, como punto en la recta numérica, notación científica, argumentación sobre su equivalencia y decisión de la representación más conveniente en relación con el problema a resolver.” (p. 55) y la “elaboración de estrategias de cálculo: mental, escrito, exacto, aproximado, con calculadora. Evaluación de la razonabilidad del resultado y argumentación de propiedades” (p. 55). El conjunto de conocimientos descrito permite al estudiante trabajar con superficies compuestas como la vista en planta de un hogar y, a su vez, desarrollar estrategias de cálculo con diferentes magnitudes. Esto no quiere decir que se recurre a todos estos contenidos en el abordaje de la tarea, pero se espera que varios de ellos se desarrollen.

En este caso, se entiende la consigna como problema de modelización matemática dentro de la teoría de Blomhøj (2008), ya que en un principio, el/la estudiante debe reconocer y sistematizar las implicaciones de la tarea: costo de material, transporte y mano de obra. Además, debe realizar un análisis de la superficie de su hogar, ya sea por toma de medidas propia o por visualización de planos. Particularmente, la información utilizada para generar el modelo puede provenir de distintas fuentes y medios y el estudiante queda encargado de su obtención.

Se considera que esta consigna, acorde a las categorías de tareas de modelización de Villa-Ochoa *et al.* (2017) es un problema auténtico presentado como enunciado verbal, puesto que permite al estudiante interiorizarse en la toma de decisiones financieras de un hogar, lo que se entiende como un contexto convencional en la vida cotidiana adulta. Además, tal como señalan los autores, se considera que la tarea presenta autenticidad de impacto, ya que, se recurre a un proyecto o contexto que podría resultar cercano a la vida personal del estudiantado.

Conclusiones

En el presente trabajo se presentaron y analizaron dos tareas de modelización matemática. Se considera que estas tareas permiten desarrollar contenidos propios del diseño curricular de la provincia de Santa Fe de primero y segundo año de secundaria. A su vez, se pone énfasis en el potencial de estas tareas por permitir al estudiantado tomar decisiones e implicarse activa y críticamente. Se considera que estas tareas se podrían emplear para que el estudiantado produzca conocimientos a medida que aborda y avanza en la implicación con la tarea, transversalmente en el proceso de enseñanza y de aprendizaje (por ejemplo, es una clase a la semana se van desarrollando este tipo de tareas) e incluso, como cierre de temáticas.

Se considera relevante del análisis realizado destacar que la tarea suele ser amplia, sin embargo, a medida que el estudiantado con la guía docente selecciona variables se puede modificar la misma y acotar atendiendo a las mismas, constituyendo el propio problema del grupo. Esta diferencia entre los conceptos tareas y problemas formulados por el estudiantado se presentan en este texto breve e incipientemente, pero se profundizarán en la continuación de la investigación más amplia en la que se circunscribe el presente trabajo. Asimismo, en futuras investigaciones se propone categorizar aspectos a tener en cuenta para diseñar tareas de modelización matemática adecuadas a un currículo determinado.

Finalmente, se considera que en este trabajo el diseño y análisis de tareas que muestra el modo en que potencian el desarrollo del currículo prescripto resulta fundamental para romper la barrera señalada por Borromeo Ferri (2018) con respecto a la falta de material para la verdadera implementación de la modelización matemática en la educación obligatoria en relación con los documentos curriculares de un determinado lugar.

Bibliografía

Bassanezi, Rodney Carlos y Biembengut, María Salett (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13-25 <https://www.researchgate.net>

[/publication/256495960_Modelacion_matematica_Una_antigua_forma_de_investigacion_-_un_nuevo_metodo_de_ensenanza](#)

- Blomhøj, Morten** (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. (María Mina, Trad.) *Revista De Educación Matemática*, 23(2), 20-35. (Obra original publicada en 2004). <https://doi.org/10.33044/revem.10419>
- Borromeo Ferri, Rita** (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Cruz, María Florencia** (2023). *Sentidos, validaciones y definiciones al interior de una vivencia de formación de futuras profesoras en matemática mediada por un escenario de modelización matemática en el contexto de una universidad pública argentina* (tesis de doctorado). Universidad Nacional de Córdoba. <https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/548249>
- Ministerio de Educación** (2011). *Núcleos de aprendizajes prioritarios*. Ciclo Básico. Educación Secundaria. Matemática. Consejo Federal de Educación. [Matemática ciclo básico educación secundaria 1º y 2º / 2º y 3º años. \(me.gov.ar\)](#)
- Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe** (2014). *Diseño curricular de educación secundaria orientada*. <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf>
- Villa-Ochoa, Jhony, Castrillón-Yepes, Alexander y Sanchez-Cardona, Jonathan** (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espazo Plural*, 36, 219-251. <https://www.redalyc.org/pdf/4459/445955647011.pdf>

Experiencia en el aula utilizando el Tangram y GeoGebra, para iniciar el aprendizaje de los cuadriláteros y sus propiedades, en un curso de primer año de una escuela secundaria de Entre Ríos

ÉRIKA VANESA GALEANO

erikavanesagaleano@gmail.com

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Paraná (UTN- Paraná)

EGLE ELISABET HAYE

ehaye@fich.unl.edu.ar

Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (UNL - FICH)

STELLA VAIRA

stella.vaira@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (UNL - FBCB)

Resumen

La experiencia que se describe es un avance de la investigación iniciada para una tesina de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la UTN Paraná. Su objetivo es diseñar e implementar una propuesta didáctica para estudiantes de primer año de educación secundaria, que contribuya a fortalecer el aprendizaje de la geometría de los cuadriláteros y sus propiedades, mediante el empleo de las TIC como recurso facilitador de su comprensión. Para su puesta en práctica en el aula, las actividades de la propuesta se organizaron mediante fichas de trabajo. En este trabajo se hará referencia a la primera ficha, donde se utiliza como recursos el Tangram inicialmente en material concreto, y luego virtual en GeoGebra. De la experiencia realizada en una escuela de Entre Ríos, se observa que, a partir del juego, la visualización y la exploración dinámica, las clases resultaron más participativas y atractivas, contribuyendo significativamente en la formación de los primeros conceptos y conocimientos geométricos asociados a los cuadriláteros.

Palabras clave: experiencia didáctica en geometría / cuadriláteros / tangram / GeoGebra

Introducción

Este trabajo surge como un avance de la investigación iniciada para una tesina de la carrera Licenciatura en enseñanza de la Matemática que se dicta en UTN Paraná. Su objetivo principal es diseñar e implementar una propuesta didáctica para estudiantes de primer año de la escuela secundaria, que contribuya a fortalecer el aprendizaje de la geometría de los cuadriláteros y sus propiedades, mediante el empleo de las TIC como recurso facilitador de su comprensión.

Se considera que la Geometría y sus aplicaciones tienen un gran potencial en todos los campos del saber, y es en los ámbitos educativos, donde se busca desarrollar capacidades cognitivas en estudiantes y conducir al desarrollo potencial de sus capacidades. La Geometría favorece y desarrolla en los alumnos una serie de capacidades como la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de otras áreas de Matemáticas (Flores, 2005).

Las propuestas áulicas más interesantes y adaptadas a las exigencias actuales para la enseñanza de la geometría en edad escolar, dejan atrás la presentación de contenidos como el producto acabado de la actividad matemática, priorizando procesos implícitos de construcción y razonamiento. La Geometría, no se reduce sólo a definiciones y fórmulas, sino en describir y analizar propiedades y relaciones, clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas.

En las ideas, conceptos y relaciones que pueden establecerse entre objetos geométricos, existe una abundancia de contenidos visuales, por lo que, el uso planificado de recursos, como lúdicos y tecnológicos adecuados para realizar diferentes representaciones, ofrecería nuevas potencialidades para describir, entender y consolidar significados. Precisamente en esta dirección, se lleva a cabo una experiencia áulica en un curso de primer año de la Escuela Secundaria N° 9 “Domingo Faustino Sarmiento” en la ciudad de La Paz, Entre Ríos (equivalente a séptimo grado de la escuela primaria), utilizando el Tangram y GeoGebra como recursos para comenzar a desarrollar los conocimientos geométricos básicos sobre el tema cuadriláteros.

Para su puesta en práctica en el aula, las actividades contenidas en dicha propuesta se organizaron mediante fichas de trabajo. La primera ficha que aquí se describe, utiliza inicialmente el Tangram en material concreto y luego virtual en GeoGebra, como un recurso relevante de fácil manejo y accesibilidad que permita desarrollar el sentido espacial, manipular, describir figuras y visualizar cómo se ven

cuando se transforman mediante giros o reflexiones o se juntan o desarmen de diferentes formas.

La Geometría en los primeros años del secundario

Numerosas investigaciones enfocan su objetivo en valorar la importancia de la enseñanza de la Matemática en general y de la Geometría en particular, plasmando aspectos didácticos propios, nuevas experiencias, innovaciones y resultados y, el desarrollo de diferentes recursos o materiales que promuevan aprendizajes significativos. Se hace necesario así que, en la enseñanza de la Geometría, se planteen contenidos útiles en el futuro, desarrollados mediante una metodología de trabajo en el aula que sea dinámica, en la que el alumnado realice razonamientos, representaciones, relaciones, interpelaciones y resolución de actividades (Giarrizo, 2021; Fabro, 2018).

Teniendo como referente el Diseño Curricular de Educación Secundaria (Ciclo Básico Común) de la provincia de Entre Ríos (CGE, 2022), uno de los recorridos formativos en primer año es el estudio de las figuras y las medidas, cuyos contenidos posibles a desarrollar son:

- Caracterización y clasificación de triángulos, **cuadriláteros**, círculos, poliedros y cuerpos redondos.
- Exploración de las condiciones necesarias para que la construcción de una figura sea posible, analizando en qué casos la solución es única, en qué casos se obtienen infinitas soluciones y en qué casos es imposible.
- **Validación de propiedades** (propiedad triangular, ángulos adyacentes y opuestos por el vértice, suma de ángulos interiores en triángulos y cuadriláteros).
- Análisis y uso de las nociones de **perímetro**, **área** y volumen.
- Resolución y formulación de **problemas** que involucren distintas unidades de medida.
- Más precisamente, los contenidos que se abordaron en este trabajo fueron la caracterización y clasificación de cuadriláteros (paralelogramos) y la validación de propiedades; los mismos se enmarcaron en diferentes tipos de actividades áulicas.

Recursos didácticos: Tangram y GeoGebra

El aprendizaje de conceptos abstractos supone un desafío en alumnos de los primeros años de la escuela secundaria. Los materiales concretos ayudan a salvar esta dificultad sirviendo de apoyo visual que permite explorar los objetos físicamente a la vez que se entienden los conceptos que se están estudiando. Los materiales y los recursos tecnológicos le permiten al profesor relacionar elementos de geometría y propiedades, en los que se ponen en juego los conceptos que se pretenden enseñar mediante un modelo concreto como el Tangram o mediante el uso de una tecnología como GeoGebra (Flores, 2005).

El Tangram es un juego chino (puzzle) que consta de siete piezas: cinco triángulos de diferentes tamaños, un cuadrado y un paralelogramo, que consiste en usar todas las piezas para construir diferentes formas. La innovación del uso de un material como éste reside en cambiar la concepción tradicional que lo plantea como un juego de composición de figuras limitado al entretenimiento, a una visión más amplia relacionada con los conceptos asociados a las figuras geométricas y sus propiedades.

El Tangram virtual puede ayudar a que los estudiantes sean más conscientes de las propiedades de las figuras que están trabajando y de los procesos que usan al manipular las formas ya que deben planificar los movimientos que necesitan realizar. Los profesores pueden animar a los estudiantes a planificar sus acciones si tienen que trabajar con un compañero, hablar entre ellos de los movimientos que tienen que realizar, así el profesor tiene un rol motivador de la enseñanza manteniendo activa la inquietud de los alumnos (Lin *et al.*, 2011).

El uso de un material didáctico como el Tangram, serviría de soporte para el docente, al momento de tener que diseñar sus actividades áulicas, para la enseñanza de algunos temas de Geometría, tanto en material concreto como virtual.

Según Maggio (2012), los ambientes de aprendizaje que incorporan las TIC son eficaces, cómodos y motivantes, y el aprendizaje es activo, responsable, constructivo, complejo, contextual, participativo, interactivo y reflexivo. Al respecto, existe una importante variedad de software de geometría dinámica que ofrecen excelentes oportunidades para poner en contacto a los estudiantes con problemas en los que deban usar propiedades de las figuras, potenciando la construcción de conoci-

tos y evitando las dificultades que muchas veces plantea manejar útiles de geometría, ya sea porque no están habituados a emplearlos o por el tiempo que demanda su uso.

Por otro lado, los programas de geometría dinámica como GeoGebra, cuentan con una serie de elementos que lo convierten en un software (libre) útil y ventajoso para abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático. Además, posibilita al usuario experimentar, observar, medir, comparar, conjeturar y transformar, promoviendo su participación más activa.

Investigaciones como las de Díaz -Nunja *et al.* (2018), Borrego *et al.* (2019) y Jaraba Gutierrez (2020), evaluaron los efectos del empleo del GeoGebra en la enseñanza de distintos temas de la geometría, con estudiantes secundarios. Los resultados sugieren que su empleo tuvo efectos con mejoras en el desarrollo de capacidades para el razonamiento y demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas. De lo expuesto, el objetivo de la experiencia realizada fue utilizar manipuladores concretos y virtuales relacionados con el Tangram y GeoGebra como propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros y sus propiedades, en un primer año de secundaria, para potenciar la imaginación geométrica y el descubrimiento de relaciones entre las diferentes figuras geométricas.

A continuación, se describe la metodología y las actividades diseñadas para cumplir con el objetivo.

Metodología

La metodología empleada es cualitativa, enmarcada dentro de las características de una Investigación-Acción (IA) (Hernández Sampieri *et al.*, 2014). La metodología seleccionada constituye una opción de mucha riqueza, ya que, por una parte, permite la expansión del conocimiento, y por la otra, genera respuestas concretas a problemáticas que se plantean en la enseñanza, cuando se aborda un interrogante, o una temática de interés y se desea aportar alguna alternativa de cambio o transformación. Desde este enfoque se investiga al mismo tiempo que se interviene en un cierto contexto. La metodología propone la sistematización de la práctica en geometría a través de la investigación y reflexión sobre dicha práctica, lo

que permite el análisis y el rediseño de la propuesta en relación con los objetivos planteados, cuando sea necesario.

En el contexto del presente trabajo, la metodología de IA centró su interés en el diseño de una propuesta didáctica que permitió la comprensión en una etapa inicial de los cuadriláteros y sus propiedades, de tal manera que, al concretarse en el aula, pueda contribuir a estimular y a ejercitar habilidades de pensamiento y estrategias en la resolución de problemas. La realidad áulica institucional, puede ser descripta, en este caso, mediante la puesta en marcha de estrategias tendientes a las transformaciones educativas de aquellos aspectos que requieran revisión. El objeto de análisis fueron las producciones de los alumnos.

Diseño de las actividades

En la propuesta completa se han diseñado fichas de trabajo para el aula, que responden a generar un mayor aprovechamiento del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la geometría, particularmente en este caso, de los cuadriláteros y sus propiedades, utilizando como recursos Tangram y GeoGebra.

Se tuvieron en cuenta en el diseño de las actividades los siguientes aspectos: contenidos y saberes previos, espacio físico y tiempo de planificación en el armado de la propuesta en el aula y los recursos tecnológicos que posee la institución.

Los estudiantes cuentan con conceptos previos geométricos como: recta, semi-recta, segmento, mediatriz, ángulo, bisectriz, paralelismo y perpendicularidad, ya que fueron trabajados anteriormente durante el mismo año. Así mismo, en relación al uso de GeoGebra, los estudiantes manejan los comandos básicos del programa, como también otros específicos que fueron explorados en clases anteriores al desarrollo de la propuesta actual, como por ejemplo los que les permite la construcción de una recta dados dos puntos, construcción de rectas paralelas y perpendiculares, de segmento y mediatriz, el cálculo de longitud de segmento, la construcción de ángulo y bisectriz, la medición de ángulos y construcción de polígonos.

Cada actividad busca promover el aprendizaje colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta y la autonomía de los estudiantes, donde el rol del docente es orientador y facilitador. Con este fin y como estímulo para la participación, en las actividades los estudiantes pudieron ir

acumulando puntos (como un juego) para obtener un premio finalizado el tema. El puntaje pretendió reflejar el avance de las producciones alcanzadas, sirviendo como motivación a seguir aprendiendo.

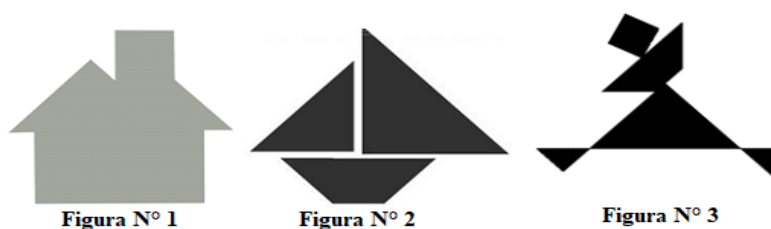
Como instrumentos para el seguimiento de las actividades se elaboraron registros documentales de las mismas. También se analizaron los trabajos individuales de los alumnos, se guardaron las producciones realizadas de las diferentes actividades, tanto en el seguimiento de progreso del uso del software como en la comprensión del tema planteado.

- **Actividad n°1. Tangram**

Objetivo: que los estudiantes reconozcan las figuras geométricas que componen el Tangram y armen mediante diferentes movimientos las figuras asignadas, como trabajo exploratorio y/o de manipulación. Contenidos: figuras geométricas planas básicas que componen el Tangram (triángulos, cuadrados y paralelogramos).

El Tangram es un juego chino muy antiguo llamado Chi Chiao Pan, que significa tabla de la sabiduría. El rompecabezas consta de siete piezas o “tans”: cinco triángulos de diferentes tamaños, un cuadrado y un paralelogramo. El juego consiste en usar todas las piezas para construir diferentes formas, con la posibilidad de armar más de 1.600 figuras.

Usando todas las piezas del Tangram que recibes en el sobre, intenta reproducir las siguientes figuras, una a una. El alumno/a que termina de armar la Figura 1, acumulará 10 puntos.



- **Actividad n°2. El Tangram en GeoGebra**

Objetivo: promover en los estudiantes a través del Tangram virtual, nuevas formas de razonar a partir de la visualización y la exploración dinámica de los objetos geométricos asociados al tema de estudio. Contenidos: movimientos en el plano de rotación y traslación de las figuras planas que constituyen el Tangram.

Desde el enlace <https://www.geogebra.org/classic/gg4csjke> accede al Tangram confeccionado en GeoGebra. Moviendo las piezas con el mouse (de la figura que está a la derecha):

a) Distingue la acción de los puntos rojo y azul en cada figura. Luego completa:

El punto rojo me permite.....

El punto azul me permite.....

b) Reproduce las imágenes de la actividad anterior, usando todas las piezas del Tangram virtual.

c) ¿Cuántas figuras de cuatro lados puedes armar combinando sólo dos piezas del Tangram virtual? NO vale usar dos veces la misma pieza. Dibuja las combinaciones que lograste en la hoja que se anexa y luego pégala en tu cuaderno.

El alumno/a que responda por escrito primero el apartado c), sumará 10 puntos.

- **Actividad N° 3. Propuesta para realizar en grupos de 2 ó 3 alumnos**

Objetivo: que los estudiantes construyan cuadriláteros y los identifique, según ciertas condiciones o características requeridas, usando todas las piezas del Tangram. Contenidos: propiedades del cuadrado, rectángulo y rombo.

A Luis le gusta jugar con el Tangram y se le ocurrió armar figuras geométricas de cuatro lados, usando todas las piezas del rompecabezas. Las primeras que armó tenían las siguientes características:

- cuatro lados congruentes y cuatro ángulos interiores rectos.
- dos pares de lados paralelos congruentes y cuatro ángulos interiores rectos.
- cuatro lados congruentes y cuatro ángulos interiores no rectos.

- a) Intenta armar las figuras que formó Luis con el Tangram en material concreto. ¿Qué nombre recibe cada una?
- b) Identifica los elementos básicos que componen cada figura geométrica.

Resultados y reflexiones acerca de la implementación de la propuesta

La primera actividad se diseñó partiendo del uso del Tangram plano construido en material concreto con la finalidad de que los alumnos y alumnas las clasifiquen según su geometría, de tal forma que moviendo las piezas puedan construir diferentes formas despertando la curiosidad y el entusiasmo por el trabajo exploratorio en la clase de matemática (Imagen 1).

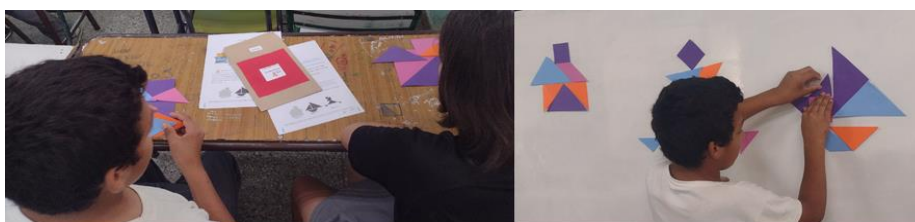


Imagen 1: Alumnos armando figuras con todas las piezas del Tangram

La segunda actividad requería de un Tangram virtual construido en GeoGebra. Se consideraron dos tipos de construcciones, una en la cual las piezas al moverlas desde uno de sus vértices se deformaban completamente y otra en la que las piezas fueron construidas teniendo en cuenta las propiedades de los objetos geométricos involucrados, resaltando dos vértices uno de color azul y otro de color rojo, buscando que los estudiantes reconozcan la acción de rotar y trasladar como movimiento en el plano (Imagen 2).

La Actividad 3, presentaba un trabajo geométrico para que los alumnos reconozcan los cuadriláteros (Imagen 3), apelando a un vocabulario mínimo para la socialización y dando lugar a la búsqueda de nuevos conocimientos que les permitan ampliar su terminología para alcanzar argumentaciones más sólidas vinculadas a las producciones realizadas a partir de las actividades generadas.

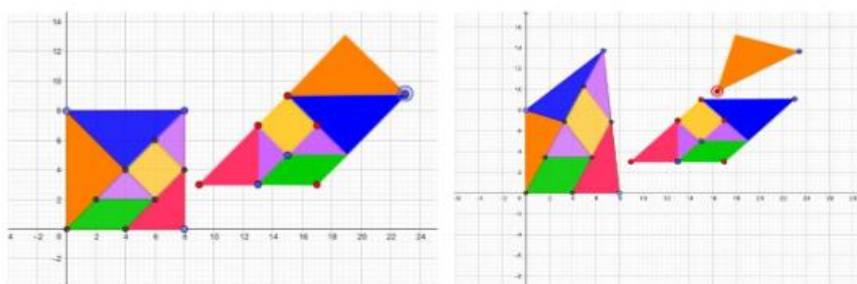


Imagen 2: Manipulación de figuras geométricas utilizando el Tangram virtual: imagen capturada del trabajo de los alumnos

La propuesta ha permitido a los estudiantes conocer una forma atractiva de reconocer formas geométricas a partir del juego con el Tangram construido en material concreto y el Tangram virtual en GeoGebra. Ambos recursos movilizaron la curiosidad, sobre todo al momento de armar una figura solicitada, ya que en muchas de las situaciones se quedaban con alguna pieza en la mano. Además, el Tangram virtual les puso como desafío el trabajo con netbook, logrando desarrollar destrezas vinculadas al manejo de las computadoras y “dominar” el juego en su formato digital.



Imagen 3: Construyendo cuadriláteros como parte de la Actividad 3, en grupo

El puntaje como premio que se acreditaba al final de cada actividad, también los motivó al trabajo en clase y a ver quién ganaba así anotaba primero los puntos. Aunque en las primeras instancias se visualizaba un juego, al transcurrir cada diseño, el trabajo exploratorio fue volviéndose cada vez más interesante, requiriendo de la atención y el análisis propio de cada figura geométrica, bajo los conocimientos previos de los estudiantes. Cabe destacar que en este año del secundario los alumnos y las alumnas ya conocen las figuras geométricas como rectángulo, cuadrado y rombo, pero no así las propiedades en su totalidad.

El acceso al Tangram virtual les permitió conocer y descubrir que el mismo juego que podían manipular, ahora lo encontraban en sus netbooks fácilmente accediendo desde un enlace que los llevaba al rompecabezas en GeoGebra. No fue éste el primer encuentro con el programa pues ya venían trabajando con anterioridad construcciones de rectas perpendiculares y paralelas, mediatriz, intersección entre dos rectas, segmento, longitud, punto, entre otras funciones que contiene el programa.

El mover el Tangram del lado izquierdo, desde un vértice, los sorprende deformándose y diciendo “Seño...esto está mal”. Luego empezaron a probar con las piezas del lado derecho y se encontraron con que estas no se deformaban. Un alumno, descubrió que desde los vértices de colores era posible la rotación y el traslado de las figuras, por lo que no le resultó difícil hacer referencia a los movimientos de traslación y rotación. Todos comprendieron la funcionalidad de los puntos y eso les permitió armar las figuras solicitadas.

Conclusiones

Respecto al objetivo propuesto para este trabajo de investigación, las conclusiones obtenidas son positivas.

La experiencia didáctica aumentó el entusiasmo de los alumnos y alumnas ante la propuesta del uso de material concreto y tecnológico. Las actividades se desarrollaron en un clima agradable, en el que todos trabajaban, evidenciando un compromiso en el aprendizaje del tema. Algunos mostraron facilidad para el manejo del recurso en material concreto y el virtual, otros con un poco de dificultad se animaron a armar y mostrar sus producciones.

El trabajo argumentativo, fue escaso ya que los estudiantes no manejan demasiado vocabulario o no están acostumbrados a justificar los pasos o procedimientos desarrollados; sólo se limitaron a mostrar lo que han realizado desde sus lugares o en la pizarra. Sin embargo, preguntaban y se mostraron atentos a las propuestas, esperando más desafíos y comunicaron oralmente, que les gusta trabajar con las computadoras.

Se pudo observar que, a partir del juego, la visualización y la exploración dinámica, las clases resultaron más participativas y atractivas, contribuyendo significa-

tivamente en la formación de los primeros conceptos y conocimientos geométricos asociados a los cuadriláteros.

El aporte de este trabajo radica en organizar el uso de los recursos didácticos para la enseñanza de la geometría en el primer año del secundario, con miras de una IA permanente.

Bibliografía

- Borrego, Emanuel, Ciappina, Débora y Médico, Camila** (2019). Construcciones imposibles” de cuadriláteros con GeoGebra. Una experiencia en el aula. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/78484>
- Consejo General de Educación** (2022). *Diseño Curricular de Educación Secundaria del CGE de la provincia de Entre Ríos* (Tomo I. Ministerio de Gobierno, Justicia y Educación. Gobierno de Entre Ríos. <https://aprender.entrerios.edu.ar/wp-content/uploads/2022/06/Diseno-Curricular-de-Educacion-Secundaria-Tomo-I.pdf>
- Diaz-Nunja, Luis, Rodríguez-Sosa, Jorge y Lingán, Susana** (2018). Enseñanza de geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y Representaciones*, 6(2), 217-251. <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2018.v6n2.251>
- Fabro, Ana** (2018). La enseñanza de las ciencias mediada por TIC: algunas reflexiones. *Revista Binacional Brasil Argentina*, 7(2), 278-287.
- Flores, Pablo** (2005). *La Geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. Editorial Graó.
- Giarrizzo, Alicia** (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria. Materiales didácticos para favorecer el estudio de figuras o cuerpos geométricos. *Revista de Educación Matemática*, 36(2), 47-66.
- Hernández Sampieri, Roberto, Fernández Collado, Carlos y Baptista Lucio, Pilar** (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill Iberoamericana.
- Jaraba Gutierrez, Alirys** (2020). GeoGebra: herramienta didáctica para fortalecer competencias geométricas en Educación Media. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 105, 165-188.
- Lin, Chiu-Pin, Shao, Yinjuan, Wong, Lung-Hsiang y Niratmitranon, Jitti** (2011). The impact of using synchronous collaborative virtual tangram in children's geometric. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 10(2), 250-258.

Maggio, Mariana (2012). *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Paidós.

Tareas de aprendizaje para el desarrollo de la comunicación matemática en un ambiente ludificado

DIEGO ALEJANDRO MIRANDA MIRANDA

damirandam@upn.edu.co

CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA

cgrendonm@upn.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional - UPN

Resumen

Se presenta una experiencia de aula derivada del diseño e implementación de una secuencia de tareas en un ambiente digital ludificado, dirigida al desarrollo de la comunicación en matemáticas en estudiantes de secundaria. En particular, se comentan aspectos conceptuales como la caracterización de la competencia comunicativa en el aula de matemáticas y de un ambiente ludificado para el desarrollo de las tareas. Asimismo, se comentan los aspectos metodológicos seguidos, basados en las estrategias de revisión documental y experimento de enseñanza. Finalmente, se presentan algunas conclusiones relacionadas con una primera implementación de las tareas, haciendo énfasis en la observancia lograda de las características relacionadas con la competencia comunicativa.

Palabras clave: comunicación matemática / ludificación / ambiente de aprendizaje / tareas de aprendizaje

Introducción

En el marco de los procesos de las matemáticas escolares que se plantean en las políticas curriculares colombianas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998; 2006), se reconoce en la comunicación un proceso de particular relevancia en la formación escolar por cuanto permite la exteriorización de ideas matemáticas a los estudiantes, lo que a su vez abre las posibilidades al trabajo con representaciones de los objetos matemáticos y con formas de argumentación que puedan emerger en el marco de dicho proceso comunicativo.

Precisamente, la importancia de este proceso en la clase de matemáticas ha dado lugar a investigaciones que versan sobre el papel de la comunicación en el aprendizaje de las matemáticas (*v. g.* Radford, 2006; Morgan *et al.*, 2014) e incluso la existencia de una línea dedicada a las relaciones entre matemáticas y lenguaje en el reciente CERME-13 (Drijvers *et al.*, 2023). Sin embargo, al realizar una búsqueda en los referentes de calidad colombianos (MEN, 2006) no fue posible encontrar una definición concreta sobre lo que se entiende por comunicación en el contexto colombiano de las matemáticas escolares, situación que no sucede con los otros cuatro procesos contemplados (formulación, tratamiento y resolución de problemas; modelación; razonamiento y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos).

Por otra parte, en relación con la pertinencia de ambientes de aula permeados por la ludificación¹, autores como Borrás (2015) y Colon *et al.* (2018), resaltan algunas bondades de este tipo de ambientes de aprendizaje como, por ejemplo, el desarrollo de la motivación, la posibilidad de retroalimentación constante, la generación en el estudiante de mayor compromiso e interés por su aprendizaje, la vinculación con el contenido y tareas en sí, entre otros.

Considerando lo anterior, en el marco de un trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), se diseñó e implementó un conjunto de tareas de aprendizaje en un ambiente ludificado, dirigidas a estudiantes en último año de escolaridad (grado undécimo en el sistema colombiano) y que procuran promover sus competencias comunicativas en la clase

1 Si bien el trabajo sigue en líneas generales las ideas del enfoque de *gamification*, el cual ha sido popularmente traducido y aceptado como “gamificación”, en el trabajo se prefiere atender las disposiciones de la RAE al sugerir que una traducción más afortunada es “ludificación”.

de matemáticas. Así mismo, resulta importante señalar que el objeto matemático protagonista de las tareas fueron las medidas estadísticas de tendencia central y de dispersión, ello por cuanto eran los asuntos matemáticos que los estudiantes estarían abordando en su institución educativa al momento de la implementación de las tareas, pero además porque se reconoce en la Estadística un contexto oportuno para el desarrollo de la comunicación en el aula.

Marco teórico

En el desarrollo del trabajo se realizó una revisión documental alusiva a la comunicación matemática en el contexto escolar, la ludificación y el diseño de tareas. Enseguida se comentan de forma general estos tres asuntos.

Comunicación en matemáticas escolares

Inicialmente, es importante identificar distintas definiciones que permitan tener una percepción más amplia de lo que es la comunicación. Para algunos autores como Villalba (2006) comunicar es “la acción de poner algo en común (...) es el proceso que posibilita la comprensión mutua y el establecimiento de relaciones de interferencia entre individuos y grupos, mediados e influenciados por diversos factores” (p. 10). En este caso el autor plantea la comunicación como una acción cuya finalidad es la interacción entre distintos individuos, lo cual, autores como Meneses (1999) y Ponte *et al.* (2007) también resaltan. La mayor distinción entre estos autores es que mientras Meneses (1999) ve la comunicación como una forma de interacción social, Ponte *et al.* (2007) la plantea de manera similar, pero además como una organización y transmisión de informaciones.

Por otra parte, al revisar documentos alusivos a la comunicación en la educación matemática, se percibe la existencia de una relación entre comunicación y lenguaje (v. g. Fandiño, 2010; Goñi y Planas, 2011; D’Amore, 2004). En consecuencia, se comentan enseguida, y de manera general, algunos aspectos sobre el lenguaje en el contexto de las matemáticas escolares.

Autores como Vieyra (2010), Goñi y Planas (2011), y Gonçalves y Fernandes (2010) en un intento de definir lo que es la comunicación, expresan la importancia

de moverse entre “lenguajes” o apropiarse de ellos; importancia que se resalta en los Lineamientos Curriculares colombianos: “la comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas” (MEN, 1998, p. 74).

Por su parte, Díaz (2009) propone una transición de formación comunicativa compuesta por dos tipos de lenguaje: el lenguaje verbal y el de las matemáticas, dividiendo este último en otros tres: el algebraico, el geométrico y el aritmético. De igual forma, Calderón (2018) divide el lenguaje verbal en dos tipos, el lenguaje oral y el lenguaje escrito. Respecto al lenguaje verbal, Calderón (2018) menciona que las expresiones discursivas dan herramientas al profesor para identificar las elaboraciones y evoluciones de conocimiento de los estudiantes. Por otro lado, las exigencias discursivas en el aula y las participaciones orales las considera novedosas y provechosas, debido a que el discurso requiere del desarrollo de aprendizajes respecto a cómo participar asertivamente, siendo esta participación oral aquella que también orienta y regula las actividades en el aula permitiendo que los estudiantes se manifiesten en aspectos afectivos, emocionales y de intencionalidades con lo que trabajan y frente a lo que se plantea².

Haciendo énfasis en la competencia comunicativa en la educación matemática, es importante también abordar la concepción de comunicación que plantea el MEN en los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas (MEN, 1998), siendo vista la comunicación como una “necesidad común de los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y actividades de trabajo” (p. 73), y que se relaciona con la interacción constante de los estudiantes en el aula de matemáticas.

Al expresar que la comunicación es una necesidad común en los seres humanos y en su diario vivir, el MEN (1998) presenta características que pueden brindar evidencia de este proceso, algunos ejemplos son: expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas; producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes, y hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.

Producto del desarrollo comunicativo, según el MEN (1998) los estudiantes deberían ser capaces de leer, interpretar y conducir investigaciones matemáticas en

2 No es objeto del trabajo ahondar en aspectos afectivos o emocionales a través de la comunicación de los estudiantes, por lo que no se entra en el detalle su explicación.

clase; discutir, escuchar y negociar frecuentemente sus ideas matemáticas con otros estudiantes en forma individual, en pequeños grupos y con la clase completa; escribir sobre las matemáticas y sobre sus impresiones y creencias tanto en informes de grupo, diarios personales, tareas en casa y actividades de evaluación, entre otras.

Finalmente, con base en la revisión documental elaborada, se propone una definición inicial, en el marco del trabajo de grado, sobre lo que se entenderá por comunicación en el contexto de las matemáticas: la comunicación en matemáticas es un proceso de interacción social entre individuos que comparten conocimientos matemáticos y formas de argumentar e interactuar (siendo estos los elementos básicos de la comunicación), que se reflejan en la apropiación y uso de un lenguaje común. Entre las finalidades principales de la comunicación en matemáticas se encuentran poder expresar, representar y entender situaciones e ideas matemáticas; así como organizar y transmitir los conocimientos que la comunidad de individuos produce.

Ludificación

Como principal recurso para plantear las tareas que promuevan la competencia de comunicación matemática se empleó la plataforma Classcraft,³ entendiéndose esta como un ambiente ludificado en el cual residen las tareas. Por lo tanto, se presenta un estudio breve sobre la ludificación y su importancia en la enseñanza y aprendizaje.

La ludificación según Gonzáles (2019) (si bien la autora utiliza el término gamificación), es una estrategia de innovación educativa que han asumido profesores recientemente en búsqueda de aumentar la motivación por el aprendizaje de sus estudiantes. Según Borrás (2015) esta estrategia consiste en usar mecánicas, elementos y técnicas de diseño de juegos con la finalidad de involucrar a un público en general; el autor resalta además que algunas de las ventajas de ludificar son que permite: activar la motivación por el aprendizaje, la retroalimentación constante, una mejor medición de los resultados por medio de sistemas de puntos y niveles,

³ De forma general se trata de una plataforma digital que contribuye en la gestión del aprendizaje y la evaluación educativa a partir de la implementación de mecánicas de juegos. Para información más detallada se puede revisar la página oficial: www.classcraft.com

generar competitividad a la vez que colaboración, entre otros. Adicionalmente, es fácilmente adaptable y tiene características propias de modelos de aprendizaje tanto conductistas como constructivistas.

Como se ha mencionado antes, la ludificación utiliza los elementos del juego con la intención de poder adaptar ambientes de aprendizajes que sean significativos y motivadores para los estudiantes, pues bien, un factor clave en la ludificación es la motivación según lo menciona Gonzáles (2019), estos elementos varían entre aspectos narrativos, recompensas, interacciones, estatus, retroalimentación entre otros.

Para el caso específico de este trabajo, en la interfaz de la plataforma Classcraft se pueden evidenciar elementos propios del juego tales como permitir crear un hilo narrativo a medida que se puede añadir tareas; manejar un sistema de experiencia, puntos y vida como recompensas dependiendo el desempeño en las tareas propuestas; realizar autoevaluación y heteroevaluación entre los estudiantes utilizando una de sus herramientas, entre otras. No obstante, en este punto es importante subrayar que el desarrollo de la comunicación en la clase de matemáticas se espera atender desde el diseño de las tareas y no desde la plataforma Classcraft per se.

Tareas de aprendizaje

Para el diseño de las tareas de aprendizaje se siguió la propuesta de Gómez *et al.* (2018), quien concibe estas tareas como una “demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje que el profesor propone a los estudiantes” (p. 198). Bajo esta propuesta conceptual, las tareas requieren de actividades que realizan los estudiantes y profesores con el fin de avanzar en la consecución de diferentes objetivos de aprendizaje, así como a la superación de errores y dificultades. Como se puede reconocer, esta es una mirada amplia sobre la concepción de tarea, que permite múltiples interpretaciones sobre lo que dicha “demanda estructurada” implica de forma concreta en la clase de matemáticas. Para el caso de este trabajo, estas tareas se componen de diferentes ítems propuestos a los estudiantes, todos en relación con un mismo contexto, que van en un aumento de la demanda cognitiva y que se dirigen al alcance de los objetivos propuestos, los cuales, en este caso, están totalmente relacionados con el desarrollo de la comunica-

ción a través del estudio de situaciones asociadas a las medidas de tendencia central y de dispersión estadística.

Adicionalmente, las tareas de aprendizaje en la perspectiva de Gómez *et al.* (2018) contienen siete elementos que las describen y que son adoptados en su totalidad en este trabajo. A saber: requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento que prevé, interacción que promueve y temporalidad.

De manera general, los requisitos refieren a los conocimientos previos que los estudiantes requieren para abordar la tarea; las metas configuran los propósitos que fueron delineados para desarrollarse a través de las tareas así como a la explicación de las dificultades que la tarea pretende contribuir a superar; la formulación refiere al texto o a las indicaciones concretas que se les entregan a los estudiantes; los materiales son recursos diseñados con fines didácticos que se pueden emplear en el aprendizaje de un concepto particular; en los tipos de agrupamiento el profesor declara las formas de trabajo que habrá en la tarea (individual, en pequeños grupos o en el consenso de toda la clase), este asunto tiene que ver con el siguiente que es la interacción que promueve la tarea; estas interacciones se pueden dar entre estudiantes, estudiante-profesor, grupos pequeños o grupos grandes; finalmente, la temporalidad se relaciona con la estimación de tiempo que el profesor propone alrededor de la duración que tendrá el desarrollo de la tarea, tanto en su totalidad como en cada una de las fases o etapas que la puedan constituir.

Aspectos metodológicos

En este apartado se comentan los asuntos tenidos en cuenta para el desarrollo del trabajo, así como las fases que se consideraron en cada momento. Si bien el trabajo no se ajustó de forma rigurosa a una metodología de investigación específica, de manera general el trabajo sí se asume desde una visión cualitativa, compartiendo además las miradas del enfoque fenomenológico de la educación matemática, el cual aboga por obtener descripciones, explicaciones e inferencias que sean significativas en el contexto de estudio (Camargo, 2021), y que, en consecuencia, se reconoce como una mirada situada, cuyos resultados están condicionados por el contexto en que ocurren los fenómenos educativos de análisis.

También es posible reconocer en el desarrollo del trabajo la presencia de algunos aspectos de las estrategias investigativas revisión documental y experimento de enseñanza. Por una parte, la revisión documental fue protagónica al momento de recopilar la información necesaria para la construcción del marco conceptual del trabajo. Al respecto, se reunieron alrededor de 15 documentos académicos (v. g. tesis, artículos, memorias) que versan sobre comunicación, tareas de aprendizaje o ludificación. Por otra parte, la estrategia experimento de enseñanza que consiste en el “diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico” (Camargo, 2021, p. 86) fue un elemento organizador para el diseño de las tareas.

Precisamente, en relación con el diseño de las tareas, se siguieron algunas de las etapas que sugiere Camargo (2021) para un experimento de enseñanza, específicamente; 1. Fundamentar conceptualmente sobre el desarrollo de la comunicación en la clase de matemáticas; 2. Formulación de una conjetura de estudio, que en este caso se relaciona con las posibilidades que tienen las tareas diseñadas de promover el desarrollo de la comunicación en la clase de matemáticas y 3. La planeación de la secuencia de tareas (atendiendo a los elementos señalados previamente de la propuesta de Gómez *et al.*, 2018). Aunque se conciben más pasos en la realización del experimento, estos no fueron seguidos de forma literal en la realización de este trabajo. En todo caso, se podrían agregar dos más: 4. Validación de la propuesta de tareas con un par experto a quien se le solicitó su opinión para hacer un reajuste de las tareas previo a su implementación; y 5. Experimentación de las tareas. De momento, debido a tiempo, los análisis retrospectivos frutos de la experimentación no han sido empleados con el fin de reajustar las tareas.

Diseño de las tareas

A continuación, se presentan extractos de una de las tareas diseñadas (por las limitaciones en la extensión del documento no es posible mostrarlas todas), haciendo algunos comentarios en relación con los elementos planteados en el marco conceptual.

Inicialmente, se presentan las metas de la Tarea 1, que aluden a los propósitos formativos que esta persigue, atendiendo a la estructura de tarea de aprendizaje planteada por Gómez *et al.* (2018). Cabe resaltar que estas metas recogen acciones que llevan a cabo los estudiantes cuando desarrollan la competencia comunicativa en la clase de matemáticas. Este listado de acciones fue fruto de la revisión documental relativa a la comunicación matemática:

Metas

Los propósitos de la tarea, relacionados con el desarrollo de la comunicación matemática en el aula, son que lo estudiantes:

- Reconozcan la existencia de conexiones entre los distintos sistemas (registros) de representación de las ideas matemáticas (i. e., físicas, pictóricas, graficas, simbólicas, verbales y mentales)
- Construyan conocimientos (v. g. ideas, nociones, significados, representaciones) a partir del trabajo con las distintas formas de representación de una idea matemática o de las interacciones con otros individuos de la comunidad.
- Cambien de un sistema de representación de una idea matemática a otro.

Por otra parte, se presenta una situación que hace parte de la Tarea 1. Al respecto, cabe resaltar que las tareas propuestas por los autores son la herramienta principal para desarrollar el componente comunicativo de los estudiantes en la clase de matemáticas; sin embargo, al ser tareas que se encuentran inmersas en el ambiente ludificado Classcraft, se decide contextualizarlas a través de una narrativa propia de un juego.

En consonancia con lo anterior, la situación se inicia con un relato relacionado con unos sabios que indagan sobre unas plantas medicinales. Este contexto hace parte de la narrativa empleada en el ambiente ludificado de la plataforma Classcraft. La inclusión de un contexto y de elementos narrativos atiende a las características de la ludificación que se pueden evidenciar en la plataforma. Adicionalmente, se presenta una tabla de doble entrada que deberá ser interpretada posteriormente por los estudiantes. Enseguida la situación:

Situación 1 (Tarea 1):

Antiguamente, los sabios de la montaña lograron recolectar información sobre algunas plantas medicinales (Setosa, Versicolor, y Virginica) y su efectividad en 100 aldeanos que fueron contagiados por distintas enfermedades y tipos de veneno. A continuación, en la Tabla 1, se presenta la cantidad de aldeanos que consumieron determinada especie de planta y que fueron curados en un tiempo específico que se cuenta desde que ingirieron la planta.

Tipos de planta	Setosa	Versicolor	Virginica
Cantidad de aldeanos curado en menos de una semana	9	25	9
Cantidad de aldeanos curados de 1 a 4 semanas	20	1	11
Cantidad de aldeanos no curados	5	12	8

Tabla 1: Frecuencia de aldeanos enfermos

Asimismo, se presentan en la Situación 1 algunas preguntas (en relación con la información presentada en la situación 1) que deben responder los estudiantes a partir de la interpretación de la Tabla 1. Estas preguntas buscan que los estudiantes socialicen las justificaciones de sus respuestas y concierten elementos para la lectura, comprensión y uso de una tabla de doble entrada; asunto que se corresponde con la meta relativa a construir conocimiento a partir de las interacciones con otros individuos de la comunidad, en tanto no han estudiado previamente este tipo de tablas. Enseguida las preguntas:

El cazatesoros quiere conocer información sobre la eficacia de las plantas para curar la enfermedad de los aldeanos. Para eso, les pregunta a los héroes lo siguiente:

- De las tres especies, ¿cuál es la que más cura a los aldeanos? ¿Por qué?
- De las tres especies, ¿cuál es la que menos cura a los aldeanos? ¿Por qué?
- Un aldeano recientemente enfermo tomó una planta Versicolor para curarse. Si al cabo de nueve días no ha sanado, ¿cuál planta debería tomar ahora? ¿Por qué?

Se reconoce, pues, que la Situación 1 permite obtener distintos tipos de justificaciones en las respuestas que ofrezcan los estudiantes. Así, aludiendo a las ideas de Fandiño (2010), se comentan aspectos mínimos que deben tener dichas justificaciones para poder evidenciar la construcción de conocimiento. Específicamente, se espera que los estudiantes expresen con claridad y de manera razonada y ordenada sus ideas; así mismo, que logren sostenerlas apoyándose de diversos sistemas de representación como diagramas, esquemas, dibujos, expresiones y simbología matemática, entre otros.

Asimismo, dado que las tareas se desarrollan en grupos, la resolución de las preguntas implica un trabajo colaborativo, lo cual es otra de las características de la ludificación (González, 2019); pero también, la interacción entre los estudiantes, es un elemento sustancial de la propuesta de Gómez *et al.* (2018) sobre tareas de aprendizaje.

Finalmente, en relación con el diseño de las tareas, cabe mencionar que se diseñaron tres tareas, las primeras dos relacionadas con el estudio de gráficas estadísticas (“convencionales” para los estudiantes, como diagramas de barra o circulares; y “no convencionales”, como diagramas rectangulares o radiales); la tercera tarea, por su parte, apunta al estudio de medidas de tendencia central. Si bien, los objetos estadísticos cambian de una tarea a la otra, no se pierde de vista que el foco de todas las tareas es el desarrollo de la competencia comunicativa.

Resultados y conclusiones

Para el análisis de la implementación de las tareas se evaluaron las respuestas de los estudiantes atendiendo a una rúbrica planteada por Fandiño (2010) en la que se describen criterios de evaluación asociados a la competencia comunicativa y diferentes niveles consecución de dichos criterios por parte de los estudiantes. Los criterios considerados son:

- El estudiante utiliza los símbolos, las convenciones y la terminología matemática con claridad y exactitud.
- El estudiante organiza, presenta y sostiene sus ideas recurriendo a diferentes formas de comunicación. (por ejemplo: esquemas, diagramas, bosquejos, diseños).

- El estudiante expresa razonamientos o presenta argumentos con el objetivo de hacer valer su punto de vista matemático con claridad, pertinencia y profundidad.
- El estudiante escucha los argumentos y los razonamientos de los otros, y los toma en consideración con eficacia, lógica y pertinencia.

En la implementación de las tareas ha sido posible evidenciar el cumplimiento de estos criterios en diferente orden. Es decir, en el desarrollo de las tareas los estudiantes se motivan a participar en la clase de matemáticas, haciéndose parte de una micro comunidad de aprendizaje, lo cual redundando en su capacidad comunicativa en el aula de matemáticas. El tipo de preguntas planteadas (preguntas abiertas, en las que se debe argumentar, no todas tienen una única respuesta) propende por la estimulación de la comunicación. En la actualidad, las tareas se continúan implementando con el fin de cualificarlas y refinar los análisis que se deriven.

A través del diseño e implementación inicial de las tareas se evidencia la necesidad de continuar en la actualización de los currículos escolares (pero también en los de formación inicial de profesores) en lo que respecta al desarrollo de la competencia comunicativa, así como también a la incorporación y uso de recursos tecnológicos que puedan ser ludificados. Por otra parte, otra de las consideraciones finales derivada del proyecto se relaciona con lo enriquecedor que resulta para los resolutores de las tareas tener la posibilidad de comunicar sus ideas matemáticas en el marco de una comunidad que interactúa y en la cual las verdades absolutas no devienen del profesor, asuntos que usualmente se vivencian en aulas que atienden a modelos de enseñanza tradicional.

Bibliografía

- Borras, Oriol** (2015). *Fundamentos de la gamificación*. Gabinete de Tele-Educación Vicerrectorado de Planificación Académica y Doctorado.
- Camargo, Leonor** (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia.
- Colon, Ana-M, Jordán, Juan y Agredal, Miriam** (2018). Gamificación en educación: una panorámica sobre el estado de la cuestión. *Educação e Pesquisa*:

- Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo*, 44.
<https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844173773>
- D'Amore, Bruno** (2004). El papel de la Epistemología en la Formación de Profesores de Matemática de la Escuela Secundaria. *Cuadernos del Seminario en Educación*, N. 8. Universidad Nacional de Colombia.
- Díaz, Héctor** (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y educadores*, 12(3), 13-31.
- Drijvers, Paul, Csapodi, Csaba, Palmér, Hanna, Gosztonyi, Katalin y Kónya, Eszter** (Eds.) (2023). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Fandiño, Martha** (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Editorial Magisterio.
- Gómez, Pedro, Mora, María y Velasco, Carlos** (2018). Análisis de instrucción. En Gómez, P. (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Universidad de los Andes.
- González, Carina** (2019). Gamificación en el aula: ludificando espacios de enseñanza-aprendizaje presenciales y espacios virtuales. En L. Moreno (Ed.), *Nuevas tendencias educativas impulsadas por la tecnología* (pp. 109-128). Universidad de la Laguna.
- Gonçalves, Matilde y Fernandes, José** (2010). A comunicação promovida por futuros professores na aula de matemática. *Zetetiké*, 18(34), 109-154.
<https://doi.org/10.20396/zet.v18i34.8646681>
- Goñi, Jesús y Planas, Nuria** (2011). Interacción comunicativa y lenguaje en la clase de matemáticas. En J. Goñi (Coord.), *Didáctica de la Matemática* (pp. 167-197). Graó.
- Meneses, Luís** (1999). Matemática, linguagem e comunicação. *Atas do Encontro Nacional de Professores de Matemática. ProfMat*, 99. <http://www.educ.fc.ul/docentes>.
- Ministerio de Educación Nacional** (1998). *Lineamientos curriculares Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional** (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Morgan, Candia, Craig, Tracy, Schuette, Marcus y Wagner, David** (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM Mathematics Education*, 46, 843-853. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9>.

- Ponte, Joao, Guerreiro, António, Cunha, Helena, Duarte, José, Martinho, Helena, Martins, Cristina, Menezes, Luís, Menino, Hugo, Pinto, Hélia, Santos, Leonor, Varandas, José, Veia, Luciano y Viseu, Floriano** (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74. <http://www.scielo.mec.pt/pdf/rpe/v20n2/v20n2a03.pdf>
- Radford, Luis** (2006). Communication, apprentissage et formation du je communautaire. En B. D'Amore y S. Sbaragli (Eds.), *Proceedings of the 20th National Italian Conference "Incontri con la Matematica"* (pp. 65-72). Pitagora Editrice S.R.L.
- Villalba, Rodrigo** (2006). *Teoria da comunicação: conceitos básicos*. Ática.
- Vieyra, María** (2010). *Comunicación matemática en las primeras edades: representación de problemas aritméticos*. Universidad Autónoma de Barcelona.

Subprocesos de modelización matemática desarrollados y modelos producidos por un grupo de estudiantes de segundo año del nivel secundario

VALENTINA ALBRECHT

valealbrecht21@gmail.com

MARÍA FLORENCIA CRUZ

mfcruz@fhuc.unl.edu.ar

Universidad Nacional del Litoral

ANTONIO MORENO

amverdejo@ugr.es

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se muestra el diseño y desarrollo de un escenario de modelización matemática con estudiantes de segundo año de la educación secundaria. Específicamente, se presenta el análisis de acciones que desarrolla el estudiantado en los subprocesos del proceso de modelización matemática vivido y los modelos producidos. Del análisis realizado, se logra reconocer que el estudiantado se involucró en la resolución del escenario de modelización matemática (geométrica) desarrollando el proceso de modelización matemática, produciendo modelos a partir de representaciones escritas, gráficas y dinámicas, y desarrollando contenidos prescritos en los documentos curriculares para la educación obligatoria.

Palabras clave: modelización matemática / educación secundaria / geometría

Introducción

En este trabajo se presenta el diseño e implementación de un escenario de modelización matemática (esta expresión se define en el apartado marco teórico) que pretende propiciar el desarrollo del trabajo geométrico con estudiantes de segundo año de educación secundaria.

Esto es relevante por diversas cuestiones. En primer lugar, la Geometría en los últimos años en Argentina, tiene menor presencia en la educación obligatoria que otros dominios (Grossi y Sgreccia, 2016; Cruz, 2023). En segundo lugar, la necesidad de implementar procesos de modelización matemática (MM) con estudiantes de secundaria forma parte de las recomendaciones curriculares nacionales (NAP, 2011). En tercer lugar, se busca franquear barreras para la enseñanza a través de modelización matemática, como ser la falta de material apropiado y tiempo disponible para su real implementación en las escuelas (Borromeo Ferri, 2018).

Kaiser (2020) señala la necesidad de discutir cómo integrar la modelización matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje y de establecer pruebas empíricas sólidas sobre los efectos de la integración de ejemplos de modelización en la práctica escolar. Villarreal y Esteley (2013) plantean una cuestión similar, las autoras señalan que hay escasas experiencias en educación secundaria en Argentina que incorporan la modelización matemática como abordaje pedagógico. Consideraciones similares se presentan en Cruz (2023). Estas consideraciones y las demandas curriculares propias del quehacer docente en relación al desarrollo de contenidos geométricos son puntos fundamentales para resaltar la importancia de esta experiencia educativa.

En el marco de las ideas antes presentadas y tomando como caso las producciones de un grupo de estudiantes de segundo año del nivel secundario de una escuela pública de la provincia de Santa Fe, se propone reconocer acciones puestas en juego en el marco de los subprocesos del proceso de modelización matemática y estudiar los modelos producidos que dan respuesta a la problemática formulada en el marco de un proceso de modelización matemática.

Modelización matemática

En este trabajo toma un rol preponderante la noción de escenarios de modelización propuesto por Esteley (2014). Tal escenario:

[se] caracteriza por la presencia [en o fuera del aula] de un conjunto de espacios, situaciones, circunstancias, materiales, acciones e interacciones que dan sentido al proceso [de MM] y con ello, transforma ese conjunto en una experiencia cuyo fin es llevar al aula la modelización como abordaje pedagógico (p. 99).

Además, en este trabajo se apela a la noción de modelización como abordaje pedagógico (Cruz, 2023). Blomhøj (2004), en el marco de la perspectiva de la modelización matemática educativa, afirma que la modelización matemática es “una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza” (p. 20). De esta forma, el y la estudiante, percibe la aplicabilidad de la matemática a problemas reales, motivándolo y creando raíces cognitivas fuertes sobre las cuáles construir conceptos matemáticos.

El siguiente esquema (Imagen 1) muestra el proceso de modelización que recorrer quien modela:



Imagen 1: Esquema del proceso de modelización matemática (Fuente: Blomhøj, 2004/2008)

Acorde a dicho esquema, es posible describir los procesos de modelización matemática a partir de seis subprocesos, que no necesariamente se desarrollarán de forma lineal (Blomhøj y Jensen, 2003):

- a) Formulación del problema de modelización: el/la estudiante formula un problema a partir de las características de la realidad percibida que será modelizada.
- b) Sistematización: a partir del problema planteado, el/la estudiante selecciona los datos relevantes y establece relaciones con el fin de hacer posible una representación matemática que dé respuesta al problema.
- c) La representación matemática implica la traducción de los objetos y relaciones al lenguaje matemático, y el
- d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.
- e) A partir de dicha representación matemática, se interpretan los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.
- f) Además, se evalúa la validez del modelo obtenido.

Tal como se menciona anteriormente, durante el proceso de modelización matemática se producen modelos de un fenómeno o situación problemática. Biembengut y Hein (2004) definen al modelo como: “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (p.106).

Descripción del escenario de modelización matemática

El escenario de modelización matemática que se diseña se implementa en un 2º año de una escuela pública de la educación secundaria de la provincia de Santa Fe (Argentina). A partir del mismo, se busca priorizar el desarrollo y la puesta en juego de conocimientos propios del dominio geométrico, a pesar de que reconocemos que se abordan también conocimientos de otros dominios de la matemática e incluso tecnológicos.

El escenario educativo de modelización matemática que se implementa invita a observar la realidad cotidiana con “lentes” matemáticos. Dentro del escenario completo, se presenta al estudiantado la siguiente tarea de modelización que resulta fundamental y la principal a reflexionar en el marco del presente trabajo (Tabla 1):

Al observar un teselado, ¿Cuál será el motivo mínimo a partir del cual se puede componer el teselado completo? ¿Mediante qué isometrías se genera?

Tabla 1: Tarea de modelización matemática presentada al estudiantado (Fuente propia)

La implementación se realiza en cinco clases de ochenta minutos cada una. En la primera clase, se realiza una presentación breve de ciertas nociones que se considera pueden servir al estudiantado al desarrollar el proceso de modelización matemática. Específicamente se desarrolla la definición de isometría, motivo mínimo y los diferentes movimientos rígidos del plano (traslación, rotación, simetría axial y simetría central). Estas nociones se presentan brevemente a través de un video y descripciones realizadas por la docente, ya que se espera que sirvan de inspiración para el estudiantado y que puedan seguir desarrollándolas, investigando y descubriendo estas ideas a medida que avanza en el proceso de modelización matemática. A su vez, se presenta la tarea que se muestra en la Tabla 1. Durante las dos clases siguientes, se invita al estudiantado a abordar tal tarea. Y en las dos últimas clases, cuarta y quinta clase, se solicita a cada grupo que exponga oralmente su producción. Cabe mencionar que los teselados son escogidos por el estudiantado.

El grupo clase en donde se implementa la propuesta está compuesto por 28 estudiantes. Para la implementación las y los estudiantes trabajan en grupos de tres a cinco personas, favoreciendo así los intercambios, debates, confrontaciones, acuerdos, etc. En este trabajo, atendiendo a la extensión permitida, presentamos la producción realizada por uno de los grupos de estudiantes.

Antes de diseñar el escenario de MM se indagó con respecto al trabajo geométrico que había desarrollado el grupo de estudiantes y no se encuentran indicios de que hayan trabajado este dominio en primer año de la educación secundaria. A su vez, previo al desarrollo del escenario de MM se trabajó con el estudiantado la noción de teselación del plano empleando una o varias figuras geométricas. Se priorizó el trabajo empírico, la producción y validación de conjeturas al respecto.

Subprocesos y modelos producidos por un grupo de estudiantes

A continuación, se muestran y analizan producciones presentadas por el grupo. Se analizan las presentaciones realizadas por el estudiantado durante las exposicio-

nes orales, recurrimos principalmente a registros de audio y a las presentaciones en PowerPoint realizadas por el grupo.

El estudiantado al analizar el primer teselado que proponen no muestra el teselado original, sino que presentan una réplica realizada en Paint 3D (Imagen 2). El alumnado eligió un mosaico real (no hay evidencia empírica de ello) y formuló el problema. A partir de ese momento, construye la réplica.



Imagen 2: Construcción del modelo para el teselado 1

Las y los estudiantes comienzan su estudio haciendo un zoom del teselado (Imagen 3). Señalan en él el motivo mínimo y luego lo dibujan en detalle. Esto pone en evidencia el proceso de análisis y sistematización llevado adelante (Blomhøj y Jensen, 2003).



Imagen 3: Motivo mínimo del teselado 1

Finalmente muestran de forma dinámica¹ una por una las isometrías realizadas para obtener el teselado completo (Imagen 4). Lo que implica una traducción de las relaciones y el modelo creado, una representación, interpretación y validación visual (Blomhøj y Jensen, 2003). Sin embargo, confunden el concepto horizontal y vertical a la hora de describir el eje de simetría. Esta confusión no la tienen al indicar las traslaciones.

¹ Video de autor

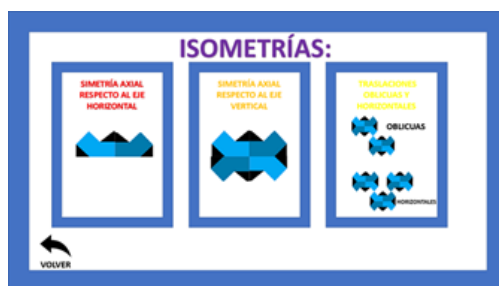


Imagen 4: Isometrías aplicadas en el teselado 1

Es de destacar que oralmente aclaran que dichas isometrías corresponden solo si no se tiene en cuenta el color, de lo contrario no se formaría el teselado.

En el estudio del segundo teselado, a diferencia del teselado anterior, muestran el teselado original, el cual corresponde a una vereda de la ciudad San Jerónimo Norte, es decir, es una imagen tomada de un lugar público, que observan en su vida cotidiana (Imagen 5). Lo que pone en evidencia la formulación de su problema (Blomhøj y Jensen, 2003).



Imagen 5: Teselado 2, imagen tomada en la vida cotidiana, y construcción de su modelo

La réplica se realiza por el grupo nuevamente en el programa Paint 3D, al igual que el anterior (Imagen 6). Consideran que el motivo mínimo es la mitad del “hueso” (expresión textual del grupo de estudiantes) y este se obtiene al “deformar un rectángulo” (expresión textual del grupo de estudiantes) (Imágenes 6, 7, 8 y 9), muestran esto dinámicamente lo cual valida (Blomhøj y Jensen, 2003) visualmente su idea y muestra el proceso de sistematización, matematización, análisis e interpretación vivido (Blomhøj y Jensen, 2003).



Imagen 6: Motivo mínimo del teselado 2



Imagen 7: Construcción del motivo mínimo del teselado 2



Imagen 8: Construcción del motivo mínimo del teselado 2



Imagen 9: Construcción del motivo mínimo del teselado 2

No analizan la posibilidad de obtenerlo mediante la deformación o la aplicación simetrías axiales horizontales y verticales, considerando un cuarto del hueso tal como se muestra a continuación:



Imagen 10: Otro posible motivo mínimo del teselado 2

Finalmente muestran dinámicamente las isometrías que determinan al teselado completo (Imagen 11). Esto permite validar visualmente que realmente con las isometrías indicadas se determina el teselado deseado, sin embargo, al igual que en el análisis del primer teselado, confunden el concepto horizontal y vertical a la hora de describir el eje de simetría y esta confusión no la tienen al momento de indicar las traslaciones. Oralmente aclaran que corresponden solo si no se tiene en cuenta el color de lo contrario no se formaría el teselado.

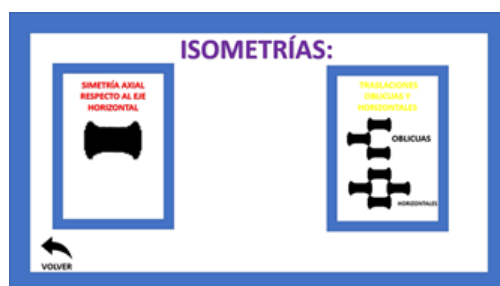


Imagen 11: Isometrías aplicadas en el teselado 2

Luego de analizar los teselados presentados, se considera que:

- En el primer caso muestran la réplica del teselado y no la figura original, por lo que no permite dar cuenta del proceso de **formulación del problema** (Blomhøj y Jensen, 2003) que vivenciaron. En cambio, en el segundo teselado si lo hacen de forma completa.
- Utilizan *Paint 3D* en la reproducción de ambos teselados por decisión del grupo, una herramienta que conocían. Esta herramienta es utilizada por el grupo en el marco de los subprocesos del proceso de modelización matemática.
- Para la construcción de los teselados mencionan de forma escrita y gráfica los motivos mínimos y las isometrías, detallando cómo realizar ambos (con respecto a qué eje, o mediante qué dirección y sentido, mediante deformaciones), lo cual favorece la comprensión de los conceptos e ideas que desarrollan. Se considera que tales motivos mínimos constituyen los modelos (Biembengut y Hein, 2004) que dan respuesta a las problemáticas que se conforman a partir de la tarea dada y los teselados seleccionados por el estudiantado. Cabe mencionar que tales modelos podrían modificarse para ser mejorados, parte formativa del proceso de modelización matemática (Blomhøj y Jensen, 2003).

- Las consideraciones dinámicas visuales que tuvieron en cuenta los estudiantes, influyen positivamente en la explicación de ellos y en la comprensión de los oyentes. De este modo se realiza una **validación** (Blomhøj y Jensen, 2003) al interior del grupo que es compartida por la comunidad clase.
- Es importante señalar que el estudiantado en todos los casos destacó que las isometrías que se aplican para determinar los teselados son **válidas** (Blomhøj y Jensen, 2003) siempre y cuando no se tenga en cuenta el color.
- Para la construcción de los teselados mencionan varias isometrías que generan al teselado, validando a partir de propiedades matemáticas los modelos producidos (Blomhøj y Jensen, 2003).
- Se observan confusiones con respecto al eje horizontal y vertical de simetría. Probablemente, confunden eje vertical con el horizontal porque la simetría axial con respecto al eje vertical completa la figura de forma horizontal y viceversa.

Se destaca que el estudiantado emplea el recurso tecnológico para explicar y mostrar dinámicamente cada motivo mínimo (modelo), deformación del mismo e isometrías que generan cada teselado (Biembengut y Hein, 2004). En este sentido, se señala que el estudiantado muestra la apropiación de los conceptos geométricos en juego y de la mediación de tecnologías al formular modelos. Si bien, en ocasiones, no logran encontrar el motivo “mínimo” que genera el teselado, se valora que hayan podido encontrar un modelo. Dichos modelos no son los únicos, ni los definitivos, en etapas posteriores se pueden analizar críticamente, completar o mejorar de manera progresiva.

Se considera que, tal como lo señalan Villarreal y Esteley (2013), la utilización de diferentes medios resultó importante debido a que el estudiantado organizó su pensamiento, transformó los modos de acceder al conocimiento y produjo modelos. En este sentido, el empleo de los medios seleccionados ha potenciado el proceso de modelización matemática e incluso el uso de los contenidos geométricos. Por ejemplo, el estudiantado al replicar los teselados en Paint 3D realizó variedad de tareas: analizó el teselado y su motivo mínimo, tomó decisiones y reflexionó con respecto a cuál o cuáles eran los movimientos rígidos en el plano que debían aplicar, para lue-

go ejecutar y validar esa idea, modificando en caso de ser necesario. Esto se reconoce al momento de la construcción de modelos, ya que los conocimientos matemáticos puestos en juego están influenciados por las tecnologías empleadas, y es probable que con otros medios no hubieran vivido la experiencia educativa de la misma manera.

El grupo llevó adelante los subprocesos del proceso de modelización matemática y a lo largo del estudio de cada uno de sus teselados: muestran la réplica de sus teselados realizada en Paint 3D, detallando de forma escrita, gráfica y dinámica el motivo mínimo y las isometrías de cada uno de ellos.

Las consideraciones mencionadas anteriormente ponen en evidencia que haber vivido un proceso de modelización matemática vinculado con el mundo real, enriquece el aprendizaje del estudiantado potenciando el interés y la producción de conocimiento matemático geométrico.

Conclusiones

A través de este escrito, se pone en evidencia el diseño y desarrollo de un escenario de modelización matemática en educación secundaria. A su vez, se muestran acciones que se llevaron adelante por el estudiantado y con las cuales encontramos que han desarrollado los diferentes subprocesos del proceso de modelización y los modelos producidos por un grupo de estudiantes.

Tal como se mostró en el análisis el grupo creó sus modelos con Paint 3D y detalló de forma escrita, gráfica y dinámica (como se puede ver en el video) cada motivo mínimo (modelo) e isometría utilizada. Es de interés señalar que consideran la deformación de figuras para la obtención del motivo mínimo de uno de sus teselados estudiados, esto puede deberse a que en la primera clase se analizaron ejemplos de ello.

Del análisis se reconoce que esta forma de trabajar en la clase de matemática permitió a este grupo la oportunidad de desarrollar un proceso de modelización matemática que se genera a partir de un contexto cercano (y elegido por ellos) en donde la matemática surgió como una necesidad para describir, analizar y dar respuesta a la tarea presentada. Además, se desarrollaron y fortalecieron competencias tecnológicas y se cumplió con el currículo prescripto.

En este sentido, se acuerda con Blomhøj (2004), en que el elemento central de la enseñanza de la matemática debe ser la modelización matemática, aún desde edades tempranas, ya que ésta permite establecer una relación entre el mundo real y la matemática, motiva el aprendizaje, favorece el desarrollo de competencias democráticas, otorga la posibilidad de reconocer aplicaciones de la matemática y fomenta el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas.

Bibliografía

- Biembengut, María y Hein, Nelson** (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Blomhøj, Morten y Højgaard Jensen, Tomas** (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, 22(3), 123-139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Blomhøj, Morten** (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. V. Lambdin, F. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.
- Borromeo Ferri, Rita** (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Cruz, María Florencia** (2023). *Sentidos, validaciones y definiciones al interior de una vivencia de formación de futuras profesoras en matemática mediada por un escenario de modelización matemática en el contexto de una universidad pública argentina* (tesis de doctorado). Universidad Nacional de Córdoba. <https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/548249>
- Esteley, Cristina** (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: voces y sentidos*. Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba.
- Grossi, Sabrina y Sgreccia, Natalia** (2016). Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional. En R. Otero (Comp.), *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp. 73-79). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Kaiser, Gabrielle** (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 553-561). Springer.

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de aprendizajes prioritarios*. Ciclo Básico. Educación Secundaria. Matemática. Consejo Federal de Educación.
<https://www.educ.ar/recursos/fullscreen/show/22985>

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). Diseño Curricular de Santa Fe para Ciclo Básico de la Educación Secundaria.
<https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf>

Villarreal, Mónica y Esteley, Cristina (2013). Cenários de modelagem mídias: ações, atividades e diálogo. En M. Borba y A. Chiari (Org.), *Tecnologias Digitais e Educação Matemática* (pp. 273- 308). Livraria da Física.

El contexto sociopolítico en el aula de matemática

SARA SCAGLIA

sbscaglia@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

FABIANA KIENER

fkienner@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este trabajo utilizamos el enfoque de la Educación Matemática Crítica para reflexionar sobre la posibilidad de generar ambientes de trabajo en el aula de matemática compatibles con la formación para una ciudadanía crítica. Utilizamos distintas concepciones de contexto para reflexionar sobre un escenario de investigación implementado en un curso de estudiantes de educación secundaria en Argentina (17 años) en torno a la comparación de tres métodos de distribución de bancas en elecciones legislativos. El tipo de trabajo desplegado en el aula ha permitido vincular los contextos macro y micro social y ha favorecido la producción de significado en torno de la práctica educativa propuesta.

Palabras clave: escenario de investigación / contextos / ciudadanía crítica / producción de significado

Introducción

En este trabajo¹ asumimos el supuesto de que a través de la educación (y en particular, de la educación matemática) se pueden producir transformaciones en la vida de las personas y en la sociedad. Con este punto de partida, nuestro equipo de trabajo se ha propuesto explorar diversas formas de generar en la escolaridad obligatoria espacios de reflexión sobre el rol de la matemática y de la educación matemática en el desarrollo de una sociedad más justa, equilibrada y respetuosa del medio ambiente. El enfoque teórico de la Educación Matemática Crítica (EMC) (Skovsmose 1999, 2023) proporciona un marco pertinente para encuadrar esta exploración.

En el marco de estas consideraciones, asumimos la necesidad de que la investigación educativa apueste por la posibilidad de generar ambientes de trabajo en el aula de matemáticas compatibles con la formación de niñas/os y jóvenes como futuras/os ciudadanas/os. “Una educación para la ciudadanía podría significar preparar a los estudiantes para que encajen en el orden social dado, pero también podría ser una educación para la autonomía, convirtiendo a los estudiantes en ciudadanos críticos” (Skovsmose, 2023, p.4).

Valero (2002) se propone reflexionar sobre distintas concepciones del término contexto para pensar dos tipos de preguntas que se articulan con las preocupaciones anteriores. La primera está dirigida a la discusión en torno a los problemas de investigación pertinentes desde una perspectiva sociopolítica de la educación matemática y la segunda se refiere a la conexión entre la investigación y la práctica. Las distintas concepciones que reconoce para la noción de contexto en educación matemática tienen diversas y diferentes implicaciones para la práctica.

En un trabajo más reciente y en sintonía con estas cuestiones, la autora sostiene la necesidad de definir las prácticas investigativas de modo que “permitan tratar con seriedad, rigurosidad y sistematicidad la complejidad social, cultural y política de la educación matemática en nuestras sociedades contemporáneas” (Valero, 2012, p.300).

1 Desarrollado en el marco del Proyecto CAI+D 2020, código 50520190100123LI “Análisis de la producción de significado en el marco de procesos de modelización en clases de matemática” (FHUC-UNL, Santa Fe, Argentina).

En este trabajo nos proponemos retomar las reflexiones de Valero (2002, 2012) sobre la noción de contexto (Valero, 2012) y el enfoque de la EMC como herramientas conceptuales potentes para dar cuenta de una experiencia desarrollada en el aula de matemática que podrían estar en consonancia con estos intereses investigativos.

En el siguiente apartado recorreremos brevemente algunas concepciones de contexto que se presentan en el campo de la educación matemática. Retomamos los argumentos de Valero (2002) para mostrar la insuficiencia de estas concepciones para atender la formación para la ciudadanía crítica de los estudiantes en la escolaridad obligatoria, justificando así la introducción de una nueva concepción, el contexto sociopolítico. A continuación mostramos la pertinencia de esta visión de contexto en la interpretación de una experiencia desarrollada con estudiantes de educación secundaria. Finalizamos con algunas reflexiones sobre el rol que puede jugar la educación matemática en el desarrollo de una ciudadanía crítica.

Distintas acepciones de contexto en educación matemática

En el campo de la educación matemática, en muchas ocasiones se hace uso del término contexto para describir algún aspecto en el marco del cual se sitúa o reflexiona en torno a la actividad de enseñanza. Como señala Valero (2002), la utilización del término suele evocar cuestiones muy diferentes, que van a depender de lo que interesa enfatizar. La diversidad de usos en la que se lo suele encontrar podría estar relacionada con la amplitud que se desprende del término a partir de una de sus acepciones. En el Diccionario de la RAE, una acepción de contexto es la siguiente: “Entorno físico o de situación, político, histórico, cultural o de cualquier otra índole, en el que se considera un hecho”. En sintonía con esta acepción, Valero (2012) define “contexto como lo que rodea un objeto —el ‘con’ que acompaña a ‘texto’” (p.311).

En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) de nuestro país, y parafraseando la acepción del DRAE, la noción de contexto se utiliza para hacer referencia a entornos extramatemáticos o de la propia matemática en los que se considera una noción matemática. En los NAP correspondientes al Ciclo Básico, cuando se hace referencia a los números enteros, se alude a temperaturas, nivel del mar, juegos de

carta, pérdidas y ganancias. Se incluyen también contextos específicamente matemáticos (como regularidades numéricas y proporcionalidad directa o inversa) para “interpretar relaciones entre variables” (p.15, Ministerio de Educación, 2013). En los NAP correspondientes al Ciclo Orientado, todas las veces que aparece el término está relacionado con la modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas y se alude a que se interpreten las nociones matemáticas que están en juego (sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas, funciones polinómicas de grado no mayor que cuatro e incompletas, racionales de la forma $f(x) = k/x$, con $x \neq 0$, y exponenciales) “en el contexto de las situaciones que modelizan” (Ministerio de Educación, 2012, p.15 y p.18).

El uso del contexto en los NAP es similar al que Valero (2002) propone como contexto del problema, que se refiere “o bien al campo de nociones o procedimientos matemáticos dentro de los cuales se ubica un problema o bien a las referencias que la formulación de un problema evoca en el estudiante” (p.50). Propone como ejemplo un problema que solicita calcular en m^2 el porcentaje de área cultivada en un jardín de forma pentagonal irregular. Aquí el campo de las nociones matemáticas es la geometría, y las referencias evocadas en el problema son un terreno y la actividad de cavar sobre el mismo. En Valero (2012) se alude a este contexto como el contexto de la tarea. Según la autora, el contexto del problema permite que el estudiantado establezca conexiones con lo que ya conoce (ya sea de la matemática o no), lo cual favorece la construcción activa del conocimiento.

Otra concepción de contexto mencionada por la autora es el contexto de interacción o microsocial y cultural que, además de los problemas y de sus referencias de la matemática y de la vida real, incluye también el modo en que esos problemas son abordados en el aula mediante la cooperación de sus participantes (Valero, 2002), focalizando en el ámbito de interacción inmediata (Valero, 2012). En este tipo de contexto se destaca la importancia de que en la clase se negocien significados y soluciones para las nociones matemáticas puestas en juego.

El contexto situacional o de la situación constituye la tercera concepción propuesta por Valero (2002, 2012), y refiere a “las relaciones históricas, sociales, culturales y psicológicas, entre otras, que están presentes y constituyen el aprendizaje, las formas de usar y las maneras de llegar a conocer las matemáticas” (Valero, 2002, p.52). Una investigación que la autora sitúa en esta concepción de contexto es la de Boaler (1999), que desarrolla un estudio etnográfico longitudinal durante

tres años en dos instituciones escolares diferentes, una que se caracteriza como escuela tradicional y otra como escuela progresista. En la primera, los estudiantes desarrollaron conocimientos inertes, que no pudieron aplicar fuera de la escuela, en tanto que en la segunda, los estudiantes desarrollaron formas de conocimiento más flexibles y útiles que lograron usar en entornos variados.

Para recuperar las limitaciones que Valero reconoce en estas tres visiones de contexto, retomamos las preocupaciones planteadas en la Introducción, respecto de promover en la clase de matemática la formación para una ciudadanía crítica. En las dos primeras visiones, sostiene Valero (2002), se podría argumentar que la contribución al desarrollo de valores democráticos en la sociedad es una consecuencia natural de una adecuada formación matemática de los estudiantes. Valero califica esta posición como ingenua.

Con respecto a la tercera visión del contexto (el contexto situacional), la autora sostiene que se focaliza en las acciones individuales y en las interacciones en micro-contextos (como el aula, la familia, la escuela, el trabajo), sin tomar en consideración el macrocontexto. Respecto de este último, lo caracteriza como “las estructuras sociales, políticas, económicas y culturales, a nivel local, regional y global, construidas y desarrolladas a través de la historia” (Valero, 2002, p.53).

Para superar estas limitaciones, la autora propone una cuarta concepción de contexto, el sociopolítico o macrosocial y cultural. En esta visión se asume que existe una estrecha relación entre las matemáticas, la educación matemática y el espacio social donde ambas se construyen (Valero, 2002). Se trata de ámbitos de interacción no inmediata (Valero, 2012) y su consideración no adopta una visión ingenua respecto de la “bondad intrínseca de las matemáticas” (Valero, 2002) y de la educación matemática. Skovsmose (2004), en el marco de la Educación Matemática Crítica (EMC) afirma: “los roles socio-políticos de las matemáticas no están fijados ni determinados. Ambos roles, el de héroe o el de canalla, están disponibles para ser actuados a través de la educación matemática” (p. 3). En ese sentido, el autor afirma que la educación matemática es crítica.

Valero (2002) reconoce dos puntos de vista en la investigación en educación matemática respecto de la consideración de los estudiantes: estudiantes como sujetos cognitivos vs estudiantes como sujetos políticos. En el primero, se focaliza en la relación entre el estudiante y el conocimiento matemático. En el segundo, “el adjetivo ‘político’ reconoce la naturaleza intrínseca del ser humano como un ser actuan-

te y generador de sus condiciones sociales y materiales de vida” (Valero, 2002, p.56).

La consideración de los estudiantes como sujetos políticos se conecta con la visión sociopolítica del contexto. En tanto que las tres primeras concepciones de contexto (de un problema, de interacción y situacional) se conciben exclusivamente en los límites del aula, el contexto sociopolítico habilita la posibilidad de:

tejer vínculos entre no solo el contenido matemático que se pone en juego dentro del aula, sino también y fundamentalmente entre la integridad social de los participantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y distintas situaciones, arenas y niveles de acción social (Valero, 2002, p.56).

Para establecer vínculos entre los contextos microsocial y macrosocial en el trabajo que se realiza en el aula de matemática, resulta pertinente retomar la noción de escenario de investigación de Skovsmose (2012, 2022, 2023), que refiere a “entornos de aprendizaje que abren a los alumnos a un espectro más amplio de problemas” (Skovsmose, 2023, p.16). Los problemas pueden estar relacionados con las matemáticas y sus aplicaciones, con temas sociales, con el interés del estudiantado o de los docentes, con “la explotación económica, la marginación social, el sexismo, la contaminación, los cambios climáticos, cualquier caso de injusticia social” (Skovsmose, 2023, p.16), entre otros. En un escenario de investigación los estudiantes están invitados a formular preguntas y buscar explicaciones. En contraste con este tipo de entorno, el autor plantea el paradigma del ejercicio, que caracteriza a clases tradicionales en las que se sigue un libro de texto (autoridad externa a la clase), en los que la relevancia del ejercicio (para el que existe solo una respuesta correcta) no forma parte de la lección (Skovsmose, 2012).

Estos dos tipos de entornos se combinan con tres tipos de referencias (las matemáticas, la semirrealidad y la vida real) que “sirven de base para el significado que los estudiantes pueden construir de los conceptos matemáticos y de las actividades en la clase” (Skovsmose, 2012, p.115). Para el autor, las referencias “incluyen el contexto para ubicar un objetivo para la realización de una acción (llevada a cabo por los estudiantes en un salón de clase)”.

Esta última frase se vincula con el alcance que el autor otorga a la noción de significado. Skovsmose (2005) muestra su desacuerdo con la posición predominante en educación matemática, que focaliza la indagación sobre el significado de los

conceptos matemáticos. Prefiere hablar del significado de la acción que lleva adelante el sujeto, puesto que considera que todo aprendizaje supone algún tipo de acción. El tipo de aprendizaje que involucra esta posición interesa al autor porque “puede convertirse en aprendizaje crítico” (p.89).

La acción que se vincula con el aprendizaje requiere dos condiciones: 1) “La persona que actúa debe estar en una situación donde la elección es posible”, y 2) “La persona que actúa también debe tener alguna idea acerca de las metas que persigue y las razones para hacerlo” (Skovsmose, 2005, p. 89). Esto supone alejarse de las acciones que constituyen conductas mecánicas.

Estas consideraciones constituyen el marco teórico que dio lugar al escenario de investigación que describiremos en el próximo apartado. Dicho escenario atiende a las preocupaciones señaladas en la Introducción de este trabajo en relación con la educación matemática.

Reflexiones sobre un escenario de investigación

Tomando como punto de partida nuestro interés por generar en el aula de matemática situaciones en las que sea posible asumir a los estudiantes como sujetos políticos y formar para una ciudadanía crítica, nos interesa comentar brevemente una experiencia desarrollada en educación secundaria. La misma ha permitido establecer vínculos “entre lo que sucede en el aula con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y las estructuras económicas, sociales, políticas y los procesos históricos que dan significado a esos fenómenos” (Valero, 2002, p.54).

Se trata de una experiencia de trabajo colaborativa entre los espacios curriculares Matemática y Construcción de Ciudadanía y Participación, implementada en el primer semestre de 2023 en un curso de 5° año (17 años en promedio) constituido por 22 estudiantes de una escuela de educación secundaria de gestión privada². Una de las autoras del artículo es la profesora de matemática a cargo del curso y la otra interviene durante el desarrollo del escenario como observadora participante.

Teniendo en cuenta que en el segundo semestre del año 2023 en Argentina se desarrollaría un proceso electoral (para la selección de autoridades del poder ejecu-

² Las consignas de las tareas implementadas en el marco del escenario de investigación se encuentran en Kiener y Scaglia (en prensa).

tivo e integrantes del poder legislativo en jurisdicciones municipales, provinciales y nacionales) y que la información vinculada con las candidaturas, listas y partidos políticos tenía una presencia central en todos los medios de comunicación y redes sociales desde el comienzo del año, las docentes seleccionan la temática “Los jóvenes y su conocimiento para el ejercicio del derecho a la participación política”, en torno a la cual se diseña el escenario de investigación (Skovsmose, 2022). Cabe destacar que el estudiantado en el que se implementa el escenario está en condiciones de participar ejerciendo su derecho de sufragio por primera vez. Esta posibilidad se considera una circunstancia que provoca un interés particular.

El montaje del escenario habilita un marco para producir significado a partir de las tareas que lleven adelante las/os estudiantes, pues proporciona “una riqueza semántica que [ofrece] puertas de entrada para que ingrese al aula un lenguaje de reflexión que la terminología matemática sola no conlleva” (Skovsmose, 1999, p.155).

La experiencia tuvo lugar en cuatro clases de ochenta minutos. En la primera clase, una licenciada en ciencias políticas presenta una breve historia de la razón de existencia de los partidos políticos y menciona algunos rasgos de la formación actual de los partidos en nuestro país. En la segunda clase, los estudiantes (organizados en cuatro grupos) se familiarizaron con el sistema de asignación de bancas (método D'Hondt) utilizado en la Cámara de Diputados a partir de dos ejemplos. En la tercera clase, los estudiantes realizan una actividad en la que se les pide que realicen una exploración matemática comparando tres métodos de asignación de bancas (D'Hondt, Hill-Huntington y Sainte Laguë), basándose en una crítica que hace Frediani (2005) al método D'Hondt. Según el autor, este último método discrimina a los partidos minoritarios y beneficia a los más grandes. En la cuarta (y última) clase, los cuatro grupos exponen sus conclusiones y, como actividad final, se organiza un debate para abordar la cuestión de si es aconsejable o no cambiar el método D'Hondt.

A continuación, analizamos algunas cuestiones que dan cuenta de los significados producidos por los estudiantes y reflexionamos acerca del contexto en el escenario de investigación.

Los significados están vinculados a dos de las características de la democracia identificadas por Skovsmose (2023): la votación y la deliberación. La primera característica se aborda desde la misma temática del escenario de investigación, ya

que se toma en consideración el método utilizado para distribuir las bancas en la Cámara de Diputados de la Nación. La formación del parlamento y las discusiones que en él se dan pueden dar lugar a situaciones que, desde nuestro punto de vista, podrían erosionar la democracia. Las intervenciones de los estudiantes durante el escenario de investigación mostraron actitudes críticas. Reflexionaron sobre determinadas consecuencias de la aplicación del método D'Hondt e identificaron situaciones que podrían conducir a la erosión de la democracia, como por ejemplo:

- la traición de ideales, que se manifiesta cuando partidos minoritarios, posiblemente con ideologías distintas, conforman bloques con la finalidad de obtener más votos y, de ese modo, obtener una banca;
- el triunfo de ideas menos adecuadas, que se presenta cuando un diputado apoya una propuesta de un colega del mismo partido, aunque reconoce que alguna otra podría ser mejor;
- la toma de decisiones basada en intereses personales o que atienden a una minoría concreta, en detrimento de los de la comunidad.

Además, en los diálogos generados, los estudiantes realizaron interesantes procesos de discusión en torno a la temática del escenario de investigación, es decir, deliberaron (Skovsmose, 2023). Utilizaron argumentos razonables y pragmáticos para discutir si un determinado método de distribución de bancas es justo o injusto, para reflexionar sobre si es aconsejable o no cambiar el método D'Hondt y para cuestionar las críticas que Frediani (2005) plantea al mismo.

El escenario de investigación descrito admite vinculaciones con el contexto sociopolítico o macrosocial y cultural (Valero, 2002, 2012) dado que se trata de una experiencia que alude a la utilización de las matemáticas en la vida real, posibilita reflexionar sobre su uso y discutir en torno a posibles consecuencias de la aplicación de los métodos propuestos (analizando las características de los resultados obtenidos y la posible conformación de alianzas entre los partidos minoritarios).

La experiencia involucra un ámbito de interacciones no inmediatas, constituido por el sistema electoral en vigencia en el país para la conformación de la Cámara de Diputados. En este ámbito macrosocial, se inscribe la actividad matemática y reflexiva de los estudiantes en un ámbito de interacción particular (el escenario de investigación implementado). Los intercambios producidos al interior de cada grupo durante la realización del trabajo y en las instancias de las puestas en común, a partir del

diálogo entre estudiantes y docentes investigadoras refieren al contexto de interacción o microsocioal y cultural. Por estas razones, afirmamos que el tipo de trabajo desplegado en el aula ha permitido vincular los contextos micro y macro social.

En este sentido, acordamos con Valero (2012) en que el significado del pensamiento matemático y de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

no está relacionado exclusivamente con el significado particular del contenido matemático y los conceptos en situaciones de aprendizaje y/o enseñanza. El significado también está relacionado con la significancia otorgada a la racionalidad matemática dentro de series diversas de prácticas sociales que constituyen las prácticas educativas en un tiempo histórico dado. (p. 316)

Desde el punto de vista de la EMC, el escenario de investigación planteado promovió la producción de significados por parte de los estudiantes mediante un aprendizaje en acción (Skovsmose, 2005), dado que conocían las metas que se perseguían, tenían la posibilidad de tomar decisiones y realizar elecciones.

La utilización de la vida real como referencia (método que rige el sistema electoral) fue la base para el significado que los estudiantes construyeron de los conceptos matemáticos y de las actividades en la clase y proporcionó el contexto para ubicar el objetivo para la realización de una acción (llevada a cabo por los estudiantes en el aula de clase).

En la experiencia relatada trabajamos por un lado con la alfabetización matemática entendida como un conjunto de habilidades matemáticas y la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas (Skovsmose, 2012). Por otro lado, en la microsociedad de la clase, se encarnaron aspectos democráticos que habilitaron intercambios y reflexiones en torno al escenario de investigación planteado (Skovsmose, 2012). Los aspectos mencionados constituyen las preocupaciones esenciales de la perspectiva teórica adoptada, la EMC.

Reflexiones finales

En este trabajo reflexionamos sobre un escenario de investigación que ha sido diseñado e implementado atendiendo principalmente a los aportes de la EMC. En el

análisis de los intercambios y producciones que tuvieron lugar en el desarrollo del escenario identificamos rasgos del aprendizaje en acción que favoreció la producción de significados en torno a la práctica educativa (Skovsmose, 2005). En la experiencia, los/as estudiantes asumieron el rol de sujetos políticos, que en la clase de matemática no se vinculan únicamente con el conocimiento disciplinar sino que reflexionan sobre el rol de la matemática en la sociedad.

Consideramos que el escenario de investigación ha vinculado el contexto sociopolítico o macrosocial y cultural con el microsocio en el aula de matemática. Esto nos permite confiar en la posibilidad de que la educación matemática pueda contribuir a la democracia promoviendo que, como sostiene Valero (2002), estudiantes y profesores “se perciban como seres sociales y políticos” (p.57). Al asumir esta posición, se reconoce que las decisiones y las acciones que cada uno lleva a cabo pueden influir en la vida de las personas y de la comunidad. La experiencia, por tanto, reafirma nuestra posición respecto de que la educación matemática no puede estar ajena a la formación de ciudadanos críticos.

Bibliografía

- Boaler, Jo** (1999). Participation, Knowledge and Beliefs: A Community Perspective on Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 259–281.
- Frediani, Ramón** (2005). El mercado político y el Sistema Electoral D’Hondt en Argentina. *Actualidad Económica*, XV(57), 25-28.
- Kiener, Fabiana y Scaglia, Sara** (en prensa). Modelización matemática sobre procesos electorales en educación secundaria. VI Congreso Nacional de Problemáticas Sociales Contemporáneas, 2023. Facultad de Humanidades y Ciencias.
- Ministerio de Educación** (2012). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de Formación General. Ciclo Orientado Educación Secundaria. Matemática*. Ministerio de Educación y Consejo Federal de Educación. https://backend.educ.ar/refactor_resource/get-attachment/22425
- Ministerio de Educación** (2013). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de Formación General. Ciclo Básico Educación Secundaria. Matemática* (3° edición. Ministerio de Educación y Consejo Federal de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/fullscreen/show/22985>
- Skovsmose, Ole** (1999). *Hacia una filosofía de la educación Matemática Crítica*. Una empresa docente, Universidad de los Andes.

- Skovsmose, Ole** (2004). *Critical mathematics education for the future*. Regular Lectures in The 10th International Congress on Mathematical Education.
- Skovsmose, Ole** (2005). Meaning in Mathematics Education. En J. Kilpatrick, C. Hoykles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 83-104). Springer.
- Skovsmose, Ole** (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109-130). Una Empresa Docente.
- Skovsmose, Ole** (2022). Entering Landscapes of Investigation. En M. Godoy Penteado y O. Skovsmose (Eds.), *Landscapes of Investigation. Contributions to Critical Mathematics Education* (pp. 1-20). Open Book Publishers.
- Skovsmose, Ole** (2023). *Critical Mathematics Education*. Springer.
- Valero, Paola** (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante*, 11(1), 29-59.
- Valero, Paola** (2012). La educación matemática como una red de prácticas sociales. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 299-326). Una Empresa Docente.

Una propuesta de actividades para la enseñanza en la escuela secundaria con teselaciones

ANDREA CAROLINA ANTUNEZ

aantunez@campus.ungs.edu.ar

MARTINA MAGALÍ CAJAL

magalicajal@gmail.com

DARÍO DANIEL DEVIA

ddevia@campus.ungs.edu.ar

ANGELA BERENICE FERNÁNDEZ

fernandez.beru@gmail.com

NADIA GODOY

ngnadygodoy@gmail.com

Universidad Nacional de General Sarmiento. UNGS

Resumen

Este trabajo presenta y analiza una propuesta de enseñanza de geometría para tercer año de escuela secundaria, soportada en el aprendizaje basado en proyectos y enfocada en la teselación y la creación de mosaicos. El objetivo de la propuesta es abordar la enseñanza de propiedades de polígonos y movimientos en el plano con materiales concretos, a partir del desafío de crear una obra propia de teselado. La propuesta intercala momentos de exploración, basados en la percepción y manipulación de figuras, con momentos de reflexión y búsqueda de condiciones motivadas por un desafío: construir una obra propia de teselado. En conclusión, esta propuesta ofrece una oportunidad para explorar el arte y la historia detrás de las teselaciones del artista M.C. Escher, consolidando el aprendizaje de la geometría y dando espacio para proyectos educativos interdisciplinarios.

Palabras clave: teselado regular / aprendizaje basado en proyectos / geometría / isometrías

Introducción

Esta propuesta surge a partir de varias experiencias realizadas con material concreto en actividades de comunicación pública de la ciencia.

A finales de marzo de 2023, se realizó por primera vez el evento “Día π en la UNGS” con motivo de la celebración del día internacional de la Matemática en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). Este evento es un espacio de comunicación pública de la Matemática, en intercambio con otras ciencias, a través de actividades lúdicas e interactivas. La primera edición atrajo a más de 1500 personas, principalmente estudiantes y docentes de la Escuela Secundaria, evidenciando así una necesidad de este tipo de iniciativas lúdicas como eje motivador en las clases de matemática.

En este contexto, se desarrolló un taller y un stand dedicados a la relación entre la matemática y el arte, centrándose en las teselaciones del artista M. C Escher y basado en la idea de sorprenderse ante la regularidad y el patrón de belleza artística. Desde ese momento, estas actividades forman parte de *Valiciencia*, un proyecto del Museo Interactivo “Imaginario” de la UNGS que lleva estas actividades a las escuelas secundarias y a eventos científicos o culturales. La respuesta positiva de quienes participaron de las implementaciones y la demanda de docentes por alguna propuesta didáctica para llevar al aula y abordar contenidos de la currícula motivaron la elaboración del presente trabajo.

Bajo estas consideraciones y experiencias, se diseñó una propuesta de actividades para estudiantes de tercer año del nivel secundario, cuyo objetivo es el aprendizaje del hacer matemático involucrado con los contenidos relacionados con figuras geométricas y movimientos en el plano. Para su elaboración y análisis se tomó en cuenta los lineamientos del diseño curricular de la provincia de Buenos Aires y en particular y se orientó la propuesta bajo el marco del enfoque del aprendizaje basado en proyectos.

En la primera sección, mostraremos los aportes teóricos que fueron considerados en la elaboración de la propuesta. En la siguiente sección, desarrollaremos los detalles de las actividades junto con las posibles intervenciones docentes. Finalmente, mencionaremos algunas reflexiones y consideraciones finales sobre la propuesta analizada.

Marco teórico

El Diseño Curricular de la provincia de Buenos Aires destaca la importancia del tipo de trabajo en el aula, influenciando la relación de los estudiantes con las matemáticas y su percepción sobre esta disciplina. Un desafío que se plantea a quienes enseñan matemática es lograr que el estudiantado descubra que esta disciplina es un quehacer alcanzable por todas las personas. (Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2010) La presentación de situaciones que estén al alcance de todas y todos como es la generación de una obra de arte propia suele ser un camino para devolver a cada estudiante la confianza en sus posibilidades de hacer matemática.

En este sentido, el aprendizaje basado en proyectos (ABP) se presenta como una metodología adecuada para que las y los estudiantes se involucren en un proceso de investigación y trabajo autónomo, especialmente para explorar y entender las nociones de geometría detrás de obras artísticas que la utilizan, como el caso de los teselados. Este enfoque fomenta la colaboración, integra diferentes áreas de estudio y vincula teoría, práctica y experiencia. Según el Instituto Buck de Educación (BIE), el ABP se define como un método sistemático que implica a los estudiantes en el aprendizaje a través de una investigación prolongada, centrada en preguntas auténticas y tareas cuidadosamente diseñadas. (Thomas, 1999, citado Magide 2020).

En particular, para la enseñanza de la geometría, Pogr  (2010) sostiene la importancia de un trabajo con las figuras que avance más allá del uso de la percepción y manipulación de los objetos. Siguiendo esta línea, también afirma que las propiedades y características de los objetos geométricos constituyen herramientas necesarias, que se utilizan en todo proceso deductivo. De allí el hecho de que los estudiantes dispongan de ellas es un requisito imprescindible para el despliegue de prácticas argumentativas en el camino hacia la producción de demostraciones.

Según Itzcovich (2005) las actividades de construcción resultan un motor que abona al establecimiento de conjeturas, a la anticipación y a la puesta en evidencia de ciertas restricciones que imponen a los objetos las propias relaciones que los caracterizan, al mismo tiempo que permiten recuperar y avanzar a partir de los conocimientos previos. Debemos propiciar escenarios que permitan que las y los estudiantes puedan involucrarse en la producción de conocimientos geométricos. Por ejemplo, a partir de la experimentación y manipulación de figuras, puedan elaborar

conjeturas sobre las condiciones necesarias para que, en este caso, cierta figura te- sele el plano. Es decir, que busquen razones y argumentos que sostengan la validez de las propiedades que utilizan en la construcción de una nueva figura.

En este sentido, el aprendizaje de la geometría ocurre necesariamente mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, cada uno con su propio papel en el proceso de aprendizaje. Aunque estas habilidades cognitivas se desarrollan por separado, en la enseñanza de la geometría en la escuela, puede privilegiarse la visualización como punto de partida y apoyo principal para el razonamiento y la construcción geométricos. (Duval, 1998 citado en Marmolejo y Vega 2012).

Trabajar de manera integral la geometría, el arte del teselado y la historia de artistas como M. C. Escher puede ser notablemente enriquecedor y significativo en la enseñanza. Este artista se inspiró en la técnica de teselado, cubriendo el plano con formas geométricas regulares como pájaros, peces y ángeles, similar a los zelig árabes. Su fascinación por esta técnica se intensificó después de visitar la Alhambra en 1936, donde se maravilló con la simetría presente en los mosaicos que había visto allí. La Alhambra, con su amplio repertorio de teselados, demostró que los árabes ya habían explorado todas las posibilidades de esta técnica mucho antes del siglo XIII. (Corrales, 2005).

Escher no se limitaba a seguir reglas estrictas al crear sus teselados; sino que, experimentaba y exploraba nuevas formas y patrones integrando conceptos matemáticos y geométricos en sus creaciones (Sánchez Rite, 2020). Al examinar las obras del artista, las y los estudiantes pueden inspirarlos a ser creativos en su propio trabajo matemático y comprender que las matemáticas no son solo reglas predefinidas, sino que son creatividad y exploración.

Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas, pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos (Sadosky, 2005).

Desarrollo de la propuesta

La propuesta ha sido diseñada para una implementación en un tercer año de nivel secundario, teniendo en cuenta el diseño curricular de la provincia de Buenos

Aires. En particular, se recomienda que el grupo de estudiantes haya trabajado con figuras regulares e irregulares y tengan conocimientos mínimos de sus elementos (ángulos, lados, vértices) y sus propiedades. Según el diseño curricular analizado, estos contenidos son trabajados en 1er año y 2do año de secundaria.

Los contenidos abordados son: figuras planas, medida y transformaciones en el plano. Estos contenidos pertenecen al eje de geometría y magnitudes del diseño curricular antes mencionado.

Momento inicial: Presentación del desafío

La propuesta se inicia con el planteo del siguiente desafío:

Desafío Escheriano: En esta propuesta vamos a recorrer el camino de las obras del famoso artista M.C. Escher con el objetivo de crear una obra de arte matemático o matemática con arte, similares a las teselaciones de este artista. El producto final de este recorrido será compartido en una muestra de arte y matemática donde será necesario contar los detalles de esta elaboración de la obra.

Se sugiere complementar esta presentación con una breve introducción de la vida del artista y la visualización de sus obras que den contexto a la propuesta y movilice la curiosidad de las y los estudiantes.

Es importante que también se explicita en este momento acuerdos sobre la muestra de arte (modo de comunicación, audiencia que asistirá, lugar, fechas, etc) y defina la evaluación (uso de rúbricas, evaluación de a pares, etc).

Para abordar este desafío, establecemos lo que llamamos "momentos de trabajo", con actividades progresivamente más complejas. Estos momentos pueden llevarse a cabo en clases separadas para adaptarse al progreso del aprendizaje, complementarse con otras actividades de matemática o integrarse con actividades de otras materias de la currícula.

Momento 1: ¿Qué son los teselados?

Se iniciará la actividad presentando imágenes de mosaicos históricos y contemporáneos.

Actividad 1: “Exploramos teselados”.

Observa las siguientes imágenes de mosaicos históricos y artísticos. Cada una de ellas corresponde a cubrir una superficie con figuras repetidas, que se denomina teselado.

Reagrupa las imágenes según algún criterio y explica las características que diferencian las agrupaciones:



Imagen 1: Imágenes aportadas para la actividad 1

Durante esta actividad se anima a los estudiantes a observar los diferentes patrones y a reflexionar sobre cómo estas imágenes se forman por la repetición de figuras. Esto permitirá que los estudiantes desarrollen la capacidad de observación y reconozca propiedades de estos teselados y de distintos movimientos en el plano para su construcción.

Se estima que observando estos teselados, las y los estudiantes agrupen con diferentes criterios: figuras reales y geométricas, colores, figuras repetidas, origen de la imagen (obra de arte o mosaico). Es conveniente que se mencione cuáles son obras del artista Escher y cuáles son mosaicos de la Alhambra para potenciar la información histórica subyacente en estas imágenes.

Las intervenciones docentes deben ir hacia la reflexión sobre cómo eligen los criterios, que características permiten definirlo, etc. Luego del debate, es necesario dejar institucionalizada la clasificación conocida de teselados regulares e irregulares.

Con la tercera imagen de la actividad 1 (el gato blanco de Escher) se continúa trabajando con la siguiente consigna:

Actividad 2:

Redacten en grupos un instructivo a seguir para generar el teselado del gato blanco de Escher con una sola cara de un gato y copiando (como si fuera sello) el resto de las caras ¿Qué recomendación darías para generar ese teselado, de manera tal que se obtenga el teselado completo?

Una vez escritas las instrucciones, las intercambiarán con otro grupo del aula que su docente les indicará. Intenten dibujar el teselado siguiendo la descripción recibida.

Para armar el instructivo se dispondrá de una figura base (un recorte de fibrofacil/cartón/impresión 3D) la cual reproducirá, sobre una hoja, el teselado final. Para el segundo ítem, un o una representante del grupo seguirá las instrucciones, remarcando el contorno de la figura para simular la impresión de sello.

Cuando todos los grupos hayan reconstruido parte del teselado, el docente guiará la reflexión con las siguientes preguntas: ¿Pudieron recrear la obra exactamente? ¿Qué dificultades se les presentaron? ¿Tuvieron que tomar alguna decisión que no estaba dada explícitamente en el papel? En el caso de no poder recrear la obra, se les preguntará ¿Cómo mejorarían las instrucciones?

La intervención docente buscará guiar las respuestas hacia una manera de expresar apropiadamente los movimientos de la figura inicial. En particular, se espera que surjan frases vinculadas a traslaciones, rotaciones, simetrías y aparezca la necesidad de formalizar la notación y los elementos necesarios de necesarios para caracterizar cada movimiento.

Momento 2: Teselando (o no) con polígonos regulares

Esta actividad será realizada en grupos de 4 o 5 estudiantes. Además, es necesario tener polígonos regulares de 3 a 8 lados realizados con recortes de fibrofacil, madera o impresión 3D, con tamaño adecuado para su manipulación y con cantidad suficiente para repartir al menos 6 piezas de cada polígono regular por grupo.

Actividad 3: Investigamos cómo son los teselados regulares con polígonos regulares.

Elegir una figura e intentar armar un teselado regular. Repetir con el resto de las figuras. Recordar que no se pueden mezclar figuras en un mismo teselado y que entre las piezas no deben quedar huecos ni se pueden superponer.

¿Podemos cubrir una superficie plana con cualquiera de las figuras que te brindamos? Explicá con tus palabras por qué crees que se logra, y en el caso de que no suceda, por qué crees que no se logra.

Para continuar hacia una justificación se invita a los grupos a reflexionar cómo son los ángulos de los polígonos regulares y qué ocurre con los ángulos de las figuras en los puntos donde se unen en el teselado. Se espera que, al ubicar varias piezas juntas en un vértice, se visualice la condición necesaria sobre la suma de los ángulos confluyentes en ese vértice.

Para esto, la o el docente buscará ordenar las conjeturas armando una tabla con cada figura usada, una columna que indique si tesela o no y otra columna con los argumentos que se hayan encontrado para dar con esta respuesta. La argumentación demandará conocer la medida de los ángulos de los polígonos regulares. Además, les permitirá llegar a la conjetura: “Los únicos polígonos regulares que teselan son los cuadrados, los triángulos equiláteros y los hexágonos”. Inducir a contar todas las posibles opciones (ángulos admitidos en el punto de confluencia y ángulos de los polígonos regulares posibles) permitirá elaborar una demostración de la conjetura planteada.

Momento 3: Teselando con figuras irregulares

Para las siguientes actividades se reparten a cada grupo, un paquete de 6 a 10 piezas en fibrofácil o impresión 3D de cada tipo de las siguientes figuras no convencionales.

Actividad 4: Teselados más difíciles ¿cómo se construyeron?



(1)



(2)



(3)

Las siguientes figuras generan un teselado.

Con cada tipo de pieza, comprobar que es posible generar un teselado regular. Escribir luego alguna explicación: ¿Cómo crees que se diseñaron estas piezas de manera que sea posible armar un teselado?

Es importante antes de continuar registrar posibles conjeturas respecto de por qué estas piezas teselan. La observación de bloques encastrados con varias piezas podría generar la anticipación de que el patrón se obtuvo recortando alguna parte de cuadrado o rectángulo. Antes de continuar, el docente muestra cómo los constructores en la Alhambra diseñaron el hueso Nazarí a través del siguiente diagrama:



Imagen 2: Construcción del hueso nazarí

Actividad 5:

Sabemos que las piezas provienen de una estrategia similar a la usada para el hueso Nazarí. Determina cuál pudo haber sido ese procedimiento de construcción para cada una de las figuras teseladoras.

La intención de esta actividad radica en identificar transformaciones isométricas para generar una pieza teseladora.

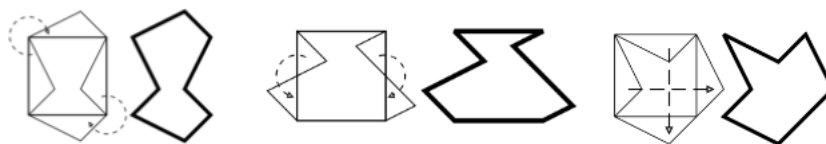


Imagen 3: Transformaciones isométricas para la construcción de las figuras

Las intervenciones docentes deben orientarse a solicitar a cada estudiante explicitar las características de los movimientos realizados con los recortes: ¿con qué ángulo y en qué centro se debe rotar el recorte realizado? ¿Qué caracteriza la traslación de recortes que realizamos? Se sugiere que el docente motive esta reflexión

recordándoles que el objetivo será utilizar esas mismas transformaciones para construir las propias figuras. A modo de cierre en esta actividad, es importante establecer que estas figuras logran un teselado porque se obtienen a partir de transformaciones isométricas particulares de recortes obtenidos al fraccionar un cuadrado, una figura que ya sabíamos que teselaba.

Para cerrar el momento, se repartirán las iguanas de Escher. En principio deberán comprobar que las iguanas teselan el plano. Luego, se les dará la iguana recortada y se preguntará lo siguiente:

Actividad 6:

¿De qué polígono regular proviene la iguana recortada?

Se pretende que el estudiantado realice rotaciones y observe que el polígono regular donde se origina la figura es un hexágono.

A continuación, el/la docente intervendrá con la consigna de descubrir y enunciar los posibles movimientos en el plano que se realizan con cada recorte para formar la figura de la Iguana partiendo del hexágono. Se espera intentar medir el ángulo en el que se realiza la rotación de cada pieza que asegura la posibilidad de teselar y, a partir de esto, generar un espacio de discusión de cómo describir estos movimientos.

Momento 4: ¡A teselar con construcciones propias!

Luego de estudiar figuras con las que se puede teselar o no y las formas de construir piezas que teselan, se abordará la actividad de cierre.

Actividad 7:

Diseñar, a partir de un cuadrado, una nueva figura patrón base que permita teselar el plano. Explicitar qué tipo de isometría sobre los recortes realizados asegura que este patrón base servirá para teselar el plano.

Reproduce 4 o 5 piezas con esa figura repetida en cartulina/papel y construye un mosaico con estas piezas. Puedes adornar las piezas usando toda tu imaginación.

Recuerda armar una ficha con el registro de como realizaste la construcción para que, en la exposición, quienes se acerquen puedan conocer los pasos seguidos y las dificultades encontradas.

Se espera que en el proceso de construcción del patrón base reconozcan las transformaciones usadas. El proceso de armado del tapiz delatará si se han respetado las reglas de construcción. El docente puede intervenir con sugerencias sobre el cuidado del recorte de las piezas, que utilicen elementos como transportador o regla para identificar los elementos que caracterizan las transformaciones isométricas.

Reflexiones finales y conclusiones

Ofrecemos una propuesta interdisciplinaria que integra la geometría, el arte y la historia de los teselados, generando en el estudiantado una experiencia educativa que va más allá del ámbito puramente matemático. Es decir, permite vincular los conocimientos, la teoría, la práctica y las experiencias. Puede ser el disparador de varios caminos y trabajar en conjunto con varias asignaturas como las relacionadas a la biología, observando qué teselados encontramos en la naturaleza, por ejemplo, en el caparazón de una tortuga o en panales de abejas. Nos da la oportunidad de mostrar que el trabajo matemático permite la expresión creativa y la exploración, desafiando la percepción tradicional de las matemáticas como un conjunto de reglas rígidas.

Con esta propuesta se busca promover el desarrollo de habilidades de observación, exploración, razonamiento y argumentación entre los estudiantes, permitiéndoles justificar sus razonamientos y resolver problemas basados en conocimientos geométricos. La importancia de ofrecer situaciones desafiantes como la creación de un teselado artístico, les permite involucrarse activamente en su aprendizaje y aplicar los conocimientos en contextos reales más allá del aula.

Por otro lado, consideramos que nos traza un hilo conductor entre los diseños curriculares de primero a tercer año vinculando apartados dedicados a teselados, con el de propiedades de ángulos en las figuras geométricas y las transformaciones isométricas.

Podemos mencionar que una dificultad a sortear es la construcción de los materiales de trabajo, que en nuestro caso resolvimos en hacer los diseños en CorelDraw y con el archivo pdf mandarlo a realizar en fibrofácil en un local de cortes láser sin mayores problemas, pero puede ser costoso si es que se quiere tener muchos kits de trabajo.

A futuro consideramos pertinente incursionar en la utilización de Geogebra, en la realización de estas actividades, para lograr diseños más precisos.

Bibliografía

- Corrales Rodrigáñez, Capi** (2005). Escher I: Las matemáticas para construir. *Suma*, 49, 101-108.
- Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires** (2010). Diseño curricular para la educación secundaria. Tercer año: Matemática. La Plata.
- Itzcovich, Horacio** (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones* (Vol. 3). Libros del Zorzal.
- Magide, Brenda** (2020). El abc del abp. Ministerio de Educación de Argentina. Aprendizaje Basado en Proyectos en Matemáticas. <https://www.educ.ar/recursos/155741/el-abc-del-abp>
- Marmolejo Avenia, Gustavo Adolfo y Vega Restrepo, Myriam Belisa** (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Revista de Educación matemática*, 24(3), 7-32. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846001>
- Rodriguez, Mabel (Coord.)** (2010). Área Matemática. En P. Pogr  (Coord.), *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario* (pp 119-179). Ministerio de Educación de la Nación Argentina, Secretaría de Políticas Universitarias (SPU), Instituto Nacional de Formación Docente (INFOD).
- Sadosky, Patricia** (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal.
- Sadovsky, Patricia, Parra, Cecilia, Itzcovich, Horacio y Broitman, Claudia** (1998). *Matemática. Documento de trabajo N  5. La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo*. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Sánchez Rite, Cinta** (2020). *Mosaicos y teselaciones: Escher* (tesis de maestría). Universidad de Alcalá.

Eje 3. El uso de tecnologías en el aula de matemática

Reportes de investigación

Simuladores en la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria

MELISA MAZZARO

melisamazzaro@gmail.com

Escuela Industrial Superior (EIS)

Universidad Nacional del Litoral (UNL)

FERNANDA RENZULLI

fernandarenzulli@gmail.com

PATRICIA CAVATORTA

patricia.cavatorta@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC)

Universidad Nacional del Litoral (UNL)

Resumen

En esta ponencia presentamos avances de un estudio realizado en marco de una adscripción en investigación en el Proyecto CAI+D 2020 “La vinculación entre las tecnologías digitales y el tratamiento de los contenidos del currículum de matemática en la formación inicial y continua de profesores en matemática” código 50520190100034LI. En la investigación nos enfocamos en el estudio de recursos tecnológicos para la enseñanza de la matemática y cómo estos pueden ser incluidos de manera genuina en las aulas de secundaria para atender a las y los estudiantes de hoy.

Exhibimos los resultados de una encuesta realizada a las docentes de matemática de la EIS (UNL) y el análisis de un simulador llamado “Generador de funciones”. Éste permite abordar algunos de los conceptos que dichas docentes destacan como posibles de ser enseñados mediante propuestas enriquecidas por el uso de TD.

Palabras clave: matemática / educación secundaria / simuladores / funciones

Introducción

En esta ponencia presentamos avances de una investigación que se está realizando en marco de una adscripción titulada “Revisitando las propuestas de enseñanza de la matemática en la Educación Secundaria interpeladas por las TD”. Dicha adscripción forma parte del Proyecto CAI+D 2020 “La vinculación entre las tecnologías digitales y el tratamiento de los contenidos del currículum de matemática en la formación inicial y continua de profesores en matemática” de la FHUC (UNL).

En la investigación nos enfocamos en el estudio de recursos tecnológicos para la enseñanza de la matemática y cómo estos pueden ser incluidos de manera genuina en las aulas de secundaria para atender a las y los estudiantes de hoy. Para ello nos propusimos:

- Identificar los recursos tecnológicos utilizados por las/los docentes en sus prácticas de enseñanza y los problemas matemáticos involucrados.
- Describir la influencia del uso de TD en la resolución de problemas para la construcción de conceptos.
- Reconocer características relevantes para la formulación de problemas potentes con TD.

Mostraremos los resultados de una encuesta realizada a las docentes de matemática de la EIS (UNL) y el análisis de un simulador llamado “Generador de funciones” que permite abordar algunos de los conceptos que dichas docentes señalan como posibles de ser potenciados con el uso de las TD.

Marco Teórico

Según Repetto y Mato (1998) la construcción del conocimiento científico no se produce de forma aislada sino que está inmersa en el contexto social que lo influye y lo determina en gran medida.

En este sentido, en una sociedad con cambios tan vertiginosos, mediados por las nuevas tecnologías, es importante pensar en nuevas y renovadas prácticas de enseñanza en la educación secundaria. Esto no implica descartar lo que entendemos es propio de la ciencia matemática, pero es crucial que se contemple el trabajo

desde la resolución de problemas y la modelización atendiendo a estos cambios sociales y tecnológicos.

Buscar enriquecer las propuestas pedagógicas, entendiendo a las y los estudiantes como partícipes y artífices de la construcción de sus propios conocimientos, implica pensar en nuevas formas de hacer matemática con herramientas tecnológicas que potencien los procesos de enseñanza y de aprendizajes contribuyendo a educar matemáticamente.

Las formas en las que nos comunicamos y nos relacionamos con los demás son absolutamente diferentes a cómo lo eran hace menos de 20 años. Esto, en gran parte, se vio influenciado por las TD. El ámbito educativo no es ajeno a esta realidad, por lo que las metodologías de enseñanza y los procesos de aprendizajes en la escuela se ven interpelados.

Palmas Pérez (2018), considera que el término TD hace referencia a la relación entre las tecnologías y el modo en que las personas las usan, y no en su potencial informativo o comunicativo. Sostiene que las TD por sí solas, no generan un cambio en la educación más allá de ciertos aspectos formales. Son los actores los que pueden transformar la educación, aprovechando las propiedades innovadoras de las TD, siempre y cuando existan diseños (tecnológicos) adecuados y que resuelvan sus necesidades educativas. En este sentido, la tecnología puede ser concebida como herramienta o como medio. Entendida como herramienta se incorpora como algo ajeno a lo cotidiano, es decir, son instrumentos posibles de ser usados. En cambio, la tecnología como medio hace que se tengan en cuenta sus posibilidades didácticas, dando lugar, por ejemplo, a analizar cómo el educando puede confrontar sus saberes matemáticos previos y cómo puede funcionar la acción de retroalimentación del medio hacia el/la estudiante.

Por otro lado, Maggio (2012) plantea que las TD ocupan un lugar importante en los modos en que el conocimiento se produce y difunde, y es necesario incluirlas en las prácticas de enseñanza. Considera que se pueden hacer inclusiones efectivas e inclusiones genuinas. Las efectivas se dan por razones que no tienen un fin didáctico o preocupación por mejorar las prácticas de enseñanza. En cambio, las inclusiones genuinas, se dan cuando las/los docentes las incorporan reconociendo el valor que eso tiene en la disciplina que está enseñando, y pueden justificar la decisión de incorporarlas a sus prácticas de enseñanza.

Lion y Maggio (2019) plantean que en estos tiempos, donde lo digital marca diferentes procesos de aprendizajes se requiere “alterar la secuencia lineal progresiva: el espacio del aula y el tiempo pedagógico. Para ello, es importante discutir cuáles son las condiciones que desde múltiples dimensiones tensionan las prácticas clásicas y dan lugar a la emergencia de prácticas renovadas” (p. 22).

Ferragina y Lupinacci (2017), señalan que cuando un concepto matemático está influido por la utilización de TD, “es posible que se modifiquen aspectos asociados a las transformaciones de lenguaje que posibilitan su modelización en estos entornos, a los medios de representación que permiten su desarrollo y a las técnicas que posibilitan el acercamiento a tal concepto” (p.75).

En este sentido es importante la inclusión de las TD en propuestas de enseñanza de matemática, siempre que se recuperen sus potencialidades didácticas. Esto implica no sólo usar aquellos software más conocidos y valorados positivamente en la comunidad de Educación Matemática. Es necesario, estar en permanente búsqueda y actualización con relación a software, aplicaciones y recursos disponibles que funcionen como medios que se incluyen de manera genuina para hacer matemática en el aula, estudiando las potencialidades y limitaciones en determinados contextos.

En la enseñanza de la Matemática, la inclusión genuina de las TD depende especialmente del tipo de actividades que se diseñen e implementen en el aula y la gestión de la clase propuesta. Así, algunos usos de las TD constituyen nuevas formas de vincularse con ideas o conceptos, sobre todo aquellos en los que la actividad matemática cambia la manera en que tradicionalmente las y los estudiantes se relacionan con el conocimiento.

Metodología

De acuerdo a lo establecido por Hernández, Fernández y Baptista (2014), la investigación es de tipo cualitativa, dado que el foco está puesto en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto.

Al plantear el problema de investigación la posición fue de tipo integradora, dado que se revisaron trabajos previos para elaborar el marco teórico, recuperando o

desestimando conceptos, clasificaciones y teorías, de acuerdo a la relación que mantengan con la temática planteada, es decir, la revisita de las propuestas de enseñanza de la matemática de la Educación Secundaria a partir del estudio de las posibilidades de inclusión de las TD.

Por su parte, McMillan y Schumacher (2005) destacan que la investigación cualitativa se rige por principios como la flexibilidad, la inmersión en el contexto del estudio y la interpretación de los datos, lo que permite una mayor libertad en la exploración de las temáticas y un mejor entendimiento de los procesos sociales. En este sentido, el trabajo de investigación se fue perfilando en función de lo acontecido a partir de la recuperación de datos extraídos del contexto.

Nuestro proceso de investigación se orientó a partir de:

- los resultados obtenidos de una encuesta virtual realizada a profesores/as de matemática de la secundaria,
- el estudio en profundidad de los materiales bibliográficos utilizados en la Educación Secundaria, y
- la búsqueda de distintas TD, contemplando el estudio de sus potencialidades de uso en las propuestas de enseñanza para los contenidos señalados por las y los docentes e identificados en la bibliografía del nivel.

Como ya expresamos en la introducción, para esta presentación recuperamos los resultados de la encuesta realizada a docentes de matemática de la EIS (UNL) y estudiamos un simulador llamado “Generador de funciones”, dado que permite abordar algunos de los contenidos señalados por las mismas como posibles de ser mediados por el uso de las TD.

Resultados de la encuesta a docentes de la EIS

La encuesta fue respondida por 8 de las 9 docentes de matemática de la institución, las cuales dictan clases de 1er a 5to año.

Todas las docentes manifiestan haber usado TD en algún momento durante el desarrollo de sus clases. Señalan que el uso de las mismas puede enriquecer el desarrollo de las propuestas de enseñanza o complementarlas, y de esta manera lograr una mejor dinámica dentro del aula o potenciar la comprensión de conceptos.

Ante la solicitud de mencionar las TD que han usado y la finalidad de uso, han surgido muchas y variadas respuestas, expuestas en la Tabla 1.

	Tecnología digital	N° de veces mencionada	Finalidades
Recursos	Videos	6	- Para que los alumnos tengan otra explicación de los contenidos desarrollados que los ayude a comprenderlos. - A modo de repaso y para ampliar algún contenido. - También para mostrarles algunas curiosidades.
	Ambiente / aula virtual	6	- Realizar cuestionarios de autoevaluación con el fin de repasar los contenidos a ser evaluados. - Compartir archivos, material audiovisual y realizar actividades de forma asincrónica.
	Word	1	Archivos con respuestas y/o resoluciones de las actividades.
	Pizarra digital	2	- Agilizar los tiempos de clase. - Como complemento del libro de texto de la cátedra y que todos puedan registrar las respuestas.
	Documentos compartidos de google	1	Compartir material audiovisual y archivos.
Medios de comunicación	Gmail	1	Coordinar el trabajo con los estudiantes y enviar archivos.
	Telegram	1	
	WhatsApp	2	
Aplicaciones	GeoGebra	7	- Verificación. - Agilizar actividades que impliquen la gráfica de funciones. - Desarrollo de temas, explorar, conjeturar, visualizar conceptos dinámicos.
	Genially	2	Actividades iniciales, para desarrollo de contenidos, juegos y trivias para repasar algún concepto.
	H5p / Padlet / Mentimeter / Scratch	1	Actividades iniciales, para desarrollo del tema, para refuerzo de lo dado y para que estudiantes avanzados puedan ahondar en sus conocimientos.
	Symbolab / Photomath	1	Autocorrección.
	Simuladores	2	Mostrar aplicaciones que no se pueden realizar en el aula.

Tabla 1: TD utilizadas por las docentes

Todas las docentes expresan opiniones positivas en relación a la incorporación de TD en el aula de matemática. La mayoría señala que:

- Permiten generar discusiones y resolver problemas, que sin su uso no serían posibles.
- Son un buen complemento, permiten mejorar los procesos de aprendizaje y es motivador para el estudiantado.
- Son recursos que se pueden usar para agilizar los tiempos de resolución.

La principal dificultad señalada para el uso de TD en las aulas es la limitación de la conectividad. La gran mayoría coincide en que el inconveniente que se les presenta es la falta de una buena infraestructura digital. Al no contar con una buena señal de internet, se dificulta el uso de algunos recursos. Eso conlleva al replanteo de algunas clases, proponiendo trabajos en grupos más numerosos (para reducir los dispositivos necesarios) y siendo en ocasiones la docente quien comparte sus datos de internet. Estos inconvenientes están directamente relacionados con el tipo de TD utilizada y con el momento de la clase en que se implementa, por eso dos de las docentes destacan que no encuentran inconvenientes al usarlas.

Destacan algunos contenidos que enseñan y podrían abordarse con consignas mediadas por las TD, indicando el año de escolaridad donde se desarrollan. Esto lo presentamos en la Tabla 2.

Año de escolaridad	Contenido
1ero	Puntos notables de un triángulo. Recta de Euler. Geometría. Ecuaciones. Polígonos y sus propiedades.
2do	Función. Función lineal.
3ero	Funciones cuadrática y polinómica.
4to	Funciones racional, irracional, trigonométrica, logarítmica y exponencial. Derivada.
5to	Integrales.

Tabla 2: Contenidos considerados como posibles de ser abordados con TD

Señalan que utilizarían las TD para abordar estos contenidos ya que permiten visualizar propiedades y/o lograr deducirlas, observar a partir del dinamismo algunos conceptos, construir funciones, analizar parámetros, comportamientos y conjeturar sobre cómo esto influye en las gráficas. También destacaron el uso de TD para el apoyo visual y las múltiples representaciones de un concepto. Plantean

que suelen usarlas para agilizar los tiempos de construcción, la verificación y la resolución de problemas.

La búsqueda de TD para este contexto

A raíz de las inquietudes señaladas por este grupo de profesoras es que comenzamos a explorar distintas páginas web que presentan simuladores para la enseñanza de la matemática, ya que fue una de las TD menos exploradas por ellas. De esta manera nuestros hallazgos podrían brindar oportunidades de inclusión genuina de TD en las aulas de la escuela secundaria para la construcción de conceptos. El trabajo con simuladores posibilita el diseño de propuestas de enseñanza desde la modelización, con el estudio en diferentes contextos y el uso de múltiples representaciones.

Hemos explorado 3 páginas, a saber:

- Página 1: <https://phet.colorado.edu/es/simulations/>
- Página 2: <https://es.mathigon.org/>
- Página 3: <https://www.euclidea.xyz/>

Para este trabajo analizamos las potencialidades del simulador “*Generador de funciones*” de la Página 1, dado que atiende al abordaje de los conceptos de función, función lineal, y algunas propiedades de figuras geométricas planas, contenidos señalados por las encuestadas como posibles de ser potenciados con el uso de las TD.

Sobre el simulador *Generador de funciones* y sus posibilidades de uso

- Es compatible con diversos dispositivos. Se puede ejecutar en iPads, Chromebooks, PC, Mac y sistemas Linux. Esto permitirá trabajar tanto con computadoras como con celulares. También permite la descarga de un acceso directo al sitio.
- El sitio brinda el código HTML que permite incrustar el simulador en aulas virtuales para poder trabajarlo desde allí.

- Se puede añadir en classroom desde un enlace directo.
- Puede compartirse a través de redes sociales como Facebook y X (ex Twitter).
- Cuenta con una lista de actividades que se pueden realizar con el simulador y que fueron compartidas por otros docentes que lo usaron anteriormente. Se detalla el/la autor/a, el tipo de actividad diseñada, el tema que abarca, para qué nivel fue pensada y el idioma. Además, permite compartir actividades de diseño propio.
- Brinda una sección titulada “Recursos para profesores” en la que se presenta una guía de uso escrita, un video y algunos archivos donde se fundamenta el uso de la herramienta en diferentes niveles educativos.
- En la parte inferior de la pantalla expone sugerencias de otros simuladores posibles para el abordaje de conceptos relacionados.

Cuestiones generales

Uso del simulador

Al ingresar al simulador, es posible observar una “máquina” a la que al ingresar una imagen u objeto matemático arroja un resultado. Este simulador cuenta con cuatro opciones o niveles entre los posibles de ser escogidos: patrones, números, ecuaciones y misterio.

- **Patrones.** Los elementos que se pueden ingresar a la “máquina” son imágenes predeterminadas (izquierda de la pantalla). Se puede asignar a la “máquina” una función o dos funciones que también están predeterminadas y se observan en la parte inferior de la pantalla. Además, ofrece funciones incógnitas señaladas con “?”, lo cual permite hacer predicciones sobre la función o la composición de funciones que se aplica a la imagen de entrada. Además, se puede tildar la opción “no ver” para predecir cuáles de las funciones predeterminadas se está utilizando en la “máquina”.

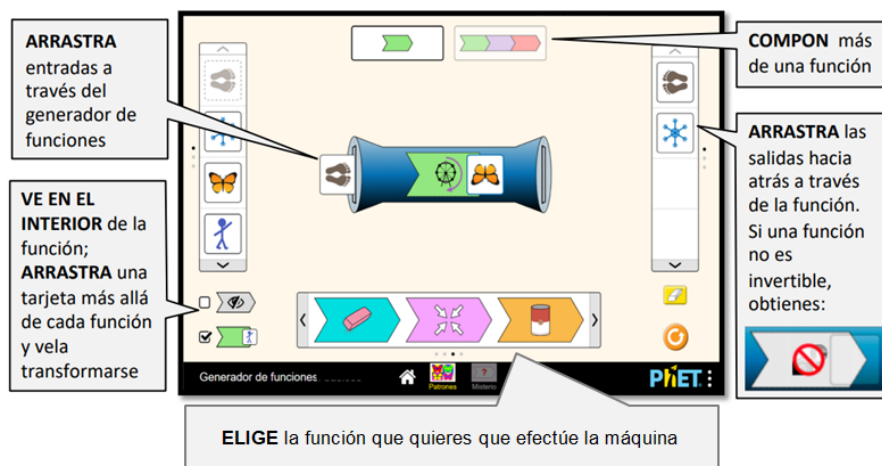


Imagen 1: Simulador de funciones: Patrones

Es posible pensar en consignas para el aula que permitan abordar el concepto de función y de composición de funciones a partir de la exploración con este simulador. Además, habilita a la exploración de transformaciones geométricas, a determinar qué funciones son dilataciones, rotaciones, reflexiones, traslaciones o una combinación de ellas. Asimismo, permite pensar en los objetos geométricos que permanecen invariantes ante la aplicación de una determinada transformación.

- **Números.** Aquí los elementos que se pueden ingresar a la “máquina” son los números enteros del -4 al 7 y las funciones son operaciones aritméticas con números enteros del 0 al 3. No sólo se observa la salida arrojada (derecha de la pantalla), sino también otros registros de representación numérica: tabla de valores (parte superior de la “máquina”) y el proceso de transformación numérica (parte inferior de la “máquina”). Este último permite la simplificación a partir de propiedades de números enteros.

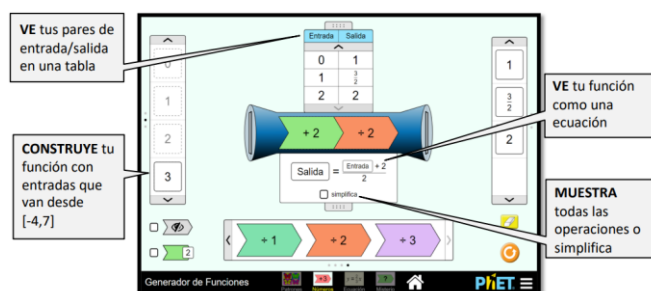


Imagen 2. Simulador de funciones: Números

Destacamos también el uso de la opción “no ver” dado que por ejemplo: si al ingresar 2, la “máquina” arroja 4 podría interpretarse que la “máquina” aplicó “más 2”; sin embargo si al continuar e ingresar 3 se observa que la “máquina” arroja 6, se debe descartar la hipótesis anterior y optar por la función “por 2”. Esto ofrece una posibilidad de introducir al estudiantado en el uso del lenguaje algebraico a partir de un trabajo aritmético y en el cálculo mental de operaciones con números enteros.

Ecuación. En esta opción los objetos posibles de ingresar a la “máquina” son los números enteros del -4 al 6 y la letra x . Las aplicaciones que se pueden realizar sobre lo ingresado son suma, resta, multiplicación y división con números enteros entre -3 y 3 (excepto la división por 0).

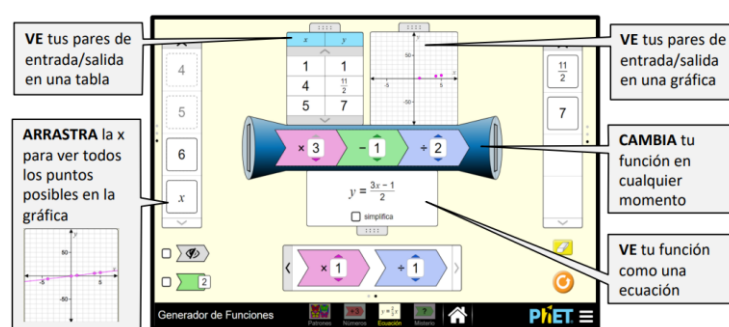


Imagen 3. Simulador de funciones: Ecuaciones

Identificamos en esta opción otras potencialidades no mencionadas anteriormente, a saber:

- Existe la posibilidad de ingresar 3 funciones a la “máquina”. Ésta las realiza en el orden propuesto considerando el resultado anterior.
- Aparece un nuevo registro de representación: el gráfico (en la parte superior derecha de la “máquina”), donde se observan los pares ordenados generados.
- Al ingresar x a la “máquina”, esta arroja como resultado la expresión algebraica simplificada, y en la gráfica se observa una recta que pasa por esos puntos que se generan desde los ingresos numéricos.
- Es posible discutir las propiedades utilizadas para arribar al resultado a partir de lo observado en el registro algebraico que se despliega debajo de la “máquina”.

Esto permite un abordaje para la comprensión del uso de la letra como variable en una función polinómica de grado 1, interpretando, comparando y convirtiendo distintos registros de representación. Además, habilita al trabajo de la ecuación polinómica de primer grado a partir de las interpretaciones, deducciones y conexiones entre los registros de representación ofrecidos.

- **Misterio.** Aquí los objetos posibles de ingresar son los números enteros del -4 al 7. Las aplicaciones que se pueden realizar se desconocen y no son posibles de observar bajo ninguna acción hasta ingresar el tercer número, pero siempre es posible observar la tabla de valores, la representación gráfica y los cambios generados dentro de la “máquina” (durante el proceso) mediante la opción “ve en el interior”. Esto permite justamente potenciar el trabajo de exploración, generación de conjeturas y escritura de patrones reconocidos. Esto implica necesariamente el uso del lenguaje coloquial y simbólico para expresar las acciones que está llevando a cabo la “máquina”.

Este simulador permite pensar en propuestas que inviten al estudiante a cumplir un rol de detective para el abordaje de todo lo antes señalado.

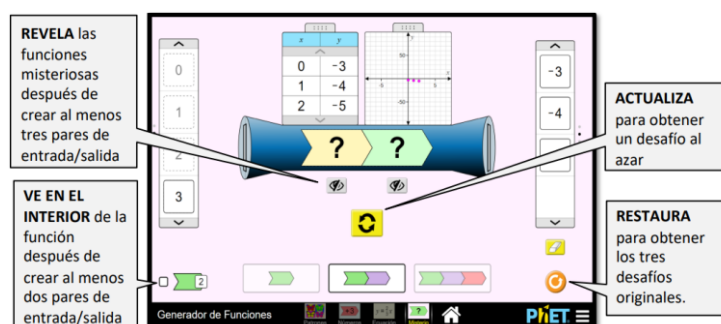


Imagen 4. Simulador de funciones: Misterio

Objetivos de Aprendizaje

En la página donde encontramos este simulador se señala que algunos objetivos de aprendizaje que se pueden establecer con su uso son:

- Definir una función como una regla al relacionar cada entrada con exactamente un resultado y actuar de manera predecible sobre las entradas.
- Predecir resultados de una función al usar entradas dadas.

- Componer funciones para crear una nueva función.
- Interpretar, comparar y traducir entre múltiples representaciones de una función algebraica.

A partir del análisis realizado previamente bajo el título *uso del simulador* podemos afirmar que es posible ampliar esta lista incorporando los mencionados posibles objetivos mencionados.

Conclusión

El estudio presentado en este escrito da cuenta de los primeros avances realizados en el marco de la adscripción en investigación.

El análisis de la encuesta realizada a las docentes de matemática de la EIS nos proporcionó información en relación a las TD que utilizan y los contenidos que consideran pueden ser potenciados por el uso de TD.

La mayoría utiliza en sus propuestas de enseñanza el software GeoGebra y videos educativos. Por esta razón decidimos, en el proceso de investigación, indagar respecto de otras TD no exploradas por las docentes; que podrían ser útiles para enriquecer los problemas matemáticos relacionados con los contenidos que mencionan como factibles de abordar y potenciar con el uso de TD. Estos contenidos refieren principalmente a los conceptos: función, tipos de funciones y objetos geométricos (expuestos en Tabla 2).

Por estas razones, nos enfocamos en la exploración de otras TD, particularmente distintos simuladores. Seleccionamos y profundizamos el análisis de uno de estos (el expuesto en esta ponencia) ya que permite abordar los contenidos mencionados. En este momento nos encontramos trabajando en la construcción de posibles consignas de problemas matemáticos donde el uso de este recurso sea genuino en la construcción de conceptos.

Bibliografía

Fernández Sampieri, Roberto, Fernández Collado, Carlos y Baptista Lucio, Pilar (2014). *Metodología de la Investigación*. 6ta Edición. McGraw Hill.

- Ferragina, Rosa y Lupinacci, Leonardo** (2017). Caracterización de la función mediada por software de geometría dinámica. El caso del punto dinámico. En G. Fioriti (Comp.), *Recursos tecnológicos en la enseñanza de Matemática* (pp.69-90). MIÑO Y DÁVILA editores.
- Lion, Carina y Maggio, Mariana** (2019). Desafíos para la enseñanza universitaria en los escenarios digitales contemporáneos Aportes desde la investigación. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 1(10), pp. 13-25.
- Maggio, Mariana** (2012). *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Paidós.
- McMillan, James y Schumacher, Sally** (2005). *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. 5ta Edición. Pearson Addison Wesley.
- Palmas Pérez, Santiago** (2018). La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 109-132.
- Repetto Jiménez, Emigdia y Mato Carrodegua, María del Carmen** (1998). La construcción social de la ciencia: Implicaciones para una enseñanza participativa de las ciencias experimentales. En A. G. Cabrera y A. L. Marín (Eds.), *Formación y participación de las organizaciones en el siglo XXI* (pp.111-119). Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Eje 3. El uso de tecnologías en el aula de matemática

Reflexiones y experiencias para el aula

Recursos audiovisuales: su potencial en el aula de Matemática

HERNÁN MARTÍN ALEGRE

martin.alegre7@gmail.com

RAQUEL GARCIA

raquelmlgarcia@gmail.com

Universidad Nacional de Rosario (UNR)

NATALIA SGRECCIA

nataliasgreccia@gmail.com

Universidad Nacional de Rosario (UNR). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen

En el aula el docente tiene la posibilidad de poner en práctica múltiples estrategias y herramientas para la enseñanza, entre las cuales se puede destacar la utilización de materiales audiovisuales. El uso de estos recursos despierta la curiosidad en el alumnado y genera un mayor interés, además de potenciar la imaginación y participación. En muchas ocasiones la forma de utilizar estos recursos consiste en proyectar el material audiovisual y luego ejercitar con alguna actividad que evidencie que ha sido visto con cierta atención. Lo que aquí se pretende es destacar que tales recursos pueden tomar un lugar principal en la unidad didáctica, dándole un sentido en los procesos de enseñanza. Un obstáculo muchas veces presente es la falta de tiempo que inclina al docente a optar por la no utilización del recurso en el aula. Por tal motivo es necesario saber elegir el material y/o los fragmentos adecuados, así como adaptarlo de acuerdo a las posibilidades del docente y los estudiantes. Un directorio web, como el Directorio Web de Material Audiovisual del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, facilita disponer de una colección de recursos audiovisuales que son de utilidad para un profesional de la Educación Matemática. En esta reflexión se intenta poder rescatar el valor del uso de la tecnología revalorizando en particular la utilización de los recursos audiovisuales y su aplicación en el aula de Matemática.

Palabras clave: educación matemática / directorio audiovisual / enseñanza

Introducción

Este trabajo se inscribe en el Proyecto de Investigación “Los procesos de construcción de conocimiento acerca de la práctica docente en el Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)” (2022-2026, 80020210200075UR), donde se indaga principalmente acerca de los procesos de construcción de conocimiento de la práctica docente en la carrera de grado Profesorado en Matemática (PM).

En relación con estos procesos, destacamos aquellos relacionados a la utilización de recursos audiovisuales. El cine, la televisión, los videos en plataformas, entre otros, han causado desde sus inicios asombro y admiración. Poco a poco cada uno de ellos se fue convirtiendo, en mayor o menor medida, en una posible herramienta de enseñanza dentro del aula, en general y de matemática en particular, en multiplicidad de niveles y contextos educativos.

En esta instancia se comparte con la comunidad de Educación Matemática participante en las Jornadas un directorio con este tipo de materiales que se ha venido desarrollando en el PM de la UNR.

Marco de referencia

Es innegable que los medios audiovisuales forman parte de la cotidianeidad y de manera predominante en la edad escolar. Nos encontramos en el aula frente a personas acostumbradas a interactuar con una pantalla, atraídos por ella. Según Calvi (2010):

El lenguaje audiovisual se está constituyendo como una de las formas de expresión simbólica más extendidas en nuestras sociedades contemporáneas, tanto en términos sociales como económicos, políticos y culturales. Se puede definir como audiovisual a todas aquellas expresiones simbólicas conformadas por imágenes-movimiento, sean éstas películas de cine, programas de televisión o todo tipo de videos y contenidos audiovisuales aún no clasificados o clasificables, tales como la multiplicidad de formas que circulan hoy a través de dispositivos y redes digitales (p.s.n.).

De acuerdo a lo anterior, podemos afirmar que los recursos audiovisuales se constituyen en una herramienta de gran relevancia en nuestras aulas, siempre que al momento de usarlos tengamos presente que dicha importancia no está asociada solo al recurso en sí mismo, sino que involucra una acertada selección del recurso conforme al objetivo de la clase como así de las estrategias didácticas que se apliquen a través de él. Esta situación requiere una actualización en cuanto a las estrategias por parte del docente.

Un buen uso de estos recursos, entre otras cosas, provoca la motivación y resulta atractivo para los estudiantes, facilita la comprensión, fomenta la creatividad y la posibilidad de poner en práctica competencias necesarias en la sociedad actual (Bastida Izaguirre, 2019). A su vez, puede generar un acercamiento a situaciones actuales o históricas y reales o fantasiosas.

Desde la visión de un aprendizaje multimedia (Mayer, 2005), donde se destacan tres tipos de maneras en que la memoria funciona (sensorial, de trabajo y a largo plazo), el estudiante procesa información a través de un canal verbal y otro canal visual. Estos le permiten procesar mejor un contenido si está presentado en ambos formatos, los cuales se complementan. En efecto, uno de los principios de esta teoría afirma que las personas aprenden mejor cuando los contenidos se muestran en formato imagen y texto, que si solo se trata de texto, además si son acompañados con una narración.

Metodología

Como se destacó, resulta importante realizar una buena selección del recurso audiovisual a utilizar, así como de la estrategia didáctica a emplear con el mismo. No se trata de “mantener entretenido al alumnado”, por lo que antes de la utilización del recurso se requiere una instancia de selección acorde a un plan establecido para la construcción de un conocimiento significativo.

La selección del recurso amerita realizarse con criterio (Alegre, Dominguez, Landaluce y Pípolo, 2018), a partir de tener en cuenta, por ejemplo, que sea relevante, de calidad, adecuado a la temática y a la edad del alumnado, entre otras cuestiones. Es por ello que juega un papel importante contar con un conjunto de recursos audiovisuales que incluso se podrá adaptar conforme al propósito de la

clase e incluso al tiempo con el que se cuenta para la misma. Por ejemplo, una vez seleccionado el recurso audiovisual, podría utilizarse en clase solo un fragmento del mismo, en otros casos podría dejarse como actividad para la casa su proyección completa y retomar solo partes significativas en el aula. Como afirma Cabero (1996), el papel que las tecnologías juegan en el aprendizaje puede justificarse por el número de sentidos que logran activar y la potencialidad de estos en el tratamiento de la información. De esta manera las tecnologías actuales no vendrían a suplantarse a otras tradicionales, sino más bien a complementarlas.

El DirMatAu

En esta línea, cabe destacar que desde el 2014 el Profesorado en Matemática (PM) comenzó a recopilar y organizar materiales audiovisuales en un Directorio Web de Material Audiovisual (DirMatAu), el cual se encuentra disponible en el sitio institucional de la FCEIA ([Directorio Web de Material Audiovisual](#)), como se observa en la Imagen 1.



Imagen 1: Página principal DirMatAu

Esto ha sido propiciado y sostenido por estudiantes y docentes de la carrera, de manera colaborativa, donde hay un grupo responsable con cierta renovación periódica que, en este momento, coincide con el equipo autor de este trabajo.

En el DirMatAu se presenta una selección de diversos materiales audiovisuales, organizados en Secciones (Educación, Matemática y Educación Matemática) y clasificados según su tipo (Películas, Documentales, Cortometrajes, Conferencias y Portales). (Imagen 2)

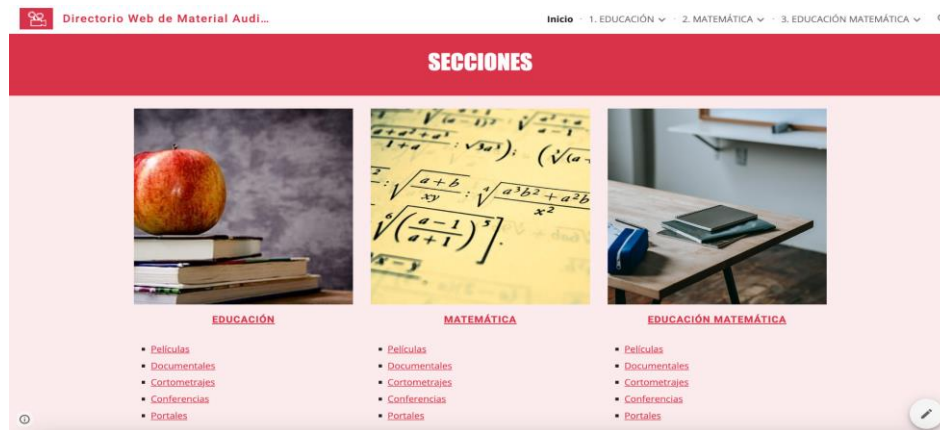


Imagen 2: Página principal DirMatAu “secciones”

Esta división en categorías es útil ya que el material audiovisual del Directorio es sumamente diverso respecto a los medios con los que se producen, las finalidades que tienen y las áreas en las que se enmarcan dentro de lo que es la Educación y la Matemática.

De esta manera, por ejemplo, se pueden encontrar documentales respecto a sistemas educativos de otros países, correspondientes a la categoría de “Educación”; mientras que las películas relacionadas a elementos matemáticos, sin abordar cuestiones propias de la problemática educativa, son ubicadas en la categoría “Matemática”. Esta manera de clasificar el material tiene como objetivo facilitar el acceso y focalizarlo, a partir de una sistematización especializada, a aquellos temas o contenidos que una persona esté buscando en particular en este Directorio.

Sumado a esto, el Directorio ofrece una breve descripción para cada material, junto a otros datos importantes como denominación, país, año, género, duración, resumen y link de acceso, en caso de estar disponible en la red. (Imagen 3)



Imagen 3: Página ejemplo película DirMatAu

Cabe destacar que, en la mayoría de los casos, se dispone un link de acceso al material en alguna plataforma gratuita, sin necesidad de pagar por ningún material audiovisual que aparezca presentado. En caso de no contar con dicho acceso, igualmente se informa sobre el material, sin brindar un enlace puntual. Con ello se hace énfasis en el ideal de proveer accesibilidad al material que se promociona y comparte en la página web, en relación a educación y matemática.

El directorio se actualiza periódicamente, con la colaboración de estudiantes, egresados y docentes del PM, que sugieren materiales para tener en cuenta. Actualmente se pueden acceder a 569 materiales (343 de Educación, 156 de Matemática y 70 de Educación Matemática). El DirMatAu representa una puesta en valor de numerosos y dispersos materiales que circulan en internet, con el fin de hacerlos visibles y accesibles para docentes y estudiantes, así como a la comunidad cercana.

Entre los pasos de selección de material que realiza el grupo que sostiene el Directorio, luego de un registro preliminar obtenido a partir de diversas fuentes de consulta, se encuentran: análisis de la pertinencia del material con respecto a las áreas de incumbencia (Matemática, Educación o Educación Matemática); detección de asuntos específicos de los que trata el material (tales como derechos humanos, experiencias biográficas, ficción matemática, historia de la disciplina, entre otros) y énfasis sobre tal asunto en el resumen que se comparte; obtención de datos de su ficha técnica (país de procedencia, año de elaboración, duración de la proyección, enlace de acceso), así como imagen característica (tapa, flyer).

Un docente que accede al DirMatAu, a la hora de seleccionar un material, ha de evaluar la relevancia, calidad y adecuación de acuerdo a su intencionalidad formati-

va y grupo con el que trabaja, así como también tiempo disponible y momento (en la clase, en el hogar). Por ejemplo, tomando el cortometraje "Matemagias" que cuenta con once cortos de 1 minuto c/u, el profesor puede proponer como actividad integradora a sus alumnos que a partir de la visualización de uno de tales cortos analice y descubra la "magia". Es decir, la matemática que puede haber detrás de tales situaciones una vez trabajados algunos conceptos relacionados.

Reflexiones

En síntesis, podemos destacar que los medios audiovisuales poseen gran atractivo y potencial didáctico. A través de su uso se incentiva la motivación, se promueve la imaginación, se desestructuran y estimulan otros sentidos. Al aplicarlos en nuestras clases pueden ayudar a aclarar conceptos, contextualizar ideas, nutrir significados. El profesor actúa como intermediario entre el medio y el alumno (Caro, 2006). A través de lo audiovisual podemos dar vida a cuestiones concretas y abstractas de la Matemática escolar.

Por ejemplo, en el taller "De cortometrajes matemáticos y sus posibilidades didácticas", brindado en 2018 durante el XIII Congreso Argentino de Educación Matemática, se trabajó junto a docentes de diversos niveles partiendo de un material audiovisual concreto enfocado para alumnos del nivel secundario, el cual presentaba referencias matemáticas en sus escenas. La actividad principal permitió a tales inscriptos colocarse en el lugar de sus estudiantes y vivenciar una manera de, mediante un material audiovisual, abordar ciertos contenidos matemáticos. Como cierre del taller, los inscriptos docentes debieron elaborar una actividad a partir de un cortometraje previamente seleccionado, aclarando el nivel educativo y qué conceptos trabajarían.

Este año se proyecta continuar actualizando los materiales e incorporando nuevos, ampliando la difusión dentro de la institución y fuera también. Para ello, se pretende realizar una propuesta de taller que implique el uso de materiales audiovisuales en propuestas educativas áulicas, haciendo foco en la posibilidad de integrar estas tecnologías en diversas actividades pedagógicas.

Hoy en día, el docente se encuentra frente al desafío de lograr que sus clases sean interesantes. Para lograrlo los recursos audiovisuales pueden ser de mucha

ayuda, pero demanda también que el profesor sea un mediador entre el recurso y los estudiantes. Para poder llevar adelante dicha mediación se necesita contar con material, saber seleccionarlo de acuerdo al propósito de la clase y ser capaz utilizarlo en favor de la enseñanza. Todo esto deja de manifiesto la relevancia de las iniciativas a nivel acceso abierto desde las Universidades Nacionales, donde sus propulsores son a su vez profesores en Matemática.

Bibliografía

- Alegre, Hernán Martín, Grossi, Sabrina y Sgreccia, Natalia** (2018). *De cortometrajes matemáticos y sus posibilidades didácticas. Taller en el XIII Congreso Argentino de Educación Matemática*. Sociedad Argentina de Educación Matemática.
- Alegre, Hernán Martín, Dominguez, Eliana, Landaluce, Natalia y Pípolo, Sofía** (2018). Materiales didácticos en la enseñanza de la Matemática. En Natalia Sgreccia (Coord.), *Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática* (pp.153-174). FarenHouse.
- Bastida Izaguirre, Dafne Bastida** (2019). Adaptación del modelo 5E con el uso de herramientas digitales para la educación: propuesta para el docente de ciencias. *Revista Científica*, 34(1), 73-80.
- Cabero Almenara, Julio** (1996). Nuevas tecnologías, comunicación y educación. *EDU-TEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (1), 3-16.
- Cabero Almenara, Julio, Duarte, Ana y Barroso, Julio** (1997). La piedra angular para la incorporación de los medios audiovisuales, informáticos y nuevas tecnologías en los contextos educativos: la formación y el perfeccionamiento del profesorado. *EDUTECH, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (8), 1-13.
- Calvi, Juan** (2010). La reconfiguración del campo cultural. Lógicas sociales de creación y Circulación del audiovisual e Internet. *TELOS, Cuadernos de innovación y comunicación*, (85).
- Caro, Raquel** (2006). Los recursos audiovisuales al servicio de las matemáticas. *Revista del CES Felipe II*, (5), 1-9.
- Flores, Pablo, Lupiáñez, José Luis, Berenguer, Luis, Marín, Antonio y Molina, Marta** (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Universidad de Granada.
- Mayer, Richard** (2005). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*. Cambridge University Press.

Marín Díaz, Verónica, González López, Ignacio y Cabero Almenara, Julio (2009). Posibilidades didácticas del cine en la etapa de primaria. La edad de hielo entra en las aulas. *EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (30), 1-11.

Una actividad de modelación con tecnología: La velocidad de Bolt en su histórica carrera de 100 metros de 2009

DANIELA LAURA PARADA

dparada@dm.uba.ar

Universidad de Buenos Aires y CONICET

CÉSAR LAU MEGO

clau@casio.com.br

Universidad Nacional San Marcos y Casio

Resumen

Presentamos una situación de aprendizaje basada en modelación usando modelos para la posición, velocidad y aceleración construidos teóricamente, y validados a partir de datos reales. En particular, se explora un modelo matemático para la velocidad de Usain Bolt durante su carrera de 100 metros en el Campeonato Mundial de 2009 en Berlín. Tal modelo, propuesto por Gómez, Marquina y Gómez (2013), parte de ciertos supuestos físicos y deriva ecuaciones de movimiento que luego ajusta a datos observacionales. A partir de este modelo se desarrolla una propuesta para su implementación y gestión en una clase de matemática de nivel secundario, tomando como marco de referencia el ciclo de la modelación de Borromeo (2006), y haciendo uso de recursos tecnológicos apropiados para la tarea.

Palabras clave: modelación matemática / situaciones de aprendizaje / aprendizaje mediado por tecnología / ajuste estadístico no lineal.

Sobre la modelación matemática

Las investigaciones de referencia alrededor de la modelación matemática (Blum y Niss, 1991; Aravena *et al.*, 2008; Blomhøj, 2009) ofrecen argumentos a favor de su integración en la enseñanza de la disciplina. En parte, porque indican que la modelación constituye un elemento importante para que los estudiantes tengan una imagen rica y amplia de la matemática como ciencia y como un campo de actividad de la sociedad y la cultura, para su constitución como sujetos dotados de competencia matemática.

Entendemos que el aprendizaje de la matemática es una actividad humana inserta en, y condicionada por, la cultura y por su historia, en la que se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos. La matemática es también el resultado acumulado, y sucesivamente reorganizado, de la actividad de comunidades científicas, y conforma un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurados y justificados. En este sentido, el conocimiento matemático se adquiere para plantear y resolver problemas que son tanto internos como externos a la matemática misma, y exhibe dos facetas (Ministerio de Educación Nacional, 2006): la práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, y contribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano; y la formal, constituida por los sistemas matemáticos, que se expresa a través del lenguaje propio de la disciplina en sus diversos registros de representación. Así, la competencia matemática de los estudiantes se desarrolla con base en procesos tales como:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas intra o extra-matemáticos, que requieren analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros.
- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista o conjeturas.
- Dominar procedimientos y algoritmos, y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficiente. Esto, en particular, involucra la capacidad de decidir con qué tecnología abordar el estudio y represen-

tación de los objetos matemáticos involucrados, lo que vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual y el agenciamiento de recursos.

En términos didácticos, entonces, las actividades de enseñanza basadas en modelación pueden resultar una vía adecuada para la adquisición, aprendizaje y retención de conceptos, métodos y resultados de la disciplina. Investigadores (Blum y Niss, 1991; Aravena *et al.*, 2008; Blomhøj, 2009) coinciden en que aumenta la motivación por el aprendizaje, y en que los estudiantes se vuelven corresponsables de su aprendizaje, a la vez que el rol del profesor se reconvierte al de un orientador.

En la literatura se encuentran varios trabajos cuyo principal interés es identificar y entender cuáles funciones cognitivas son activadas por los estudiantes cuando desarrollan actividades de modelación matemática (Kaiser y Sriraman, 2006; Blomhøj, 2009; Camarena, 2012). Algunos trabajos, desde un punto de vista descriptivo, reportan análisis de las trayectorias que siguen los estudiantes durante el proceso de modelación en situaciones específicas (Borromeo, 2006), mientras que otros, reportan el estudio de obstáculos cognitivos que presentan los estudiantes en tal proceso (Galbraith y Stillman, 2006). Para lo que sigue, tomamos el estudio de del ciclo de la modelación de Borromeo (2006) como marco para la gestión de la actividad propuesta.

El estudio de Borromeo (2006) parte del reconocimiento de una gran diversidad de esquematizaciones del proceso de modelación, llamadas, en general, “ciclos de modelación”. Borromeo parte de varias descripciones normativas o teóricas del ciclo de modelación y, a través de su estudio, hace una descripción empírica de tal proceso con base en las trayectorias individuales de modelación de los 65 estudiantes y 3 profesores con los cuales realizó el análisis. La reconstrucción de tales trayectorias le permitió evidenciar que, en efecto, el proceso de modelación no es lineal y es posible identificar fases y transiciones para hacer la esquematización que se observa en la Imagen 1.

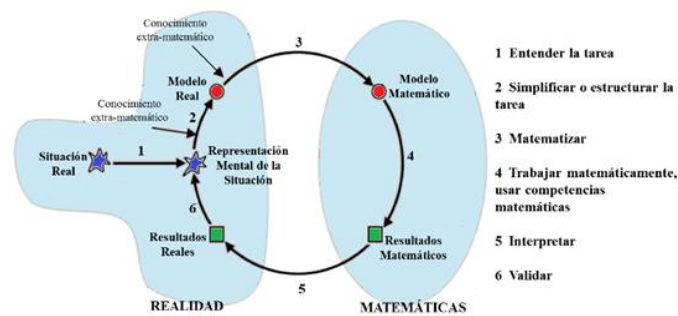


Imagen 1: Descripción empírica del Ciclo de Modelación. Adaptado de Borromeo (2006, p. 92)

En esta ponencia, tomamos la investigación de Borromeo (2006) como un modelo conceptual al que nos referimos para el diseño de la actividad de modelación cuya gestión describimos y abordamos aquí. Algunas de las etapas del ciclo serán comentadas en el contexto de la gestión de la actividad, Sin embargo, el ciclo es-
quemático en la Imagen 1, en la práctica real con estudiantes, no se da con procesos y transiciones tan claramente delimitados, sino que presenta ciertos vaivenes.

Modelo matemático para la velocidad de Usain Bolt

El desempeño de Usain Bolt en la carrera de 100 m llanos durante el Campeonato del Mundo de Berlín 2009 reviste un gran interés desde el punto de vista físico, en tanto Bolt alcanzó velocidades y aceleraciones que ningún otro atleta de esa categoría ha logrado desde entonces. Existen muchos modelos matemáticos para ajustar la posición y la velocidad de los corredores de 100 m. La propuesta de Gómez, Marquina y Gómez (2013) resulta de especial interés dado que el ajuste se hace con una grilla densa de observaciones relativas al desempeño de Bolt en la carrera (datos de la posición, velocidad y distancia de Bolt cada 1/100 s).

Más precisamente, consideran como supuesto que la fuerza ejercida por Bolt es constante durante toda la carrera. Esto se funda en el hecho de que el tiempo realizado por Bolt cuando estableció el récord mundial en 200 m (19.19 s) fue, aproximadamente, el doble de su tiempo en el récord mundial de 100 m (9.58 s). Por ello, el principal supuesto es que la fuerza que ejerce durante toda la carrera es constante, lo que implica que es capaz de mantener su fuerza horizontal y que ésta no disminuye por el cansancio. De las ecuaciones de movimiento derivadas bajo estos

supuestos y su solución obtienen un modelo para la velocidad en función del tiempo dada por

$$u(t) = \frac{AB(1 - e^{-kt})}{A + Be^{-kt}}, \quad (1)$$

donde A , B y k son constantes que están relacionadas con la fuerza horizontal y características del fluido a través del que se mueve (el aire). Mediante un ajuste no lineal por mínimos cuadrados con Origin 8.1 obtuvieron estimaciones para los parámetros A , B y k , tanto en (1) como en la posición, cuya ecuación omitimos, pero puede consultarse en Gómez, Marquina y Gómez (2013, p. 3).

Gestión de la situación

A continuación, describimos una posible gestión de una actividad de modelación para el trabajo con estudiantes de nivel secundario. Desde luego, todas las consideraciones dadas son sensibles del tipo de trabajo que los estudiantes lleven a cabo regularmente y deben ser sopesadas antes de poner en práctica la experiencia.

En esta actividad, el modelo, esto es, la ecuación que describe la velocidad en función del tiempo según vimos en (1), fue tomado de un artículo científico que es utilizado como parte de la información presentada a los estudiantes en la situación de aprendizaje. Este modelo servirá como insumo para que los estudiantes puedan construir otra representación de este, que les permita comprender la situación de la realidad modelada. En la etapa inicial de la actividad, considerando el ciclo de la modelación de Borromeo (2006), la situación real (SR) se presenta con un video de menos de 15 segundos que muestra el desarrollo de la carrera de 100 m en Berlín en 2009.

La actividad del tipo presentado tiene como característica que se construye o planifica tomando como insumo un modelo previamente elaborado. Esto implica que, durante la ejecución de la actividad, los estudiantes no obtendrán el MM correspondiente a la etapa 3 del ciclo de la modelación de la Imagen 1, que implicaría construir el modelo matemático inicial, pues en este caso, tal actividad requeriría resolver una ecuación diferencial que está fuera del alcance para un estudiante del nivel secundario. Sin embargo, que la obtención del modelo (1) no sea realizada de

manera directa por los estudiantes no hace que la actividad sea poco desafiante en lo matemático.

Ambientación para la representación mental de la situación (RMS)

La fase de ambientar la actividad es una etapa de suma importancia en el ciclo de modelación matemática, ya que establece el contexto que dará lugar a la concreción del modelo mental, explora y hace explícitos los conocimientos previos y anticipa y organiza los recursos necesarios para el desarrollo de la actividad.

Por lo general, en los problemas matemáticos contextualizados en problemas de cinemática y de frecuente aparición en los libros de texto, se proporcionan tablas de datos o gráficos que provienen de una supuesta situación real, según declaran los autores de dichas obras. Sin embargo, esto puede ser sometido a tela de juicio, en tanto los datos exhibidos suelen desatender aspectos físicos inherentes al fenómeno que se modela y más bien se atiende a la presentación de un modelo simplificado que suele ser dado sin más mediación a los estudiantes.

En esta fase, en cambio, proponemos presentar un video de 15 segundos de duración, cuya captura se observa en la Imagen 2, y que corresponde a la carrera de los 100 m del campeonato mundial disputado en Berlín en el año 2009, año en el Bolt estableció la marca insignia del actual ranking para la categoría masculina: 9,58 segundos.



Imagen 2: Captura del video utilizado para la ambientación¹

1 Video completo disponible en: rb.gy/hwqjzq

Se sugiere reproducir el video una, o a lo sumo dos veces. Luego, hacer una pausa para formular preguntas a los estudiantes sobre lo que ven en el video y motivar la reflexión sobre lo visto, por ejemplo, haciendo uso de la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”, descrita en Ritchhart, Church y Morrison (2014). Cabe recordar que esta fase es la que pretende hacer explícitos algunos aspectos a observar y busca centrar la atención en Usain Bolt y en su desempeño en la carrera, con el objetivo de estudiar su movimiento.

Algunas preguntas que se pueden plantear a los estudiantes en esta etapa son: *¿Qué ven? ¿Quién de ustedes vio la cámara que filma la carrera? ¿Cuánto tiempo duró la carrera? ¿Qué información presenta el video? ¿En algún momento de la carrera Usain Bolt corre más rápido que los demás corredores? Si es así, ¿En qué parte de la carrera lo hace? ¿Acelera más al inicio o al final de la carrera? Si dividimos la carrera en dos mitades, ¿En qué parte de la carrera acelera más? ¿En qué momento tiene la mayor rapidez? ¿Cuánto recorre en el primer segundo?*

Estas preguntas tienen por objetivo ayudar al estudiante a formar el modelo real (MR), para luego presentar el modelo matemático (MM) que será objeto de estudio del grupo. De la gestión es probable que encuentre que sus estudiantes no observan lo mismo, aunque todos estén viendo el mismo video. De allí radica la importancia de gestionar las intervenciones para guiar a los estudiantes, pues de esta etapa debe surgir el planteo explícito de alguna/s pregunta/s a investigar por a clase, que sea/n la/s que conecte/n con lo que sigue; como, por ejemplo, “¿Qué tan rápido es Usain Bolt en esta carrera?”, o cualquiera de las anteriores y que estén relacionadas con el modelo de velocidad, que es el que se presentará.

Introducción y tratamiento del MM

Una vez acordada la pregunta y con el MR a nivel individual ya formado, se presenta la función que modela la velocidad de Usain Bolt, es decir,

$$u(t) = \frac{1331(1 - e^{-0.8t})}{110 + 12.1e^{-0.8t}}, (2)$$

que corresponde a la función dada en (1), con los coeficientes estimados por Gómez, Marquina y Gómez (2013): $A = 110$; $B = 12.1$; $k = -0.8$.

La función dada por la ecuación (2), si bien contiene toda la información necesaria para dar respuesta a muchas de las preguntas planteadas, está en un registro de representación que no es el más transparente para algunos de los estudiantes. Es decir, aun en presencia del MM de forma explícita, la matematización será una actividad necesaria de parte de los estudiantes para que, a partir de su tratamiento y conversión, se transforme en un OM que les permita extraer resultados.

Según el nivel de los estudiantes, el docente podría hacer preguntas para guiar su trabajo y orientar la obtención de resultados mediante la manipulación del MM y el uso de conocimientos y competencias matemáticas. Algunas posibles preguntas podrían ser las siguientes: *¿Es verdad que Usain Bolt corre más rápido en la primera parte de la carrera? ¿Cuánto recorre en el primer segundo? ¿Cuánto recorre en el tercer segundo? ¿Corre más rápido al inicio, o al final de la carrera? ¿Acelera más al inicio, o al final de la carrera? ¿Es cierto que recorre menos de 9 m en los tres primeros segundos?*

Para muchas de estas preguntas, intuitivamente, los estudiantes podrían tener una conjetura inicial. Por ejemplo, es común que crean que se acelera más al final de la carrera porque perciben que Bolt va “más rápido”. Este tipo de creencias son ideales para trabajar durante la gestión de la actividad, y para someterlas a prueba a partir del MM.

El desarrollo de la competencia matemática también involucra la toma de decisiones sobre el tratamiento que se hará de los OM, a la vez que implica la elección de los recursos necesarios para tal fin. En particular, la ecuación (2) no responde a los tipos de funciones típicamente estudiados en el nivel, por lo que tal objeto posiblemente requiera ser tratado con algún recurso tecnológico que permita cambiar el registro de representación por otro más familiar y conveniente.

Obtención de resultados y contraste

Los resultados matemáticos (RM) pueden obtenerse tratando, en múltiples registros, el MM presentado. Además, una vez obtenidos, estos deben ser contrastados con la realidad (RR, resultados reales), por ejemplo, viendo el video nuevamente, para así identificar características que no se advirtieron al iniciar la actividad.

Por ejemplo, del tratamiento del MM dado en (2), puede obtenerse la curva que modela la velocidad para Bolt durante la carrera (Imagen 3). La observación de tal curva puede ponerse en diálogo con los saberes de los estudiantes, identificando, por ejemplo, características como: curvatura, inflexión, crecimiento, asíntotas, extremos, entre otros (tanto en lenguaje técnico como a partir de sus descripciones en lenguaje natural). Así y en conjunto, por ejemplo, con la representación dada por el registro tabular asociado a esa representación gráfica, se dispone de objetos matemáticos que pueden tratarse típicamente en este nivel para responder las preguntas iniciales de la actividad. Es en la puesta en juego de la competencia matemática de los estudiantes y de la orientación del docente que será posible responder, por ejemplo, si Bolt corre más rápido al inicio o al final de la carrera o si alcanza una velocidad máxima, entre otras.

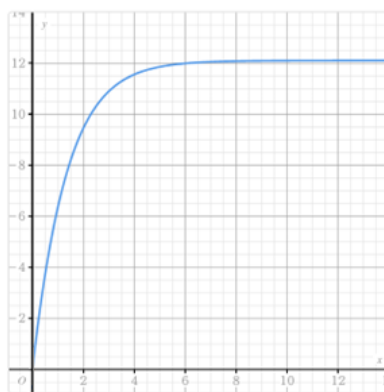


Imagen 3: Curva de velocidad estimada para Bolt en la carrera, en función del tiempo, que corresponde a la representación gráfica de (2) en ClassPad.net

En esta etapa, el estudiante contrastará los resultados matemáticos y tratamientos que haya hecho al modelo con la realidad: en este ir y venir de la realidad al mundo matemático, podrá afianzar su comprensión del fenómeno estudiado y podrá identificar, comprender y explicar qué es lo que sucede en cada parte de la carrera.

En esta actividad, esto es posible viendo el video nuevamente para identificar, por ejemplo, características que no se advirtieron al iniciar la actividad. Algo que puede aparecer durante esta etapa de la gestión es el identificar en la carrera de Bolt alguna característica que explique, quizás, la forma que adopta la curva de velocidad. Si los estudiantes detectan cambios en la postura de Usain Bolt en las diferentes etapas de la carrera, es deseable que intenten asociarlos a los RM obtenidos. Por ejemplo, al inicio de la carrera, la posición difiere de la que se adopta al iniciar

una etapa de velocidad casi constante (reducción de aceleración casi a cero). Esto puede observarse en las Imágenes 4 y 5. En efecto, este tipo de carreras evidencian diferentes fases. La obra de Ferro (2001) es un tratado de referencia para ampliar estos aspectos relativos al análisis biomecánico del atletismo. La comprensión del docente de este tipo de disciplina puede mejorar las intervenciones que se hagan durante la gestión de la actividad.



Imagen 4: Capturas de pantalla de la actividad desarrollada²



Imagen 5: Captura del video en el segundo 2.2³

En función del conocimiento disponible sobre las ecuaciones de movimiento, con el MM dado en (2) es posible caracterizar otras curvas vinculadas con el desempeño de Bolt en la carrera, como la aceleración, la posición y el espacio reco-

2 En la Imagen 4 se observa y destaca la posición corporal de Usain Bolt en las etapas de: salida (arriba, izquierda, segundo 0), aceleración (arriba, derecha, segundo 0.4), máxima velocidad (abajo, izquierda, segundo 4.3) y desaceleración (abajo, derecha, segundo 8.7).

3 En la Imagen 5 se observa el contraste entre la postura de Bolt (corredor con recuadro rojo), y los restantes: mientras Bolt está casi erguido, los demás corredores aún conservan la postura encorvada, típica de la salida.

ruido. Gráficos de la velocidad, aceleración y distancias recorridas en cada segundo, potencia y trabajo desarrollado por Bolt, se muestran en la Imagen 6.

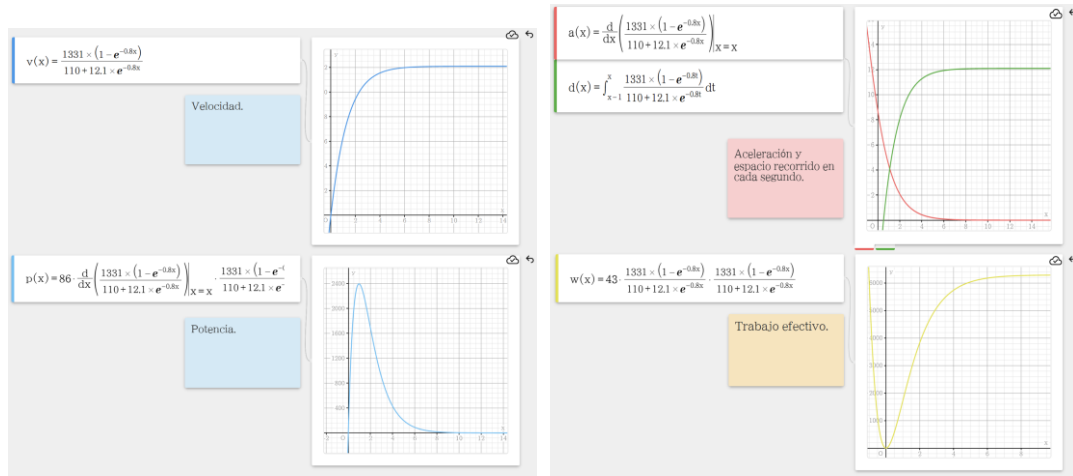


Imagen 6: Capturas de pantalla de la actividad desarrollada en el entorno ClassPad.net⁴

La interacción del estudiante con estas curvas derivadas del modelo contribuye a profundizar la comprensión del fenómeno en estudio. Por ejemplo, es sorprendente descubrir qué distancia ha recorrido por Bolt durante los primeros tres segundos de la carrera: como puede observarse en la Imagen 7, para el segundo 3.09, Bolt lleva una velocidad de 10.73 m/s, ha dado 12 pasos y, sorprendentemente, ha recorrido más de 22 metros desde la salida. Este dato puede estimarse con el modelo dado en (2), como puede observarse en la Imagen 8, y que exhibe un error de poco más de 0.2 m/s para la velocidad y de 0.6 metros para el espacio recorrido. Este ejemplo constituye una oportunidad sumamente rica para poner en diálogo los RM y los RR con la experiencia sensible. Para ello, puede pedirse a los estudiantes que identifiquen espacios cotidianos que tengan una longitud similar a la del espacio recorrido, a la vez que intenten imaginar (o replicar, si es posible) cómo es recorrer ese espacio en solo 3 segundos. Algo que también llama la atención es que no solo Bolt ha recorrido semejante distancia en tan poco tiempo: casi todos los corredores de la Imagen 7 tienen una posición similar en ese instante de tiempo, sin embargo, a medida que avanza la carrera, tales diferencias se amplían ubicando a Bolt en una primera posición “cómoda”, relativamente, respecto de los demás corredores. La razón de por qué esto ocurre no es inmediata ni puede comprenderse, únicamente, del tratamiento de la curva de velocidad. Para ampliar esto último puede

4 En la Imagen 6 se observan, de izquierda a derecha, y de arriba a abajo, las curvas de velocidad, aceleración, espacio recorrido, potencia y trabajo efectivo obtenidas a partir del modelo de Gómez, Marquina y Gómez (2013).

consultarse el trabajo de Lau y Parada (2024) en el que se modelan las curvas de velocidad, posición y aceleración del resto de los corredores de esa carrera.



Imagen 7: Captura del video que muestra datos asociados al desempeño de Bolt⁵

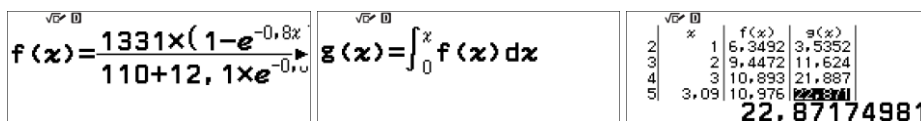


Imagen 8: Capturas de pantalla de la calculadora fx-991LA CW⁶

La vuelta a los RR y las conclusiones parciales a las que se lleguen sobre las preguntas que iniciaron la actividad permiten, no solo responderlas, sino abrir las puertas a nuevas preguntas. Un ciclo de modelación ideal debería ser capaz de poder iterarse, replicando así y en el nivel micro escolar, lo que ocurre en la verdadera investigación científica: la solución de un problema suele dar lugar a nuevas preguntas, formulaciones y conjeturas.

Conclusiones

Resaltamos la importancia de la modelación matemática para el desarrollo de competencias y pensamiento matemático en el aula de clase. Además, esta actividad busca ser un ejemplo de cómo integrar la tecnología en la enseñanza, y está pensada para ser trabajada con estudiantes de nivel secundario con conocimientos de álgebra y de estudio de funciones. Si bien la complejidad matemática de la función dada en (2) parece exigir conocimientos previos propios de los cursos de cálculo (como derivadas e integrales), esto no es un impedimento para ser abordada por estudian-

⁵ Video completo de la carrera, para intervalos de 1/100 segundos, disponible en: rb.gy/dtsm7s

⁶ En la Imagen 8 se observa una tabla en la que se representan las funciones de velocidad (2) y del espacio recorrido estimado con el modelo para el instante x.

tes de nivel secundario con los saberes previos que se han explicitado, pues se propone una mediación con tecnología para evadir el obstáculo operativo que el registro simbólico implica. Esto permite centrarse en los aspectos conceptuales, así como en el desarrollo de habilidades y procesos que cualquier actividad matemática requiere.

En esta propuesta, todo esto es posible a partir de la interacción de los distintos registros de representación del MM que son presentados, de forma tal que los estudiantes tienen la oportunidad de hacer la selección, tratamiento y conversión adecuados, obteniendo resultados que pueden ser contrastados e interpretados a la luz del fenómeno real.

Bibliografía

- Aravena, María, Caamaño, Carlos y Giménez, Joaquín** (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 49–92.
- Blomhøj, Morten** (2009). Mathematical Applications and Modelling in the Teaching and Learning of Mathematics. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey* (8–10 Jul, 2008). Roskilde Universitet.
- Blum, Werner y Niss, Mogens** (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.
<https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Borromeo, Rita** (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38, 86–95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Camarena, Patricia** (2012). La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 183–193.
- Ferro, Amelia** (2001). *La carrera de velocidad: Metodología del Análisis Biomecánico*. Librerías Deportivas Esteban Sanz.
- Galbraith, Peter y Stillman, Gloria** (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modeling process. *ZDM*, 38(2), 143–162.
<https://doi.org/10.1007/BF02655886>

- Gómez, Jorge, Marquina, Vivianne, y Gómez, Raúl** (2013). On the performance of Usain Bolt in the 100 m sprint. *European Journal of Physics*, 34(5), 1-10.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.3947>
- Kaiser, Gabriele y Sriraman, Bharat** (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38, 302-310.
<https://doi.org/10.1007/BFo2652813>
- Lau, César y Parada, Daniela** (2024). Modelación matemática en el aula: La velocidad de atletas de alto rendimiento en una carrera de 100 metros. *RIME*, 1(1), 39-67.
<https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013183>
- Ministerio de Educación Nacional** (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, 46-95.
https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ritchhart, Ron, Church, Mark, y Morrison, Karin** (2014). *Hacer visible el pensamiento. Cómo promover el compromiso, la comprensión y la autonomía de los estudiantes*. Paidós.

Eje 4. Educación matemática en la formación docente

Reportes de investigación

Problemas de geometría fractal: soluciones propuestas por profesores de matemática y por chatbots

PATRICIA SUREDA

psureda@niem.exa.unicen.edu.ar

VERÓNICA PARRA

vparra@niem.exa.unicen.edu.ar

ANA CORICA

acorica@niem.exa.unicen.edu.ar

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

DANIELA GODOY

daniela.godoy@isistan.unicen.edu.ar

SILVIA SCHIAFFINO

silvia.schiaffino@isistan.unicen.edu.ar

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Instituto Superior de Ingeniería de Software Tandil (ISISTAN). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen

Se presentan resultados de explorar, analizar y comparar las respuestas aportadas por cuatro profesores de matemática y por cinco chatbots a dos problemas de geometría fractal. Los problemas requieren el cálculo del área y del perímetro del copo de nieve de Koch y del triángulo de Sierpinski. Para cada respuesta se analizan diferencias y similitudes de las resoluciones a partir de las siguientes teniendo en cuenta la cantidad de iteraciones previas a la construcción de las expresiones para el cálculo del perímetro y área, para la forma en que construyen cada una de esas expresiones y si determinan o no los valores correctos correspondientes. Se concluye que hay diferencias significativas entre los procedimientos y justificaciones aportadas por los chatbots y los profesores. Se alienta el uso de este tipo de recursos siempre que se analicen críticamente las respuestas que este tipo de modelos ofrecen a los problemas matemáticos.

Palabras clave: fractales / resolución de problemas / profesores de matemática / chatbots

Introducción

La Geometría Fractal (GF) surgió como necesidad de estudiar ciertas curvas para las que la geometría clásica resultaba insuficiente. La GF comprende el estudio de conjuntos irregulares, y se caracterizan por tener propiedades geométricas y analíticas particulares (Chavil *et al.*, 2020). Algunos fenómenos en la naturaleza pueden ser descritos mediante la GF. (Binimelis, 2011). Así, los fractales tienen gran potencial para estudiar matemática tanto en las ciencias y las ingenierías, como en el arte. A pesar de esta potencialidad, la GF se encuentra poco explorada en la investigación en educación matemática (Chen *et al.*, 2018, Sinclair *et al.*, 2017) y menos frecuente aún, en los sistemas escolares como objeto de estudio. De hecho, y como lo han presentado diversas investigaciones (Autor), el estudio de la geometría clásica está ausente en el nivel secundario. Por lo tanto, no sería novedoso que la GF también lo esté aunque, al menos en el diseño curricular de la provincia de Buenos Aires, se propone enseñar dentro del bloque de Geometría en sexto año del nivel secundario.

Por ser la GF un punto de quiebre en relación a la geometría clásica los recursos para su enseñanza son escasos. La irrupción de las nuevas tecnologías de Inteligencia Artificial Generativa (IAG) conversacional y su adopción masiva, en la forma de chatbots pueden representar para los docentes una oportunidad para explorar problemas matemáticos que guíen a los estudiantes en los procesos de construcción de conceptos matemáticos complejos relacionados, por ejemplo, a los fractales, tales como autosimilitud, infinito, series, recursión, iteraciones, entre otras. En línea con lo mencionado anteriormente, en este trabajo presentamos los resultados de analizar el desempeño de cinco chatbots (ChatGPT, Gemini, Complot creativo, Copilot equilibrado y Copilot preciso) en la resolución de dos problemas de GF comparándolos con las respuestas aportadas a los mismos problemas, por profesores de matemática en servicio de la escuela secundaria. Ambos problemas requieren el cálculo del área y el perímetro de dos curvas fractales particulares: el copo de nieve de Koch y el triángulo de Sierpinski. Las preguntas de investigación de este trabajo son: ¿Las soluciones proporcionadas por los profesores de Matemáticas a los problemas difieren de las ofrecidas por IAG? ¿Si es así, cómo? y ¿IAG es capaz de proporcionar pruebas matemáticas de las soluciones al mismo nivel que los profesores de matemáticas?

Breve reporte de GF y Grandes Modelos de Lenguaje (LLMs)

Kataoka *et al.* (2022) sostienen que la GF existe en el conocimiento básico del mundo. Basándose en esto, los investigadores emplearon imágenes fractales para entrenar un sistema de reconocimiento de imágenes en lugar de utilizar fotos de objetos reales. Con este propósito, los autores crearon un conjunto de datos (FractalDB) con una variedad de fractales y pre-entrenaron una red neuronal convolucional. Los resultados fueron comparables a los de modelos entrenados enteramente en conjuntos de datos de última generación (como ImageNet). En Alabdulmohsin *et al.* (2024) se argumenta que la presencia de la autosimilitud en la estructura del lenguaje puede estar interconectada con la inteligencia exhibida por los LLMs. Los autores sostienen que los patrones/dependencias a corto plazo en el lenguaje, como los que ocurren dentro de párrafos, reflejan los patrones/dependencias en escalas más amplias, como documentos enteros. Esta es otra perspectiva de cómo las tareas de predicción de la siguiente palabra en LLMs pueden conducir a una comprensión de la estructura del texto en múltiples niveles de granularidad.

Los estudios orientados a evaluar el rendimiento de LLMs en razonamiento matemático se han preocupado principalmente por la construcción de conjuntos de datos de referencia y el análisis cuantitativo de los resultados de un modelo dado con respecto a ellos (Shakarian *et al.*, 2023, Frieder *et al.*, 2023). Aunque sus hallazgos pueden proporcionar una visión general del rendimiento de LLMs en el dominio matemático, aún existe una falta de comprensión de sus fortalezas y debilidades en campos matemáticos específicos, como la Geometría, y restringidos a idiomas particulares como el español. Encontrar soluciones a problemas complejos de Geometría como fractales es una tarea especialmente desafiante para la IA generativa basada en LLMs multimodales, ya que no sólo implica conocimiento de conceptos fundamentales (teoremas) y su aplicación correcta, sino también el uso de habilidades de razonamiento espacial. De hecho, incluso los modelos multimodales más avanzados presentan dificultades para entender con precisión figuras geométricas y las relaciones entre elementos fundamentales como puntos y líneas, e interpretar con precisión conceptos básicos como los grados de un ángulo (Gao *et al.*, 2023).

Metodología

En este trabajo se adopta una metodología de tipo exploratoria cuyo objetivo es examinar, analizar y comparar las respuestas que ofrecen chatbots y profesores de matemática en servicio a un mismo problema matemático: el cálculo del perímetro y área de fractales. Se analizan las respuestas generadas por los siguientes recursos de IAG: ChatGPT, Gemini y Copilot (creativo, equilibrado y preciso). La inclusión de múltiples chatbots permite aportar diversidad de respuestas ya que varían de acuerdo a la precisión, diversidad y capacidades en general de cada LLM (aprendidos a partir de distintos corpus de datos y con diferentes estrategias algorítmicas). Además de las respuestas de estos chatbots, se consideran las respuestas al mismo problema aportadas por profesores de matemática en servicio, que eran parte de un curso de formación continua. Una de las tareas del curso, era la resolución de problemas matemáticos como el del copo de nieve de Koch y el triángulo de Sierpinski. A continuación, se presentan los dos problemas de la GF tal como fueron presentados a los profesores y a los chatbots, como primer prompt.

Problema 1: el copo de nieve de Koch (también conocido como estrella de Koch o isla de Koch) es una curva fractal y uno de los primeros fractales que se han descrito. Se publicó en un artículo de 1904 titulado: *Sobre una curva continua sin tangentes*, construible a partir de la geometría elemental por el matemático sueco Helge von Koch. El copo de nieve de Koch se puede construir comenzando con un triángulo equilátero, sustituyendo cada lado por la curva de Koch. Calcular su perímetro y el área

Problema 2: el triángulo de Sierpinski es un fractal, con Waclaw Sierpinski en 1915 como su mentor. Para su construcción se parte de un triángulo equilátero. El primer paso consiste en dividirlo en cuatro triángulos equiláteros iguales (lo que se consigue uniendo los puntos medios de los lados) y eliminar el triángulo central, es decir quedándose con los tres triángulos equiláteros de los vértices. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que se ha hecho en el primer paso sobre cada uno de los tres triángulos obtenidos en el paso anterior. Se repite el proceso infinitas veces, obteniendo como resultado final el triángulo de Sierpinski. Calcular el perímetro y el área del triángulo de Sierpinski.

Solución de los problemas

Por cuestiones de espacio, sin dar detalles del cálculo del perímetro y área de cada fractal, resulta que el perímetro del copo de nieve de Koch requiere tomar el límite infinito de una sucesión cuyo resultado da infinito. Mientras que el área requiere de la suma de una sucesión geométrica que da un valor finito como resultado:

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{5} L^2.$$

Por su parte, tanto el perímetro como el área del triángulo de Sierpinski requieren la construcción de sus respectivas sucesiones para luego, con el paso al límite, obtener que el perímetro es infinito mientras que el área tiende a cero. Con ambos problemas se pone en evidencia la diferencia significativa entre la GF y la geometría clásica: por ejemplo, un perímetro infinito que encierra un área nula.

Interacción con los chatbots

En el caso de las chatbots, además de un primer prompt (el problema en sí mismo) fue necesario un segundo prompt cuyo objetivo fue obtener justificaciones matemáticas de los resultados obtenidos: ¿Podrías demostrar matemáticamente que el perímetro tiende a infinito, mientras que el área es finita/nula?

Categorización de las respuestas obtenidas

En el caso del copo de nieve de Koch, se tuvieron en cuenta seis respuestas al problema: una aportada por un profesor de matemática y las cinco restantes correspondientes a los cinco chatbots. En el caso del triángulo de Sierpinski, tres respuestas aportadas por tres profesores de matemática y por los mismos cinco chatbots. A los profesores que resolvieron el problema del cálculo del perímetro y el área del fractal se los rotula con P_i , donde i indica el número de orden de cada profesor. Para el análisis de las respuestas sobre el cálculo del perímetro y del área del fractal, se consideran las siguientes categorías de análisis (C_i):

- C1.** Cantidad de iteraciones antes de presentar el término general, sea del pe-
rímetro o del área.
- C2.** Cálculo del perímetro: a) se determina si construyen la sucesión (o serie)
correspondiente, b) si presentan su término general, c) si dan el valor correcto
del perímetro (que debe ser infinito) y d) el tipo de justificación de ese resulta-
do.
- C3.** Cálculo del área: a) se determina si construyen la sucesión (o serie) corres-
pondiente, b) si presentan su término general, c) si dan el valor correcto del
área y d) el tipo de justificación de ese resultado.

C _i	Profesores				Chatbots				
	P1	P2	P3	P4	ChatGP T	Copilot			Gemini
						Creati- vo	Equilibra- do	Preciso	
Copo de Koch									
C _i	✓	X	X	X	✓	✓	✓	✓	✓
Triángulo de Sierpinski									
C _i	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabla 1: Respuestas dadas por los profesores de matemática y los chatbots

Análisis de datos y discusión

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas para cada fractal.

Copo de nieve de Koch

El profesor P1 realiza 4 iteraciones (Categoría C1) antes de dar la expresión ge-
neral para el área y el perímetro del copo de nieve de Koch. Todos los chatbots dan
la expresión general del perímetro y el área para n iteraciones, sin iteraciones pre-
vias. El profesor P1, Copilot creativo y Copilot equilibrado dan la expresión correcta
para el término general de la sucesión correspondiente al perímetro (Categoría C2
b). P1 no ofrece ninguna validación matemática al respecto, mientras que las dos
versiones de Copilot lo hacen de forma coloquial. Tanto ChatGPT como la versión
más precisa de Copilot no describen el procedimiento de construcción de la suce-
sión (Categoría C2 a). La presentan directamente como la manera de calcular el

perímetro. Gemini, por su parte, recurre a la noción de recursión:

$$P_n = 3L + 4 \cdot \frac{4}{3} L \cdot P_{n-1}.$$

P1 y Copilot creativo explicitan el uso del límite para calcular el valor del perímetro. Los restantes chatbots hacen referencia a una idea intuitiva del límite, sin utilizar el término preciso. P1, Copilot equilibrado, Copilot preciso y Gemini afirman que el perímetro es infinito (Categoría C2 c). P1 es el único que lo obtiene a partir de sus procedimientos. Copilot equilibrado afirma que el perímetro es infinito en el resumen final de su respuesta, no durante el procedimiento correspondiente al cálculo del mismo mientras que Copilot preciso (Imagen 1, izq.) y Gemini (Imagen 1, der.) inician su solución afirmando que el perímetro es infinito Gemini además, alude a “demostrarlo” con la construcción del fractal.

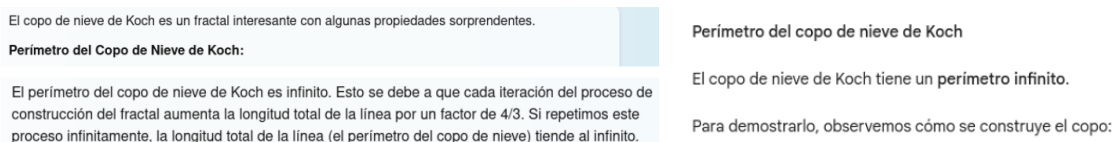


Imagen 1: Valor del perímetro según Copilot preciso (izq) y Gemini (der.)

ChatGPT afirma que, *evaluando estas expresiones, podemos obtener los valores numéricos para el perímetro y el área*, pero no da el valor del perímetro. Copilot creativo indica que el límite del perímetro *no existe* y que, por lo tanto, su valor *es infinito*. Esto se trata de un error matemático de chatbots ya que no es una afirmación lógicamente correcta: que un límite no exista no implica que sea infinito. Si bien Copilot creativo empleó un razonamiento incorrecto para afirmar que el perímetro es infinito, realiza la prueba a través del método del absurdo (Categoría C2 c). P1 no demuestra que el límite es infinito, pero detalla la forma de obtener el valor. ChatGPT, Gemini, Copilot equilibrado y Copilot preciso ofrecen algunas justificaciones vinculadas a reemplazar cada lado del triángulo por la curva de Koch, a las formas de dividir un segmento en tres partes iguales, etc. Si bien estas justificaciones aportan al cálculo del perímetro, no se consideran formales desde el punto de vista matemático.

La respuesta de P1 es la única que considera la altura y base del triángulo equilátero como técnica de cálculo del área del fractal. Ni el profesor P1 ni los chatbots presentan la construcción de la serie geométrica (Categoría C3 a) necesaria para determinar el valor del área. Sin embargo, P1, Gemini y Copilot (creativo y preciso)

aluden al término general de misma para calcular el área (Categoría C3 b). Gemini refiere a una recursión. P1, Copilot (creativo y preciso) determinan el valor correcto de la razón geométrica, aunque no ofrecen ninguna validación al respecto. ChatGPT, Gemini y Copilot equilibrado no aluden a la razón, lo cual es coherente con no haber mencionado la serie geométrica. Respecto al valor del área (Categoría C3 c), P1 y todos los chatbots, excepto Gemini, obtienen el valor correcto (que recordemos es

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{5} L^2).$$

Si bien Gemini afirma que es finita (lo cual es correcto), concluye erróneamente en que su valor es $2\sqrt{3}L^2$. Copilot creativo presenta una contradicción que proviene de rotular con la misma letra A a dos objetos matemáticos diferentes: el valor del área del triángulo inicial y el valor del área del fractal resultante. Esto deriva en concluir que $A = \frac{8}{5}A$. Finalmente, en relación a las justificaciones (categoría C3 d) que pueden identificarse en las soluciones, el único que ofrece algún tipo de ellas es Copilot creativo. Esto se identifica en qué justifica el valor del área utilizando resultados de las series geométricas cuyo valor absoluto de la razón es mayor a uno (Imagen 2).

Donde A es el área del triángulo equilátero inicial. En este caso, el límite del área cuando n tiende a infinito sí existe, y se puede calcular usando la fórmula de la suma de una serie geométrica infinita. Esta fórmula dice que si $|r| < 1$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Donde a es el primer término de la serie, y r es la razón común. En nuestro caso, podemos identificar que $a = A$, y que $r = \frac{4}{9}$. Como $|r| < 1$, podemos aplicar la fórmula, y obtener que:

Imagen 2: Justificación de Copilot creativo

El triángulo de Sierpinski

En relación al triángulo de Sierpinski, los tres profesores de matemática (P2, P3 y P4) y Gemini realizan cuatro iteraciones (categoría C1) antes de formular la expresión general tanto del perímetro como del área; mientras que los cuatro chatbots restantes (ChatGPT y Copilot en sus tres versiones) presentan directamente el tér-

mino general sin iteraciones previas. En cuanto a la construcción de la sucesión (categoría C2) del perímetro, dos de los tres profesores (P3 y P4) la proponen adecuadamente, y el tercero (P2) construye una serie (Imagen 3). Esto último no es correcto debido a que el perímetro de la siguiente iteración no resulta de sumarse al anterior. Por otra parte, ninguno de los chatbots alude explícitamente a la noción de sucesión. ChatGPT refiere al límite de una serie geométrica.

$$p_t = p_1 \cdot \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

La razón $r = \frac{3}{2} > 1$, entonces cuando $n \rightarrow \infty$ el perímetro tiende a infinito.

Imagen 3: Fragmento de solución del profesor P2

P2, P3, ChatGPT y Gemini son los únicos que dan la expresión general correcta para el perímetro (Categoría C2 b) mientras que Copilot (en sus tres versiones), propone expresiones incorrectas:

$$P_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot P_0; P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n; P_n = 3^n \cdot \frac{1}{2^n} = 3^{n-1}.$$

Todos los profesores y cuatro de los cinco chatbots (incluso P1, Copilot equilibrado y Copilot preciso que habían obtenido una expresión incorrecta) dan el valor correcto del perímetro (Categoría 2c). A excepción de Copilot creativo, que afirma que el perímetro es cero. Parece contradictorio llegar a un resultado correcto habiendo ofrecido expresiones algebraicas incorrectas (como es el caso de Copilot), pero en el caso de los profesores, esto es posible debido a que es intuitivo determinar que el límite del perímetro tiende a infinito. Mientras que en el caso de los chatbots puede atribuirse a que es altamente probable que los textos sobre el tema hablan de un perímetro tendiendo a infinito, y por eso ello está incluido en el contenido generado, pero no necesariamente las expresiones algebraicas están presentes en dichos textos, por lo que esa parte de construcción de la respuesta puede ser menos precisa. Cabe resaltar que la solución de los chatbots se construye no en base a un razonamiento formal, sino a una conjunción aleatoria de textos. Respecto a las justificaciones matemáticas de los resultados (Categoría C2 d), sólo uno de los tres profesores, presenta una justificación realizada a través de proyecciones paralelas. De los chatbots, sólo dos lo justifican por inducción sobre n (Copilot creativo y Ge-

mini). Entre estos dos la diferencia es que Gemini parte de una expresión correcta, mientras que Copilot creativo, no. Los restantes tres chatbots no dan justificaciones válidas.

Respecto al área (categoría C3), ninguno de los chatbots se refiere explícitamente a la sucesión. P2 construye una serie geométrica, mientras que P3 y P4, la sucesión correcta y necesaria para su cálculo (categoría C3 a). P3 parte de considerar la base y la altura del triángulo inicial para determinar el valor del área, mientras que P4 utiliza A_0 como su área inicial, sin especificar base y altura. Esto les permite formular la expresión general correcta para el área (categoría C3 b). ChatGPT es el único que presenta una expresión general correcta: lo hace por recursión y especificando el área inicial del triángulo. Copilot creativo y Copilot preciso dan expresiones incorrectas; mientras que Copilot equilibrado y Gemini no presentan el término general. Los tres profesores y dos chatbots (ChatGPT y Copilot preciso) obtienen el valor correcto del área (categoría C3 c), mientras que Copilot creativo afirma que el valor del área tiende al área inicial (Imagen 4). Los restantes dos chatbots (Copilot equilibrado y Gemini), a pesar de no ofrecer la expresión, obtienen el resultado correcto. Esto puede deberse nuevamente a las razones aludidas previamente.

• El área del triángulo de Sierpinski después de n iteraciones es

$$A_n = \left(1 - \frac{3}{4^n}\right) \cdot A_0$$

donde A_0 es el área del triángulo inicial. Esto se debe a que en cada iteración, se elimina el área correspondiente a un cuarto del área anterior. Si n tiende a infinito, el área del triángulo de Sierpinski tiende a A_0 el área del triángulo inicial.

Imagen 4: Término de la expresión general y valor del área según Copilot creativo

Respecto a las justificaciones (categoría C3 d), ninguno de los profesores las ofrecen y de los chatbots, hay tres que lo hacen de manera coloquial (ChatGPT, Copilot equilibrado y Copilot preciso). Por ejemplo, Copilot equilibrado afirma lo siguiente: *Cada vez que creamos estos triángulos similares dentro de un triángulo anterior, los triángulos recién creados no solo son similares al triángulo original, sino que cada triángulo creado tiene un área igual a 1/4 del área del triángulo anterior. Dado que repetimos este proceso infinitamente, el área total del triángulo de Sierpinski tiende a cero.* ChatGPT brinda una justificación coloquial que es incorrecta. Afirma que *el área se reduce a la mitad en cada iteración, ya que esta-*

mos eliminando un triángulo central. Por su lado, Copilot creativo recomienda la búsqueda de demostraciones en sitios web externos, sugiriendo algunos links. Gemini justifica a partir de series infinitas, lo cual es incorrecto.

Conclusiones

Las preguntas de investigación de este trabajo son: ¿Las soluciones proporcionadas por los profesores de Matemáticas a los problemas difieren de las ofrecidas por IAG? ¿Si es así, cómo? y ¿IAG es capaz de proporcionar justificaciones matemáticas de las soluciones al mismo nivel que los profesores de matemáticas? Respecto a las diferencias entre las soluciones de IAG y los profesores de Matemática, las soluciones de profesores y las de los chatbots pueden diferir en rigor, procedimiento y justificación. Las diferencias se deben a la formación y naturaleza de cada uno. Los profesores han recibido formación específica en matemáticas y en didáctica de la matemática y están familiarizados con los métodos y rigor requeridos en esta disciplina. Los chatbots, en cambio, si bien están entrenados en una gran cantidad de datos de texto y código, no poseen la misma formación específica en matemáticas. Estos últimos pueden ofrecer soluciones correctas, pero su capacidad para realizar pruebas formales al mismo nivel que los profesores es limitada.

En respuesta a la segunda pregunta, en general, los chatbots pueden proporcionar justificaciones matemáticas de soluciones, pero su capacidad para hacerlo al mismo nivel que los profesores de matemáticas puede variar. Algunos chatbots pueden ofrecer demostraciones sólidas y rigurosas, mientras que otros pueden carecer de precisión o cometer errores. Además, la capacidad de los chatbots para generar pruebas matemáticas también puede depender de la complejidad del problema y de la cantidad y calidad de los datos y el entrenamiento disponibles. En el caso específico mencionado, se observa que algunos chatbots pueden ofrecer justificaciones aceptables, pero también pueden cometer errores, como el caso de Copilot creativo al asignar la misma letra para el área del triángulo equilátero y la del copo de Koch.

En conclusión, es posible afirmar que las metodologías que incluyan IA generativa como parte activa en la resolución de problemas de la geometría fractal, pueden valerse de las observaciones del presente trabajo para su efectiva incorporación.

Finalmente alentamos el uso de recursos provenientes de la IAG siempre y cuando se analicen críticamente las respuestas que ofrecen.

Bibliografía

- Alabdulmohsin, Ibrahim, Tran, Vinh y Dehghani, Mostafa** (2024). Fractal Patterns May Unravel the Intelligence (Under review as a conference paper at ICLR 2024). <https://openreview.net/pdf?id=PQzdtBiKie>
- Binimelis, María Isabel** (2011). *Una nueva manera de ver el mundo (el mundo es matemático)*. EDITEC.
- Chavil, Dante Ivan, Romero, Isabel María y Rodríguez, José** (2020). Introducción al concepto de fractal en enseñanza secundaria usando realidad virtual inmersiva. *Desde el Sur*, 12(2), 61-629.
- Chen, Suanrong, Herron, Sherry, Ding, Jiu y Mohn, Richard** (2018). Assessing United States and Chinese secondary mathematics teachers' interest in fractal geometry. *Journal of mathematics education*, 11(2), 17- 34.
- Kataoka, Hirokatsu, Okayasu, Kazushige, Matsumoto, Asato, Yamagata, Eisuke, Yamada, Ryosuke, Inoue, Nakamasa, Nakamura, Akio y Satoh, Sutaka** (2022). Pre-training without Natural Images. *International Journal of Computer Vision*, 130, 990–1007.
- Frieder, Simon, Pinchetti, Luca, Chevalier, Alexis, Griffiths, Ryan-Rhys, Salvatore, Tommaso, Lukasiewicz, Thomas, Petersen, Philipp Christian y Julius, Berner** (2023). Mathematical capabilities of ChatGPT. arXiv:2301.13867.
- Gao, Jiahui, Pi, Renjie, Zhang, Jipeng, Ye, Jiacheng, Zhong, Wanjun, Wang, Yufei, Hong, Lanqing, Han, Jianhua, Xu, Hang, Li, Zhenguo y Kong, Lingpeng** (2023). G-LLaVA: Solving geometric problem with multi-modal large language mode (documento digital). <https://arxiv.org/pdf/2312.11370>
- Quijano, María de la Trinidad y Corica, Ana Rosa** (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria argentina: análisis de un diseño curricular. *Revista de Educación*, 22, 403-417.
- Shakarian, Paulo, Koyyalamudi, Abhinav, Ngu, Noel y Mareedu, Lakshmivihari** (2023). An independent evaluation of ChatGPT on mathematical word problems (MWP). En A. Martin, K. Hinkelmann, H. Fill, A. Gerber, D. Lenat, R. Stolle, F. van Harmelen (Eds.), *Proceedings of the AAAI 2023*. Editorial CEUR. <https://ceur-ws.org/Vol-3433/>

Sinclair, Nathalie, Bartolini Bussi, María, de Villiers, Michael, Jones, Keith, Kortenkamp, Ulrich, Leung, Allen y Owens, Kay (2017). Geometry education, including the use of new technologies: A survey of recent research. En G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th ICME* (pp. 277 - 287). Springer.

Modelización Matemática: revisión de algunos programas de estudio en los Profesorados en Matemática y en Física de una universidad pública del nordeste argentino

PATRICIA VILA TORRES

patryama@gmail.com

CLAUDIA ZANG

claudiamzang@gmail.com

GRETEL FERNÁNDEZ VON METZEN

gretelalefernandez@gmail.com

ALEJANDRO MORENO

morenoalejandro22@gmail.com

JORGE MANZUR

jorge.o.manzur@gmail.com

NATALIA LEÓN

natalia.leon@unam.edu.ar

Universidad Nacional de Misiones UNaM

Resumen

En el presente trabajo se realiza una descripción del análisis efectuado a programas de estudio de cinco asignaturas correspondientes a los profesorados en Matemática y Física, en el marco de un proyecto de investigación de una universidad estatal argentina. El análisis giró en torno a detectar la presencia y valoración de la modelización, ya sea tomada como proceso o bien si es contemplada como la aplicación de modelos matemáticos ya contruidos por la comunidad de estudio, a partir de palabras o frases que tengan que ver con la modelización y a partir de los cuales se pueda inferir la tendencia de los docentes autores de los programas. Estos fueron inspeccionados empleando técnicas de análisis de contenido. La revisión reveló que, de cinco programas, en dos de ellos se contempla de manera explícita cuestiones relacionadas con modelización. Además, se observó cierta tendencia al uso de modelos en secciones posteriores a la presentación de los contenidos, es decir, como ejemplificación de los conceptos teóricos.

Palabras clave: programas analíticos / Modelización Matemática / Formación de profesores

Introducción

Desde hace algunos años, la modelización matemática se ha instalado como un tema de discusión en la agenda de la investigación en Didáctica de la Matemática, por lo que resulta necesario estudiar cómo se realiza su incorporación en el aula.

Indagar acerca de la modelización es importante porque existen investigaciones, realizadas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Bassanezi, 2002; Bassanezi y Biembengut, 1997; Barquero *et al.*, 2006; Barquero, 2009), que resaltan los aportes que proporciona abordar desde la modelización la enseñanza de la matemática. Se adhiere a que el abordaje de la modelización permitiría lograr aprendizajes significativos y tratar la pérdida de sentido detectada en las prácticas usuales de enseñar y aprender matemática.

Los trabajos realizados en proyectos precedentes por este equipo de investigación (Zang *et al.*, 2013; Zang *et al.*, 2015; León *et al.*, 2019), han permitido observar que los estudiantes presentan ciertas dificultades para interpretar y extraer información de modelos matemáticos ya estudiados, como también problemas para identificar o aplicarlos en situaciones que lo requieran. Por otro lado, tampoco se manifestaron más cómodos ante situaciones abiertas que demandan la construcción de un modelo específico para su abordaje. En función de estas experiencias, la modelización matemática se abordó como tema de investigación, en sus diferentes aristas y concepciones, a fin de encontrar espacios de intervención en el ámbito en donde nos desempeñamos enseñando matemática.

Se presenta el análisis de los programas analíticos de cinco asignaturas pertenecientes a los planes de estudio de los profesorados en Matemática y en Física de una universidad pública argentina aprobados en el año 1997: Análisis Matemático II, Análisis Matemático III, Análisis Matemático IV de los profesorados en Matemática y en Física; Física V (Atómica) y Física VI (Nuclear) del profesorado en Física. Las materias de Análisis Matemático II y III se centran en el estudio del análisis diferencial e integral de funciones en una y varias variables, mientras que Análisis Matemático IV se centra en el estudio de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales. Las asignaturas Física V y Física VI abordan contenidos de Física Moderna. Dicha selección se realizó atendiendo a que los docentes involucrados en el equipo de investigación forman parte de los equipos de cátedra de estas materias. El análisis giró en torno a detectar la presencia y valoración de la modelización, ya sea tomada como proceso o bien si es contemplada como la aplicación de modelos matemáticos ya construidos por la comunidad de estudio, a partir de palabras o frases que tengan que ver con la modelización y a partir de

los cuales se pueda inferir la tendencia de los docentes autores de los programas. Para ello, se observa si la modelización matemática aparece mencionada de manera explícita en los programas o debe suponerse implícita en las diferentes partes del programa (fundamentación, objetivos, contenidos, estrategias de aprendizaje, etc.).

Marco teórico

La literatura referente a la modelización matemática es muy amplia y diversa. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se concibe a la modelización matemática como parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas (Barquero *et al.*, 2010). Hacer matemática, está asociado a la idea de producir, transformar, interpretar y ajustar modelos matemáticos que permitan dar respuesta a cuestiones problemáticas provenientes de diferentes ámbitos de estudio (Barquero *et al.*, 2014).

Incorporar la modelización a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, tanto en la escuela secundaria como en el ámbito universitario, podría dar respuesta a la problemática de la pérdida de sentido detectada en las prácticas habituales de enseñar y aprender matemática (Bassanezi y Biembengut, 1997; Biembengut y Hein, 2004). Sin embargo, se señala que, si bien la incorporación de la modelización matemática en el aula es un tema de agenda crucial para la comunidad de investigación en didáctica de la matemática y que, además, existe cierto acuerdo en cuanto a sus beneficios, su implementación a gran escala sigue siendo un tema de debate e investigación.

Una de las maneras de pensar a la modelización implica distinguir entre concebirla como una actividad científica o como un proceso de estudio de modelos. En el primer caso, se estaría hablando de un proceso que envuelve una serie de acciones, entre ellas, la observación de cierto evento o fenómeno, la experimentación, la abstracción y simplificación. La abstracción es un proceso que conduce a la formulación de modelos matemáticos y que incluye la enunciación de las hipótesis que intentan explicar las relaciones existentes entre las diferentes variables seleccionadas como constitutivas del fenómeno, la formulación del problema en un lenguaje especializado y las simplificaciones que deben realizarse en virtud de que la complejidad de muchas situaciones hace que sea imposible emprender un estudio detallado de los mismos (Bassanezi, 2002). El proceso de modelización es dinámico, se completa con las instancias de validación, se efectúan in-

interpretaciones y análisis a la luz del fenómeno en estudio con objeto de evaluar si explica o permite predecir la información con que se cuenta (*Blomhøj, 2008*).

Un esquema que caracteriza al proceso de modelización matemática se encuentra disponible en Rodríguez y Barreiro (2018).



Imagen 1: Esquema del proceso de Modelización Matemática (Rodríguez y Barreiro, 2018, p. 22)

Al respecto, Bassanezi y Biembengut (1997) proponen utilizar la modelación matemática para enseñar matemáticas. Vale aclarar que introducen el concepto de Modelación Matemática para distinguir el proceso de modelización utilizado a nivel escolar, del efectuado en la comunidad científica. Los autores plantean ajustar el proceso de modelización matemática de acuerdo a los contenidos prefijados en el programa de un curso regular.

Desde la TAD se cuestiona la idea de considerar a la modelización y a la aplicación como procesos independientes, se asume que ambos son procesos inversos que se condicionan y dan sentido en forma mutua (Barquero *et al.*, 2007). Una de las formas en que es posible pensar a la modelización es asociada al “aplicacionismo”, en el que primero se aprenden las matemáticas formales (desde un nivel axiomático) y luego se las aplica a diferentes campos de estudio (Barquero, 2009).

Este pasaje de la matemática formal hacia la aplicación de las mismas, pierde de vista la razón de ser que da origen al saber matemático, es decir, a la posibilidad de estudiar situaciones y problemas que permitan otorgar sentido al aprendizaje de definiciones, teoremas, técnicas y teorías. Desde este punto de vista, Barquero *et al.*, (2014) afirman que:

[...] la actividad de modelización puede ser entendida e identificada como una mera «aplicación» del conocimiento matemático previamente construido o, en su caso más extremo, como una simple «ejemplificación» de las herramientas matemáticas en ciertos contextos extra-matemáticos artificialmente contruidos con este propósito (p.89).

Estos aportes teóricos guiarán la revisión de los programas analíticos de las asignaturas mencionadas.

Metodología

Para el presente trabajo, se siguió un enfoque descriptivo de casos (Ander-Egg, 2010). Los datos recopilados a partir de la exploración de los programas de las asignaturas se realizaron empleando las técnicas que provee el análisis de contenido (Bardín, 1996).

Se seleccionó una muestra intencional atendiendo a un único criterio, que alguno de los docentes que integran los equipos de cátedra participe en el grupo de investigación. En los programas elegidos se exploró la noción de modelización a la que se adhiere.

En la puesta en práctica del análisis de contenido se consideraron fases de pre-análisis, exploración del material y tratamiento de resultados e interpretaciones. La re-lectura, permitió reconocer regularidades, posibilitó la detección de las palabras modelización, modelación o modelos, en diferentes secciones del documento.

Análisis de los programas y discusión de resultados

En el programa de Física V (Atómica), aprobado en 2008 y que continúa vigente, no se encontraron alusiones explícitas a la modelización matemática o al uso de modelos para el estudio de fenómenos físicos. Sin embargo, no se puede asegurar que el trabajo con modelos no esté presente en las clases. Por ejemplo, en el programa analítico se plantea abordar la radiación de cuerpo negro. Dicho tema puede ser abordado desde un punto de vista cualitativo sin presentar las ecuaciones matemáticas que lo modelan o bien siguiendo un enfoque histórico - epistemológico del modelo matemático obtenido por Planck. Estas formas de abordar el tema, ya sea en forma cualitativa o empleando modelos matemáticos, no se pueden inferir de la lectura del programa, se tiene conocimiento de ellas por la participación de una de las investigadoras en la cátedra en cuestión. Vale aclarar que en dicha asignatura se realiza un seguimiento histórico de los diferentes modelos que intentaron explicar, sin éxito, la radiación de cuerpo negro, hasta el

modelo de Planck. Luego, se aplica la ecuación de Planck, principalmente en la resolución de ejercicios. Esto se observa en el siguiente fragmento del programa (Imagen 2).

CONTENIDOS POR UNIDAD	Orígenes de la Mecánica cuántica
	Radiación . Ondas electromagnéticas. Radiación de cuerpo negro. La constante de Planck. Efecto Fotoeléctrico. Aplicación de RX . Origen y producción Espectros . Tipos. Aplicaciones. Efecto Compton

Imagen 2: Captura del programa de física atómica disponible en la página de la facultad

Algo similar pudo observarse en el programa de la Asignatura Física VI (Nuclear), también aprobado en 2008 y que continúa vigente. En él se plantea el estudio de la radiactividad. El decaimiento radiactivo se modela a través de una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución es una función exponencial. Nuevamente no está explícito en el programa el trabajo con modelos, se infiere que dicho trabajo se limita a plantear la ecuación que responde a ciertas hipótesis (no se realizan experimentos a partir de los cuales se obtienen datos que luego se generalizan con la formulación de algún modelo). Esto está en consonancia con el uso de modelos para la ejemplificación de conceptos previamente abordados. A continuación, se muestran capturas de fragmentos del programa en que se puede ver esto (Imagen 3).

FUNDAMENTACION	Esta asignatura forma parte del área específica, en esta asignatura se trata de interpretar los distintos modelos nucleares para comprender e interpretar los fenómenos radiactivos y los procesos de las reacciones nucleares. Es necesario comprender estos fenómenos para la utilización racional de la energía nuclear en usos que beneficien a la humanidad y no en destrucción de la vida sobre el planeta.

CONTENIDOS POR UNIDAD	UNIDAD I : EL Núcleo
	Propiedades del núcleo. Isótopos Descubrimiento de la radiactividad natural Radiación emitida por las sustancias radiactivas. Naturaleza de las partículas. Familias radiactivas. Desintegración radiactiva Equivalencia masa-energía Energía de ligadura. Fuerzas nucleares Niveles de energía en el núcleo
	UNIDAD II Reacciones nucleares

Imagen 3: Captura del programa de física nuclear disponible en la página de la facultad

En el caso del programa de Análisis Matemático II, aprobado en 2014 y que todavía sigue vigente, no se encontraron alusiones a la modelización matemática ni al trabajo con modelos en forma explícita. No obstante, entre los contenidos propuestos se menciona, de modo general, que se abordarán aplicaciones a la Física y en la fundamentación se mencionan problemas intramatemáticos (cálculo de área y volúmenes). Esto se refleja en los siguientes fragmentos (Imagen 4).

En el caso del programa de Análisis Matemático III, aprobado en 2008 y aún vigente, entre los objetivos se contempla la modelización. A partir de la lectura del programa no es posible determinar cómo es concebida la modelización: si se llevan a cabo procesos de modelización ejecutando las diferentes fases que atañen a dicha actividad o si se trabaja con la interpretación de modelos ya elaborados. En la siguiente captura se subraya uno de los objetivos que hace alusión a modelar (Imagen 5)

FUNDAMENTACION	El Análisis Matemático es una materia común a muchas carreras universitarias con orientación técnica o económica, los temas del AMII constituyen aplicaciones muy útiles para las áreas de geometría y de física, ayudan a comprender y a entender mejor, muchos aspectos de las mismas. Por ejemplo: las aplicaciones de las integrales definidas al cálculo de área, volumen, longitud de arco, centro de masa, trabajo y momento, los campos vectoriales y sus aplicaciones en la física, etc.
CONTENIDOS POR UNIDAD	1 UNIDAD I: Integrales Definición de integrales definidas según Riemann. Interpretación geométrica. Regla de Barrow. Teorema fundamental del cálculo integral. Propiedades. Teorema del valor medio del cálculo integral. Cálculo de área. Cálculo de área entre dos o más curvas. Cálculo de área por aproximación método de los trapecios. Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y de sólidos con secciones conocidas. Área de una superficie de revolución. Longitud de un arco de curva. Aplicaciones a la física: momentos y centros de masa. Integrales impropias.

Imagen 4: Captura del programa de Análisis Matemático II disponible en la página de la facultad

	Objetivos Particulares: - Adquirir e interpretar los conceptos básicos sobre funciones vectoriales. - Adquirir e interpretar los conceptos básicos del cálculo integral en funciones multivariantes. - Modelar matemáticamente problemas geométricos, físicos, económicos, etc., teniendo en cuenta la relación entre las variables que intervienen, resolverlos e interpretar y analizar los resultados. - Utilización de la computadora en la formulación, resolución e interpretación de resultados. - Adquirir e interpretar los conceptos relacionados con integración sobre formas diferenciales y sus aplicaciones.

Imagen 5: Captura del programa de Análisis Matemático III disponible en la página de la facultad

En el programa de la asignatura Análisis IV, aprobado en 2021 y que sigue vigente, se encontró mayor frecuencia de palabras vinculadas a modelización, se hace referencia a esto en la fundamentación, en los objetivos y en los contenidos.

	De acuerdo a lo expresado anteriormente, se ha contemplado en la Unidad N°1 presentar ED Ordinarias de primer orden a través del análisis y ejemplos sobre la formulación de modelos matemáticos en situaciones del mundo real. Inicialmente se abordará la búsqueda de solución apelando a los conocimientos básicos de cálculo y estudiando geoméricamente el comportamiento de las soluciones. Luego se desarrollarán las técnicas analíticas de solución usuales. Dada la tecnología disponible también se abordará, procedimientos numéricos y cualitativos por ser más efectivos que los analíticos en muchos casos. En la Unidad N°3 se presenta el método analítico de las Transformadas de Laplace, mediante el cual podemos encontrar soluciones de ciertas ED reemplazando los métodos de integración y diferenciación con cálculos algebraicos. Se analizará su efectividad en modelos con ED lineales de coeficientes constantes que tienen funciones de forzamiento discontinuas. La introducción al estudio de sistemas tendrá lugar en la Unidad N°4, trabajando básicamente con sistemas autónomos retomando lo trabajado en la Unidad N°1. Se resaltarán la importancia que tienen aquí el análisis cualitativo y el enfoque numérico. Se aplicará el concepto de estabilidad al estudio de sistemas ecológicos y mecánicos no lineales

Imagen 6: Captura de la fundamentación del programa de Análisis Matemático IV disponible en la página de la facultad

En los fragmentos (Imagen 6), se menciona el estudio de modelos matemáticos en situaciones del mundo real, la modelización no es llevada a cabo como un proceso, de acuerdo con las fases presentadas por Rodríguez y Barreiro (2018), sino como el estudio de modelos ya construidos. Además, se observa que lo que está escrito puede interpretarse como un acercamiento al aplicacionismo, en el sentido en que lo plantea Barquero (2009).

OBJETIVOS	♦ Identificar las ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales como modelos que permiten describir situaciones específicas. ♦ Adquirir destreza en el uso de los métodos analíticos específicos para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales. ♦ Reconocer los procedimientos cualitativos y numéricos como métodos válidos para obtener información de la solución. ♦ Comprender la geometría y el comportamiento a largo plazo de las soluciones. ♦ Analizar detalladamente los modelos lineales y casi lineales. ♦ Valorizar la efectividad de la Transformada de Laplace en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales. ♦ Discutir las tres ecuaciones clásicas en derivadas parciales y su solución por medio de separación de variables. ♦ Familiarizarse con el lenguaje de los software específicos de matemática. ♦ Valorizar la ayuda que brindan los programas específicos en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales y en el uso de las herramientas matemáticas que se emplean en los métodos de resolución.

Imagen 7: Captura de la sección de objetivos del programa de Análisis Matemático IV

Por otro lado, entre los objetivos se da una situación similar a lo descrito en el párrafo anterior. En el segundo de los objetivos resaltados, se infiere que se van a estudiar los modelos lineales y no lineales desde un punto de vista intramatemático. Esto se refleja en la Imagen 7.

Entre los contenidos, se menciona modelación por medio de sistemas. De la lectura no se puede establecer cómo se realizará esto, sin embargo, siguiendo la impronta presente en este programa, se asume que se trata del estudio de modelos en los que intervienen sistemas de ecuaciones diferenciales (Imagen 8).

CONTENIDOS POR UNIDAD	UNIDAD IV: Sistemas autónomos de primer orden.
	Modelación por medio de sistemas. Geometría de sistemas autónomos. Retratos de fase y puntos de equilibrio. Estabilidad. Métodos analíticos para sistemas autónomos especiales. Método de Euler para sistemas. Estudio de algunos modelos particulares.
	UNIDAD V: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Sistemas lineales y notación matricial. Sistemas lineales homogéneos, principio de linealidad. Solución general. Sistemas con coeficientes constantes. Métodos de resolución. Valores propios y planos de fase. Sistemas lineales no homogéneos. Sistemas casi lineales.
	UNIDAD VI: Ecuaciones diferenciales parciales. Conceptos generales y casos típicos. Método de separación de variables. Series de Fourier. La ecuación del calor. La ecuación de onda. La ecuación del Laplace. Existencia y unicidad de soluciones.

Imagen 8: Captura de la sección de contenidos del programa de Análisis Matemático IV

En la unidad VI se menciona la ecuación de calor, la ecuación de onda, la ecuación de Laplace. Si bien no se dice que estos son modelos de fenómenos físicos, se sabe que ellos están modelados matemáticamente por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se puede inferir que estos modelos son presentados como aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Conclusiones

Del análisis realizado se pudo notar poca presencia de aspectos relacionados con modelización, de cinco programas analizados, sólo en dos de ellos se contempla de manera explícita.

En ellos se presenta a la modelización tanto como un objetivo a ser alcanzado como un contenido a ser enseñado; se observa cierta tendencia al uso de modelos como ejemplificación de las aplicaciones de contenidos que fueron enseñados previamente. Esto está en consonancia con lo que se advierte desde la investigación educativa: la modelización entendida como aplicacionismo (Barquero, 2009).

El análisis de los programas realizado permite a los docentes involucrados poner en relieve el peso que se le da a la modelización como estudio de modelos ya elaborados o como proceso para obtener esos modelos. Cabe aclarar que los programas vigentes fueron aprobados hace muchos años, algunos, hace más de una década. Esto podría ser uno de los motivos por los que no se trabaje de manera explícita con cuestiones vinculadas a la modelización, dado que las cuestiones ligadas a la misma ocuparon mayor centralidad en los últimos años. El rol protagónico de la modelización para la formación de profesores queda plasmado en la resolución 856/13 del CIN (2013).

Sin embargo, se tiene consciencia de que de este trabajo no se pueden realizar generalizaciones y que, además, el mismo presenta limitaciones como instrumento para visibilizar la manera en que se aborda la modelización en las prácticas áulicas.

Por lo tanto, restaría continuar con observaciones de clases, análisis de guías de trabajo, entrevistas, etc. para ver si aspectos vinculados a la modelización se efectivizan en el aula y de esta manera poder caracterizar su abordaje en las prácticas de enseñanza de los docentes involucrados y de qué forma impactan en la formación de los estudiantes futuros profesores de Matemática y Física.

Bibliografía

- Ander-Egg, Ezequiel** (2010). *Métodos y Técnicas de investigación social*, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación. Lumen.
- Bardin, Laurence** (1996). *El análisis de contenido*. Akal.
- Barquero, Berta** (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis de doctorado). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Barquero, Berta, Bosch, Mariana y Gascón, Josep** (2006). La modelación matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 531-544). Publicaciones de la Diputación de Jaén, Universidad de Jaén.
- Barquero, Berta, Bosch, Mariana y Gascón, Josep** (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 235-244). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

- Barquero, Berta, Bosch, Mariana y Gascón, Josep.** (2000). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones (documento digital).
- Barquero, Berta; Bosch, Mariana y Gascón, Josep** (2014). Incidencia del "aplicacionismo" en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100.
- Bassanezi, Rodney Carlos** (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. Editorial Contexto.
- Bassanezi, Rodney Carlos y Biembengut, Maria Salett** (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación un nuevo método de enseñanza. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, 13-25.
- Biembengut, Maria Salett y Hein, Nelsón** (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125
- Blomhøj, Morten** (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, 23(2), 20-35.
- CIN** (2013). Propuesta de Estándares para la acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática. ANEXO IV Resol. N° 856/13. <http://acreditacion.unsl.edu.ar/wp-content/uploads/documentos%20de%20interes/cin/profesorado%20universitario/Resol.%20CE%20856-13%20Profesorados.pdf>
- León, María Natalia, Fernández von Metzen, Gretel, Salinas, Alejandro, Sánchez, Esteban, Zang, Claudia y Vila Torres, Patricia** (2019). Apreciaciones acerca de una breve experiencia de trabajo con modelos matemáticos (Libro de resúmenes de la III Jornada del departamento de Matemáticas de la FCEQyN). https://rid.unam.edu.ar/bitstream/handle/20.500.12219/5402/12281%20Leon_2019%20Apreciaciones.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Rodríguez, Mabel y Barreiro, Patricia** (2018). Modelización y resolución de problemas. En M. Pochulu (Ed.). *La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones* (pp. 17 – 26). GIDED – UNVM.
- Zang, Claudia, Fernández von Metzen, Gretel y León, María Natalia** (2013). Aportes para el análisis de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales de primer orden. *Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática. SOA-REM*, 15(57).
- Zang, Claudia, Fernández von Metzen, Gretel y León, María Natalia** (2015). Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 42, 150–165.

Uso competente de criterios de idoneidad didáctica para identificar conflictos epistémicos en videos educativos

MANUEL ALEJANDRO VERÓN

alejandroveron@fceqyn.unam.edu.ar

Universidad Nacional de Misiones UnaM

BELÉN GIACOMONE

belen.giacomone@unirsm.sm

Università della Repubblica di San Marino UNIRSM

MARCEL POCHULU

marcelpochulu@gmail.com

Universidad Nacional de Villa María UNVM

Resumen

El uso creciente de vídeos educativos en la enseñanza de las matemáticas ha consolidado su relevancia como recurso didáctico. Sin embargo, para que este recurso sea eficaz, es esencial que los docentes desarrollen competencias sólidas en su análisis y selección, garantizando así la idoneidad didáctica de los materiales que recomiendan a sus estudiantes. Este estudio presenta una experiencia formativa dirigida a futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, orientada al desarrollo de su competencia para analizar la idoneidad didáctica de vídeos educativos, específicamente en el contexto del cálculo diferencial de funciones. Los participantes fueron guiados para aplicar una serie de criterios de idoneidad didáctica, desarrollados dentro del marco del enfoque ontosemiótico. La mayoría de los participantes hace uso competente de los criterios de idoneidad didáctica para identificar conflictos epistémicos y logra emitir valoraciones pertinentes del proceso de instrucción observado. Los resultados muestran la utilidad de los criterios de idoneidad didáctica para potenciar la reflexión sistemática de los futuros profesores en la identificación de conflictos epistémicos en los videos educativos. Se sugiere, por último, la implementación de más actividades formativas que permitan a los futuros profesores reflexionar sobre el uso de vídeos educativos.

Palabras clave: videos educativos / formación de profesores / conflictos epistémicos / diferencial de una función

Introducción

Muchas investigaciones en educación matemática plantean la reflexión sobre la práctica docente como una competencia clave para el crecimiento y desarrollo profesional, y para la mejora de la enseñanza.

Desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2007), la competencia para la reflexión se destaca como un pilar fundamental en la formación de profesores (Godino *et al.*, 2017), y se resalta la importancia de desarrollar e implementar acciones formativas que fomenten, entre otras, la competencia de análisis de la idoneidad didáctica (Breda *et al.*, 2017; Castillo y Burgos, 2022). Esta competencia implica una reflexión exhaustiva, sistemática y crítica sobre la práctica docente (propia o ajena), así como de cualquier aspecto de un proceso instruccional, y la toma de decisiones fundamentadas para la mejora progresiva de dicho proceso de estudio.

Especialmente en el contexto actual, los videos en línea reflejan un proceso instruccional accesible a los estudiantes, desempeñando así un papel cada vez más relevante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, es crucial que los docentes adquieran competencia para valorar la idoneidad didáctica de estos recursos. Diversas investigaciones, como el trabajo de Beltrán-Pellicer *et al.* (2018), Santos y Acuña (2017), Muñiz-Rodríguez *et al.* (2021), entre otros, están centrando su atención en la calidad e idoneidad didáctica de los videos en línea. Un punto en común en estas investigaciones es la creación de oportunidades desde la formación inicial para fomentar la reflexión profesional sobre el uso de los mismos.

En este contexto, en el presente trabajo se describe el diseño e implementación de una acción formativa con un grupo de futuros profesores de matemáticas orientada a desarrollar en ellos la competencia de análisis de idoneidad didáctica. Los resultados que presentamos se focalizan en las reflexiones que realizan los participantes sobre aspectos epistémicos al observar un video que aborda el estudio de la diferencial de una función.

Marco teórico y problema de investigación

La noción de idoneidad didáctica, desarrollada en el marco del EOS, se entiende como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados, teniendo en cuenta las circunstancias y los recursos disponibles (Godino *et al.*, 2007). Supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones implicadas en los procesos de instrucción, los cuales son: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

En particular, la idoneidad epistémica “se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia” (Godino, 2013, p. 116). También, se utilizará la noción de conflicto semiótico entendida desde la perspectiva del EOS como “una disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos - personas o instituciones- en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (Godino, 2002, p. 258). Desde esta perspectiva, se considera que el profesor tiene que ser competente para reconocer los conflictos semióticos, ponerlos en discusión con los estudiantes y resolverlos para avanzar en la resolución del problema y progresar en los aprendizajes (Giacomone *et al.*, 2018).

Para el análisis y valoración de los videos, los futuros profesores de matemáticas (FPM) cuentan con una herramienta que guía la reflexión, la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de estudio de la diferencial (en adelante GVID-Diferencial) (Verón *et al.*, 2024), la cual presenta una síntesis de los conocimientos didáctico-matemáticos que se deberían tener en cuenta para efectuar una enseñanza idónea respecto a los significados parciales de la diferencial (Verón y Giacomone, 2021).

Teniendo en cuenta estos antecedentes y el marco teórico, en esta investigación nos proponemos abordar las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué tipos de prácticas (matemáticas y/o didácticas) recuperan los FPM para valorar la idoneidad didáctica?
- ¿Qué tipos de objetos (matemáticos y/o didácticos) identifican los FPM en las prácticas para valorar la idoneidad didáctica?

- ¿Cuál es el grado de adecuación de las valoraciones que realizan los FPM de las prácticas que identifican del video educativo?
- ¿Qué potenciales mejoras proponen los FPM en cada una de las facetas de la idoneidad didáctica para el video educativo?

Metodología

La experiencia se enmarca dentro de un ciclo de formación más amplio, cuyo objetivo es formar a los estudiantes en la evaluación crítica de propuestas de enseñanza, la identificación de posibles conflictos y la formulación de mejoras pertinentes. La investigación emplea una metodología cualitativa que recolecta y analiza datos a lo largo de un ciclo formativo, de tipo descriptivo y exploratorio.

Se aplica el método de las investigaciones de diseño (Kelly *et al.*, 2008) basado en las cuatro fases siguientes y fundamentadas por las herramientas del EOS: estudio preliminar, diseño de tareas y análisis a priori, implementación, análisis retrospectivo.

Contexto de aplicación y participantes

El ciclo formativo se implementó durante el año 2022, durante cuatro sesiones de dos horas y media cada una, en el ámbito del curso Seminario de Didáctica de la Matemática. Participaron 12 estudiantes, futuros profesores de matemáticas, que estaban cursando el cuarto año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un Instituto Superior de Formación Docente de Argentina. La mayoría de ellos tenían algunos conocimientos teóricos sobre las nociones básicas del EOS, ya que habían participado en distintas actividades orientadas al desarrollo de competencias didáctico-matemáticas en el contexto del diferencial (Giacomone y Verón, 2023).

La implementación del ciclo formativo se desarrolló en cuatro fases.

Fase 1. Aproximación de las facetas y componentes de la idoneidad didáctica para el estudio del diferencial. En esta fase se busca recuperar los significados personales de los estudiantes en relación con la noción de idoneidad didáctica, sus fa-

cetas y componentes mediante la Tarea 5. Luego se pretende avanzar en la discusión de la herramienta de reflexión de la idoneidad didáctica avanzando en la particularización de los criterios para el estudio del diferencial (Tarea 6).

Fase 2. Uso de los criterios para analizar y valorar la idoneidad didáctica de un problema. En esta fase se plantea la aplicación de la herramienta de reflexión, la guía de valoración de la idoneidad didáctica propuesta por Godino (2013) para el análisis y valoración del problema del cálculo de la masa (Tarea 7).

Fase 3. Uso de la GVID-Diferencial para el análisis y valoración de videos educativos. En esta fase se plantea la herramienta de la GVID-Diferencial para la reflexión del futuro profesor sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje de la diferencial a partir del análisis y valoración de dos videos educativos (Tarea 9).

Fase 4. Evaluación. En la Tarea 10, los FPM tienen que asignar una puntuación a los videos educativos según una escala del grado de adecuación de la idoneidad didáctica y expresar sus argumentos. Luego, en la Tarea 11 los FPM tiene que realizar una valoración de todo el ciclo formativo que han experimentado. Esta información resulta útil al profesor formador para reflexionar sobre qué aspectos mejorar.

Al final de toda la implementación, el formador y el equipo de investigación realizaron un análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo para identificar puntos de mejora y tomar decisiones para futuras implementaciones.

Por limitaciones de espacio, presentamos el análisis a priori e implementación de la Tarea 9 (Imagen 1) haciendo foco en la identificación de conflictos epistémicos.

Tarea 9

Consigna: Vamos a considerar los siguientes videos educativos:

Video 1: <https://www.youtube.com/watch?v=J5COVtWX8FU>

Video 2: <https://www.youtube.com/watch?v=IfoekgD8v2A>

- 1) Realizar un análisis y valoración de la idoneidad didáctica de cada uno de los videos utilizando la GVID-Diferencial, argumentando su respuesta e indicando, en lo posible, la evidencia y/o tiempo del mismo (Tabla 1).
- 2) En la casilla “otros comentarios” se pueden incorporar aspectos que podrían no estar incluidos en la guía.
- 3) Mencionar posibles mejoras para aumentar el grado de idoneidad de cada faceta.

Imagen 1: Consigna de la Tarea 9

A continuación, en el Cuadro 1, se presenta un recorte de la GVID-Diferencial (Verón *et al.*, 2024) destacando los indicadores de la idoneidad epistémica que se relacionan con los conflictos epistémicos.

Componente de la Idoneidad Epistémica	Código	Indicador
Conflictos epistémicos	CE1	Se debería evitar discordancias entre los significados del diferencial con los correspondientes a la institución de referencia, por ejemplo, en las carreras de matemática, física, ingeniería y ciencias experimentales.
	CE2	Se debería tener cuidado con la presentación de los objetos matemáticos relacionados con la diferencial para evitar errores, contradicciones y ambigüedades.
	CE3	Se debería tener en cuenta que los símbolos y expresiones que involucran al diferencial varían su significado según los contextos de uso y al estar relacionados con otros conceptos como derivada, integral y ecuaciones diferenciales, es importante dejar en claro cuál es el sentido de su uso. Por ejemplo: $dy = f'(x) \cdot dx$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$; $\int f(x)dx$; $\int df$
	CE4	Se considera necesario generar instancias de reflexión sobre la diferencia en la consideración de los diferenciales como cantidad infinitamente pequeñas o como variables cuyo límite tiende a cero
	CE5	Se considera oportuno propiciar espacios para que los estudiantes compartan sus interpretaciones y sentidos con relación a para qué se usan los diferenciales en la resolución de las situaciones problemas.

Cuadro 1: Indicadores específicos de los conflictos epistémicos para el estudio de la diferencial.
Fuente propia de la investigación elaborada a partir de Godino (2013)

Análisis a priori del video educativo

En esta sección se presenta una síntesis de la valoración de la idoneidad epistémica ‘experta’, es decir a priori, del video educativo 1 (Critigo92, 2019), que sirve de base para analizar las respuestas de los estudiantes en formación.

En relación con la *situación problema*, es posible advertir que en el video 1 la propuesta de la lección intenta establecer una definición (conceptualización) para los diferenciales dx y dy , considerándolos como variables y como cantidades muy pequeñas. Además, se propone establecer relaciones con la derivada e interpretar los diferenciales desde una representación gráfica.

Se utilizan diferentes tipos de *lenguajes*; natural, con el uso de término como diferencial, infinitesimal, muy pequeño, fórmula, aproximación, “entidad única” (ver Imagen 2); simbólico, algebraico y funcional, con las expresiones como:

$f, dx, dy, \Delta x, \Delta y, \neq, f'(x), \frac{dy}{dx}$ y $\frac{dy}{dx} = f'(x), dy = f'(x) \cdot dx$; gráfico y geométrico, con la representación de la función, recta tangente y los diferenciales en un sistema de ejes coordenados. Además, se plantea una situación de los diferenciales desde dos puntos de vista, como una variable que puede tomar valores reales, pero también se puede representar gráficamente como una cantidad muy pequeña.

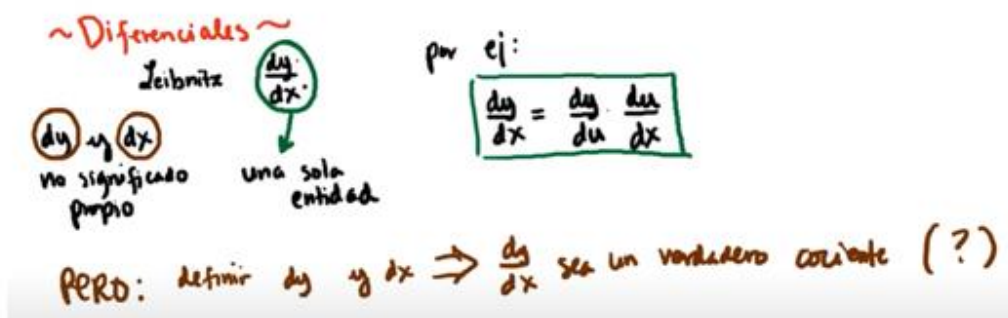


Imagen 2: Conflictos epistémicos y cognitivos en el video 1.

Fuente: (Critigo92, 2019, 3m1s)

Los *conceptos-definiciones* que intervienen son: diferenciales, cantidad, infinitesimales, incrementos, variables, valor real, cociente, producto, función, derivada, recta tangente, aproximación lineal, distancia, entre otros. Estos conceptos son adecuados para el nivel educativo de los FPM. Además, se pone en discusión las interpretaciones sobre los diferenciales y su representación simbólica intentando generar o negociar definiciones e interpretaciones sobre la diferencial.

En la lección se observa el uso de *proposiciones*; algunas se encuentran escritas como “ $\frac{dy}{dx}$ es una única entidad”, “ dx y dy no tienen significado propio” (ver Imagen 2), “ dx se define como una variable independiente” (ver Imagen 3) entre otras; otras se pueden identificar en el discurso, por ejemplo “El verdadero cambio en la función es muy parecido al cambio en la linealización” o “ dy es una magnitud infinitesimalmente pequeña”. Además, se utiliza el lenguaje simbólico y algebraico para establecer relaciones entre la derivada y la diferencial en la ecuación $dy = f'(x) \cdot dx$.

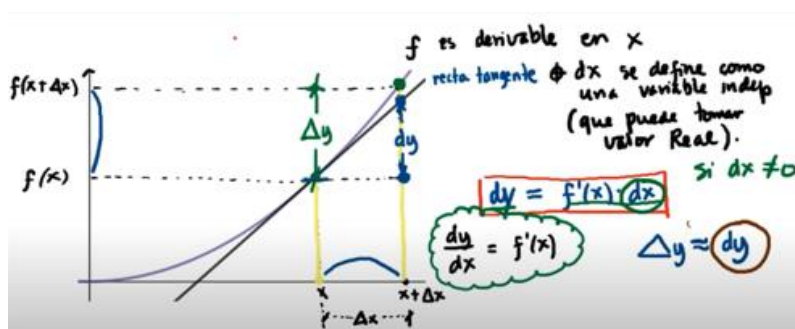


Imagen 3: Representación geométrica de los diferenciales en el video 1.

Fuente: (Critigo92, 2019, 11m9s)

Sobre los procedimientos, se menciona la secuencia de prácticas necesarias para establecer que el cociente de diferenciales es igual a la derivada. También, se explica cómo se determina gráficamente una representación geométrica de dy .

Los *argumentos* que se presentan para justificar y validar las proposiciones y procedimientos, la mayoría son adecuados para los FPM, sin embargo, no se explica porque se expresa la dy como un producto de la derivada y dx . Asimismo, se emplean representaciones geométricas para apoyar y reforzar las explicaciones y argumentaciones. Es interesante notar que la lección intenta, en cierta medida, plantear una situación de discusión y justificación de porque con las derivadas los diferenciales no tienen significado propio, pero luego si adquieren significado.

En la lección del video 1, se establecen *relaciones* entre dos consideraciones de la diferencial; por un lado, son definidos como variables; pero, por otro lado, se los trata como cantidades infinitesimales en la representación geométrica (ver Imagen 3). Además, se establecen conexiones entre la diferencial y la derivada.

Se observan *procesos matemáticos* como la *conceptualización*, que se produce al establecer las definiciones de la diferencial; el *proceso de representación* y *comunicación* mediante las expresiones simbólicas que identifican y relacionan a la diferencial; la *particularización*, al representar geométricamente en un sistema de ejes coordenados; y la *generalización* al plantear que los diferenciales son variables.

La autora aborda además un potencial conflicto epistémico vinculado principalmente al lenguaje y su interpretación por parte de los estudiantes (conflicto cognitivo): “ dy/dx es una única entidad”, ya que se dice que no es un cociente, pero se escribe como uno (ver Imagen 2). Resulta que no es un cociente para la derivada, pero si representa un cociente para los diferenciales, si bien cambia la interpretación y lectura, no cambia la representación simbólica. Por otro lado, en la lección visionada se genera un conflicto epistémico al escribir que “ dx y dy no tienen significado propio” (ver Imagen 2), siendo que en minutos posteriores estos adquieren significados como variables. De esta manera se observan discordancias en el discurso de la autora, que, si bien, son retomadas y consideradas, es necesario promover nuevas instancias de reflexión sobre estos conflictos, propios del estudio de la diferencial (Verón *et al.*, 2024).

Resultados

En la lección del video 1, 9 FPM han logrado identificar las prácticas matemáticas en las cuales emergen diferentes tipos de conflictos epistémicos: algunos vinculados a las expresiones simbólicas de la diferencial, otros a la relación de la diferencial con la derivada, y por último, al proceso de conceptualización de la diferencial y sus relaciones. Algunos FPM reflexionan sobre otros aspectos que van más allá de la observación de lo que sucede en la lección. Esta asociación competente es importante ya que logran reconocer conflictos en las prácticas didácticas que tienen relación con las ambigüedades y/o contradicciones que surgen de las explicaciones (discurso) de la autora del video en los diferentes momentos didácticos de la lección (configuraciones didácticas).

Por ejemplo, el estudiante E3 identifica que la expresión $\frac{dy}{dx}$ genera un conflicto, porque en el video plantea que es una entidad única y que no representa un cociente, aunque luego se defina como un cociente de diferenciales (ver Imagen 2). En esta valoración convergen diferentes conflictos epistémicos, por un lado, hay un *conflicto epistémico asociado al lenguaje simbólico* (asociado al CE3), ya que se denota con un cociente, pero se lo presenta como un símbolo que no representa un cociente sino una derivada (Ely, 2021; Verón y Giacomone, 2023).

Por otro lado, hay un *conflicto epistémico en los procesos de conceptualización, interpretación y representación* del cociente de diferenciales, porque se establece que se debe considerar como un único símbolo (Ely, 2021), pero luego se separa en dos partes para definir a cada diferencial y adquiere una interpretación de cociente, este hecho es didácticamente significativo porque los cambios que producen generan conflictos epistémicos y cognitivos. Estos hechos están asociados al CE1 y CE2. A modo de ejemplo, se muestran las valoraciones de E3 y E9 en las Imagen 4 y la Imagen 5.

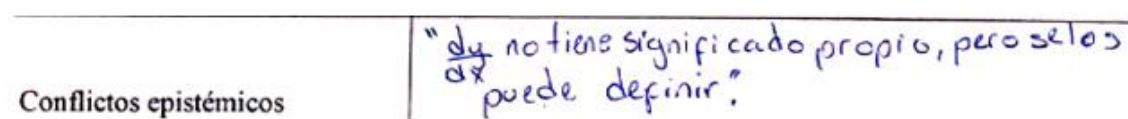


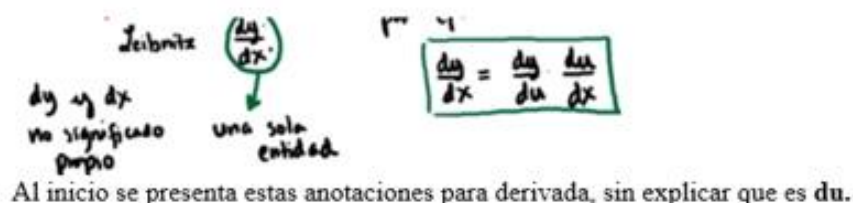
Imagen 4: Parte de la resolución de E3 de la Tarea 9 del video 1

Conflictos epistémicos

Presenta una contradicción al decir que no se puede tomar como un cociente, pero luego se transforma en un cociente.

Imagen 5: Parte de la resolución de E9 de la Tarea 9 del video 1

También se presenta un conflicto en el proceso de conceptualización e interpretación de la diferencial al mencionar que “ dx y dy no tienen significado propio, pero se las puede definir” (E7), hecho asociado al CE1 y CE2, como se aprecia en la respuesta de E11 en la Imagen 6. Esta respuesta intenta recuperar las contradicciones y ambigüedades (CE2) que surgen en la lección (Oldenburg, 2016). Además, logra identificar que la autora no explica previamente el significado de du .



Nos dice en primer momento, que el objetivo es definir a dy y dx como un verdadero cociente. Pero, antes ya escribe ese cociente y se menciona que es la derivada, sin fundamentar porque Leibniz lo pensó de esa forma o si ya se había basado en el concepto de diferencial.

Imagen 6: Parte de la resolución de E11 de la Tarea 9 del video 1

Finalmente, se recupera la reflexión que realiza E10 al plantear que en el proceso de estudio observado no es posible asociar momentos de discusión y participación de los estudiantes (CE4 y CE5) aspecto importante para construir significados.

Discusiones y conclusiones

En este trabajo, hemos hecho un esfuerzo por poner en evidencia cómo los profesores pueden hacer reflexiones interesantes, justificadas y sistemáticas, haciendo un uso adecuado de criterios de idoneidad. Es decir, luego de un proceso de formación diseñado, evidenciar como ellos se muestran competentes para valorar recursos para la enseñanza. A diferencia de otros trabajos, aquí no se pone en relieve qué tan idóneos resultaron los videos, sino qué tan competentes pueden ser los futuros profesores al identificar potenciales conflictos epistémicos.

Para reflejar este proceso, se han clasificado las valoraciones que realizan los FPM en tres categorías: Adecuado, Poco adecuado y No adecuado.

Adecuado: utiliza y valora de manera correcta el indicador o parte de él. Además, incluye al menos una evidencia que muestre y justifique su valoración.

Poco adecuado: utiliza y valora de manera parcialmente correcta el indicador o parte de él. O no se incluye evidencia que muestre y justifique su valoración.

No adecuado: utiliza y valora de manera incorrecta el indicador

Ausencia: se incluye esta categoría cuando el FPM no hace referencia al indicador para valorar las prácticas matemáticas y didácticas del video.

El grado de pertinencia de las valoraciones que realizaron los FPM para cada uno de los indicadores, se sintetizan en el Cuadro 2.

Faceta Epistémica		Pertinencia de la valoración		
Componente	Indicadores Códigos	Adecuado	Poco adecuado	Nada adecuado
Conflictos Epistémicos	CE1	4		
	CE2	4	2	1
	CE3	5		
	CE4		1	
	CE5		1	

Cuadro 2: Grado de pertinencia del uso de los indicadores de los conflictos epistémicos por los FPM del video 1 (n=11)

El indicador CE3 es el más utilizado por los FPM; esto era de esperar ya que hace referencia al uso de símbolos y expresiones relacionados a la diferencial. Los FPM se mostraron reflexivos sobre la discordancia y ambigüedades que presenta la diferencial en el video, esto se refleja en el uso idóneo que dieron a los indicadores CE1 y CE2. Los indicadores CE4 y CE5 son los menos utilizados ya que la información que se observa en el video es insuficiente para valorar posibles interacciones con estudiantes.

En general, utilizan la mayoría de los indicadores de manera competente al valorar el video, aportando evidencias, argumentaciones o ejemplos específicos que justifican su valoración. Es importante destacar que el uso idóneo de los indicadores de la GVID-Diferencial no consiste en verificar su presencia en el proceso de estudio observado, sino que, principalmente, implica disponer de información detallada de los hechos que ocurren y de elementos de referencia que autoricen a emitir

juicios de adaptación, pertinencia o mejora correspondientes a la dimensión evaluada.

En conclusión, los resultados mostraron cómo los futuros profesores pueden involucrarse en la reflexión progresivamente de manera efectiva gracias al uso de herramientas teóricas específicas. Resulta entonces necesario poner en marcha acciones formativas para desarrollar la competencia de análisis de los docentes cuando se trata de valorar estos videos o cualquier otro recurso didáctico (Giacomone *et al.*, 2018).

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PID2021-122326OB-I00 (España) y 16Q1706-PI (FCEQyN – UNaM, Argentina).

Bibliografía

- Beltrán-Pellicer, Pablo, Giacomone, Belén y Burgos, María (2018).** Los videos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación*, 30(4), 633-662.
- Breda, Adriana, Pino-Fan, Luis Roberto y Font, Vicenç (2017).** Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Burgos, María y Castillo, María José (2022).** Idoneidad didáctica de videos educativos de matemáticas: una experiencia con estudiantes para maestro. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 25(3), 341-366.
- Critigo92.** (29 de enero de 2019). Diferenciales (Archivo de Video). <https://www.youtube.com/watch?v=J5COVtWX8FU>
- Ely, Robert (2021).** Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education*, 53, 591-604.
- Giacomone, Belén y Verón, Manuel Alejandro (2023).** Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos en la resolución de un problema del diferencial. En C. Jiménez-Gestál, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 267- 274). SEIEM.

- Giacomone, Belén, Godino, Juan Díaz y Beltrán-Pellicer, Pablo** (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, 1–26.
- Godino, Juan** (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, Juan** (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, Juan, Batanero, Carmen y Font, Vicenç** (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39, 127-135.
- Godino, Juan, Giacomone, Belén, Batanero, Carmen y Font, Vicenç** (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(37), 90-113.
- Kelly, Anthony, Lesh, Richard y Baek, John** (Eds.). (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.
- Muñiz-Rodríguez, Laura, Alonso-Castaño, Marlén y Rodríguez-Muñiz, Luis** (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de vídeos educativos sobre probabilidad elaborados por estudiantes para maestro. En P. Diago, D. Yáñez, M. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 449–456). SEIEM.
- Oldenburg, Reinhard** (2016) Differentiale als Prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, 55-82. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2>
- Santos, Jorge Alonso y Acuña, Claudia Margarita** (2017). Adaptación de los criterios de Idoneidad Didáctica para la valoración de videos educativos de matemáticas disponibles en Internet. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.
- Verón, Manuel Alejandro y Giacomone, Belén** (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, 3, 1-27. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202109>
- Verón, Manuel Alejandro y Giacomone, Belén** (2023). Idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. En S. Caviedes, J. Lugo-Armenta, L. Pino-Fan y A. Sánchez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática* (pp.341-350). Universidad de Los Lagos.

Verón, Manuel, Giacomone, Belén y Pino-Fan, Luis (2024). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia*, 38(1), 1-22.
<https://doi.org/10.15359/ru.38-1.2>

Utilización de un problema de lápiz y papel recuperado de un contexto cotidiano e implementado en un curso de ecuaciones diferenciales

CLAUDIA ZANG

claudia.zang@fceqyn.unam.edu.ar

SILVIA SALOMÓN

prof.silviasalomon@gmail.com

FABIANA DE PERINI

mafadeperini@gmail.com

GRETEL FERNÁNDEZ VON METZEN

gretel.fernandez@fceqyn.unam.edu.ar

Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones. (FCEQyN-UNaM)

Resumen

Se presentan resultados de una experiencia de clase que tiene como soporte una situación cotidiana que fue convertida en un problema de lápiz y papel para ser resuelto en una clase de una asignatura que se centra en el estudio de ecuaciones diferenciales. Se analizaron las producciones escritas de los estudiantes mediante el empleo de técnicas de análisis de contenido. Se examinaron frases, afirmaciones, esquemas, ecuaciones y los gráficos incluidos. La revisión reveló que algunos estudiantes tienen dificultades para interpretar y extraer información del enunciado del problema para plasmarlo en un modelo específico, otros lograron la formulación de un modelo, aunque no del todo correcto. Se estima que la discusión y análisis sobre problemas cuya génesis esté en situaciones reales podría estimular el interés y mejorar los aprendizajes.

Palabras clave: problemas de lápiz y papel / ecuaciones diferenciales / aprendizaje

Introducción

En la enseñanza tradicional, la matemática a menudo se presenta como una ciencia abstracta, donde los contenidos son impartidos de manera magistral por el profesor y los problemas se plantean en términos matemáticos, con poco o ningún vínculo con el contexto. Esta falta de contextualización puede llevar a los estudiantes a preguntarse sobre la utilidad de lo que están aprendiendo, lo que a su vez puede disminuir su interés y participación en clase. Hoy en día, se reconoce que el rendimiento académico mejora cuando los estudiantes comprenden la relevancia de los conceptos que están aprendiendo y cómo pueden aplicarlos en su vida cotidiana o futura carrera profesional.

Este escenario de pérdida de sentido ha llevado a la búsqueda de estrategias que promuevan aprendizajes que resulten significativos y duraderos. Este documento surge en el marco de un trabajo de investigación que se focaliza en la revisión de la literatura sobre la resolución de problemas de lápiz y papel, de matemática y/o física, especialmente problemas contextualizados y cuyo objetivo es recopilar información para incorporarla en propuestas educativas que tiendan a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes.

La revisión de la literatura permitió tomar conocimiento acerca de los inconvenientes que presenta la resolución de problemas y de las eventuales estrategias para la superación de los mismos. Los estudiantes, en general, ante problemas cuantitativos circunscriben el trabajo a encontrar la expresión matemática o el algoritmo que les permita arribar a algún resultado “correcto” y frecuentemente único, sin detenerse a pensar demasiado sobre la validez del mismo. Muchos estudiantes, según reportaron Benegas y Villegas (2011), incluso llegan a resolver de manera sencilla los problemas clásicos de física, pero cuando se los transforma en problemas ricos en contexto o aplicados a la vida real los resultados suelen no ser tan satisfactorios. La situación en matemáticas no es muy diferente según se reporta en algunos trabajos de investigación (Malaspina y Vallejo, 2014; Malaspina, 2017; Ellerton, 2013; Grabinger y Dunlap, 1995).

Hay coincidencia en que los problemas tienen un rol crucial en la instrucción, sobre todo en asignaturas vinculadas con matemática, física y química, porque se los usa tanto como herramientas de aprendizaje como de evaluación. Desde la investigación vinculada al tema, se advierte que los estudiantes no son evaluados de

manera auténtica: luego de enseñar de manera descontextualizada, también se los evalúa de manera descontextualizada. Se utilizan pruebas de lápiz y papel estandarizadas para medir la cantidad de conocimiento aprendido (Malaspina, 2017). Los problemas que se abordan en clase no deben ser exclusivamente los que aparecen en los libros de texto o en sitios de Internet, sino que pueden ser creados a partir de situaciones cotidianas. Cada profesor conoce la realidad específica y las motivaciones de sus alumnos, es un desafío para el docente crear secuencias de actividades y problemas conformes a esa realidad, y a la vez, debe estimular a sus estudiantes a aprender resolviendo problemas, e ir más allá creando sus propios problemas (Malaspina y Vallejo, 2014; Rodríguez, 2015). En una línea semejante, Ellerton (2013), subraya la importancia de que los estudiantes participen en el planteamiento de problemas, y la necesidad de dar a la formulación de problemas un papel más prominente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Destacó que, tanto los estudiantes como los profesores tienden a depender de fuentes externas para obtener problemas matemáticos.

Pozo y Gómez (2000) resaltan que el aprendizaje de los procedimientos para resolver problemas cuantitativos, enfrenta diversas dificultades: la falta de interés por parte de los estudiantes, la percepción de falta de significado en los resultados obtenidos, la dificultad para generalizar los procedimientos aprendidos a otros contextos, y la limitada capacidad metacognitiva para monitorear sus propios procesos de resolución. Rodríguez (2015) señala que el pensamiento metacognitivo es esencial en la resolución de problemas porque permite el monitoreo, la vigilancia y la dirección del propio pensamiento y autorregular sus acciones.

Diversas investigaciones sugieren que es posible superar estas dificultades al emplear ciertas estrategias en la resolución de problemas. Heller y Heller (1999) desarrollaron un esquema de cinco pasos para resolver problemas contextualizados: representación pictórica, representación física (incluyendo diagramas de cuerpo libre o de movimiento según corresponda), planificación (utilizando representaciones algebraicas), solución y control de la solución. De manera similar, Rodríguez (2015), recupera la propuesta de Polya (1973), y asume que el proceso de resolución de problemas consta de cuatro etapas: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar la solución obtenida.

Según se reporta, los problemas contextualizados brindan varias ventajas, incluido el fomento del razonamiento lógico y el pensamiento crítico y, al enfrentar a

los estudiantes a escenarios del mundo real, estimulan la discusión y el intercambio de ideas, favoreciendo el aprendizaje entre pares y el desarrollo de habilidades sociales (Grabinger y Dunlap, 1995).

En este trabajo se describe una actividad realizada en una clase de una materia de Análisis Matemático que se organiza en torno a ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales, de los profesorados en Matemática y en Física de una universidad pública del nordeste argentino. Se considera que la actividad realizada es pertinente porque servirá para motivar y reconocer la importancia de la física y la matemática en la resolución de múltiples situaciones. Y, los alumnos como futuros profesionales de diversas carreras, deberían estar capacitados para adaptar los problemas a profesiones específicas o para crear problemas a partir de fenómenos provenientes de diferentes campos disciplinares.

Marco teórico

En el ámbito de la Didáctica de las Ciencias, se encuentran diversas definiciones sobre el concepto de problema. Se entiende generalmente como una situación que requiere resolución y que presenta dificultades sin soluciones evidentes (Gil y Torregrosa, 1983; Villegas y Benegas, 2004). Al respecto, Rodríguez (2015) destaca el carácter relativo del concepto de problema, puesto que una situación puede ser un problema para un sujeto y no serlo para otro. En disciplinas como Matemáticas, Física y Química, es común emplear actividades escritas, conocidas como problemas de lápiz y papel, que implican cálculos matemáticos y la aplicación de conceptos propios de cada disciplina. Estas actividades son fundamentales en carreras científico tecnológicas, ya que se considera que desarrollan habilidades esenciales para el pensamiento científico, como estrategias de razonamiento y análisis crítico. Por otro lado, los "problemas ricos en contexto" son problemas que están diseñados para alentar a los estudiantes a (a) considerar conceptos de física en el contexto del mundo real; (b) ver la resolución de problemas como una serie de decisiones; y (c) utilizar los conceptos fundamentales de la física para analizar cualitativamente un problema antes de la manipulación matemática de fórmulas (Heller y Heller, 1999).

Aunque existen varios enfoques para resolver problemas, este trabajo asume que la metodología de investigación dirigida, propuesta por Daniel Gil Pérez *et al.*

(1999), es especialmente útil en la enseñanza de las Ciencias porque fomenta el pensamiento científico en los estudiantes. Esto implica identificar preguntas a responder, buscar y seleccionar información relevante, formular conjeturas, convertirlas en hipótesis, diseñar un plan de resolución, ejecutarlo y ajustarlo si es necesario hasta llegar a una posible solución, que luego debe ser evaluada, validada y comunicada. También se contemplaron algunas de las contribuciones realizadas por Rodríguez (2015) citadas en la introducción. Sin embargo, no se consideraron otros aspectos como, por ejemplo, que la modalidad de trabajo sea individual, porque se pensó que el trabajo grupal podría favorecer el debate entre estudiantes que aporten diversas miradas según su carrera de origen. Asimismo, la autora plantea que la resolución de problemas debe ser una actividad transversal en la que, a priori, se puede usar cualquier contenido matemático. En este trabajo, el problema propuesto tenía una clara intencionalidad de ser resuelto apelando a ecuaciones diferenciales.

Aspectos metodológicos y contexto educativo

Los alumnos que participaron de la actividad son estudiantes que cursan la materia Análisis Matemático VI de tercer año de los profesorados en Matemática y Física de una universidad estatal. Se analizaron las respuestas dadas a un problema que solicitaba la obtención de una expresión para la velocidad de un camión que incrementa su masa a medida que pasa el tiempo. Esta actividad demandó un tiempo aproximado de una hora y fue resuelta por 5 grupos de entre 4 y 5 integrantes, la conformación de los mismos fue decisión de los estudiantes. La misma se presentó como cierre de la primera unidad de la asignatura, luego del desarrollo teórico y práctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, incluyendo métodos cualitativos de resolución, analíticos y métodos aproximados. Además, todos han tenido un acercamiento a los conceptos físicos necesarios para el planteo del problema en virtud de que han pasado un curso introductorio de Física: en el caso del profesorado en Matemáticas en el segundo año de la carrera, y para el profesorado en Física en el primer año. Los estudiantes del profesorado en Física, además de la asignatura mencionada han cursado Física Mecánica en segundo año.

Según Bardín (1996) y Ander-Egg (2010), el enfoque empleado en este estudio corresponde a un enfoque descriptivo y la recopilación de datos se hizo mediante

técnicas de análisis de contenido. Para la implementación de la actividad diseñada se siguieron los lineamientos de la Ingeniería Didáctica, que propone un esquema experimental basado en las prácticas didácticas desarrolladas en clase, que se estructuran a partir de un proceso de concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. La Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y, finalmente, análisis a posteriori y evaluación (Artigue, 1995). Este trabajo se centra específicamente en la fase de concepción y análisis a priori, se proporciona una breve descripción de la fase de experimentación (no se abordan las otras fases).

Análisis de la propuesta y discusión de los resultados

La revisión de diversos modelos propuestos en la bibliografía de la cátedra permitió diseñar un problema de movimiento rectilíneo (Imagen 1). Se eligió este problema porque permite a los alumnos enfrentarlo utilizando sus conocimientos previos, más allá del contexto matemático y/o físico: pueden pensar en la situación, hacer conjeturas sobre el movimiento y resolverlo a partir de su comprensión del fenómeno, ya que les es familiar.

Un camión tiene instalado sobre su carrocería un contenedor abierto. En cierto momento, se desplaza a una velocidad de 80 km/h en línea recta sobre una carretera convencional, en la que se puede despreciar el rozamiento cinético entre los neumáticos y el pavimento y la acción de otras fuerzas como el rozamiento con el aire. La masa del camión más el contenedor es de 10.000 kg. En un momento determinado comienza a llover, y el contenedor se llena de agua a razón de 6 l/min. Encuentre una expresión que represente el cambio de velocidad del camión en función del tiempo. Determine la velocidad del camión al cabo de 1 minuto.

Imagen 1: Consigna presentada a los estudiantes

En el marco de la fase de concepción y análisis a priori, se esperaba que los alumnos adviertan que el mismo puede ser resuelto planteando la segunda ley de Newton para un sistema cuya masa es variable, o bien apelando a la conservación del movimiento lineal para un sistema aislado que incrementa su masa a razón constante a medida que pasa el tiempo. El primero de los procedimientos requiere el planteo de la segunda ley de Newton, que postula que la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es igual a la derivada temporal de la cantidad de movimien-

to lineal $\vec{p}$ ¹. Dado que la cantidad de movimiento lineal es igual al producto de la masa por la velocidad (ambas varían con el tiempo), será una función del tiempo de la forma $\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$. A partir de la lectura del enunciado, es preciso inferir, que se trata de un sistema aislado, por tanto, $\vec{p}$ es constante y $\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [m(t) \cdot \vec{v}(t)] = 0$ (1).

Como se trata de un movimiento unidimensional se puede trabajar con la rapidez $v(t)$ en vez de la velocidad $\vec{v}(t)$, y, por tanto, el problema está en un contexto escalar. Luego se deriva siguiendo la regla de la derivada de un producto². Cuando empieza a llover, el camión incrementa su masa a razón constante de 6 kilogramos por minuto³, o expresado en unidades del Sistema Internacional, a razón de 0,1 kg por segundo. Por tanto, la masa puede representarse como $m(t) = m_0 + 0,1t$ con t en segundos y $m_0 = 10.000 \text{ kg}$ y el número 0, 1 en kg/s. Se sustituye en (1), se deriva, obteniéndose: $0,1 \cdot v(t) + (10000 + 0,1 \cdot t) \frac{dv(t)}{dt} = 0$.

Se trata de una ecuación diferencial lineal, que además resulta separable. La solución general de la misma es $v(t) = \frac{C}{10.000 + 0,1t}$. Al aplicar la condición inicial $v(0) = \frac{80 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{200}{9} \text{ m/s}$, se obtiene como solución particular: $v(t) = \frac{2.000.000}{9(10.000 + 0,1t)}$, que se usará para responder cual es la velocidad luego de un minuto, esto es, en $t=60 \text{ s}$.

En tanto que el segundo de los procedimientos previstos en el análisis a priori, consiste en establecer que las cantidades de movimiento inicial y final del sistema son iguales, en virtud de la conservación de dicha magnitud⁴. La cantidad de movimiento lineal inicial del sistema es $p_0 = m_0 v_0 = \frac{2.000.000}{9}$. La cantidad de movimiento lineal final, en cualquier tiempo t , es $p_f = m_f v_f = (m_0 + 0,1t)v = (10.000 + 0,1t)v$ ⁵. Al plantear la conservación de $\vec{p}$, se obtiene: $\frac{2.000.000}{9} = (10.000 + 0,1t)v$. Que se reescribe como $v = \frac{2.000.000}{9(10.000 + 0,1t)}$, idéntica a la que se arriba siguiendo el primero de los procedimientos descritos. Hay que destacar que esta forma de proceder, si bien permi-

1 Es más habitual presentar a la segunda ley de Newton como $F=ma$, que presenta una serie de desventajas cuando la masa no permanece constante.

2 Derivar usando la regla del producto es válido cuando los sistemas son cerrados. Manuel Ortega Girón, en "Lecciones de Física. Mecánica 2", señala que, para sistemas abiertos, la formulación es diferente porque toma en cuenta la velocidad a la que se incorpora o desprende la masa. El caso analizado corresponde a un sistema cerrado si se considera que el camión y el agua de lluvia son partes constituyentes de un sistema más amplio o de uno en el que la velocidad de la masa agregada es cero.

3 La consigna específica que se agregan 6 litros por minuto, en virtud de que se trata de agua, cuya densidad es 1 g/cm^3 , la masa se incrementa en 6 kg en cada minuto.

4 Siguiendo este procedimiento no se requiere el planteo de una ecuación diferencial.

5 Se han omitido las unidades para facilitar la escritura.

te encontrar una expresión para $v(t)$, no permite establecer cómo es la variación de la misma con el tiempo. Algún estudiante podría percibir que esta variación se obtiene al derivar la función $v(t)$.

Con respecto a la fase de experimentación, inicialmente los alumnos plantearon varias cuestiones, pero no encontraron la manera de conectarlas entre sí para elaborar el modelo matemático solicitado. Luego de un tiempo mayor al previsto (en principio se estimó que la actividad demandaría alrededor de media hora), en tres de los grupos (G1, G2, G3) se pudo hallar una solución, aunque no fue la correcta en dos de los casos (grupos G1, G3). En los grupos restantes (G4 y G5) solamente se hicieron afirmaciones verbales sobre la velocidad del camión, aunque pudieron establecer de manera correcta cual era la expresión simbólica para la masa del camión a medida que transcurría el tiempo. Con respecto a las afirmaciones verbales, registradas por los dos docentes de la cátedra que actuaron como observadores, se cita, a modo de ejemplo: “asumimos que se debe encontrar la expresión de la aceleración del camión. Sin embargo, no sabemos como relacionar la velocidad con la masa” (G4). Esta frase revela que el sentido común puede operar como un obstáculo, dado que es frecuente asociar fuerza con velocidad y no fuerza con los cambios de velocidad. Esta asociación dificulta la comprensión de que puede haber movimiento (en consecuencia, velocidad) aún en ausencia de fuerza. Esto no pasó desapercibido por Einstein e Inhelder:

La relación entre la fuerza y el cambio de velocidad, y no, como pensaríamos de acuerdo con nuestra intuición, la relación entre la fuerza y la velocidad misma, constituye la base de la mecánica clásica, tal como fue formulada por Newton (Einstein e Inhelder, 1938, p. 16).

En G1 y G2 se formuló un modelo matemático para la variación de la velocidad y se halló una expresión para $v(t)$, y se lo hizo apelando al primero de los procedimientos descritos; en tanto que, en G3, se invocó al segundo. En la resolución de G1 (Imagen 2), puede notarse un error en la obtención de la derivada y la omisión de un signo menos al resolver la integral. La ausencia de la utilización de mecanismos de validación dentro del grupo para determinar si una solución puede tener sentido en el contexto en el que se encuentra el problema, los lleva a aceptar una expresión que predice que la velocidad aumenta linealmente con el tiempo, aun cuando entre sus hipótesis de partida establecieron que la velocidad debía disminuir al aumentar

la masa. En G2 se llega a la expresión correcta para $v(t)$, pero se no alcanza a responder cuál es su valor en $t=60$ s, que podría haberles permitido validar su resultado (ver Imagen 3). Cabe aclarar que en la segunda de las imágenes de la Imagen 3, hay un error, debería ser $\vec{p} = m(t)\vec{v}(t)$.

Finalmente, se presenta una descripción de la producción de G3 (no se incluye una imagen por falta de legibilidad de la misma). Plantean la conservación de la cantidad de movimiento $Mv_0 = m_f v_f \Rightarrow Mv_0 = (M + k t) \left(v_0 + \frac{dv}{dt} t \right)$, realizan operaciones algebraicas, llegando a la expresión $0 = M \frac{dv}{dt} t + v_0 k t + k \frac{dv}{dt} t^2$, dividen todo por t : $-v_0 k = (M + k t) \frac{dv}{dt}$ donde $k=0,1$ kg/s es la tasa a la que se incrementa la masa. Separan variables, resolviendo correctamente la integral $\int \frac{1}{M+kt} dt = -\frac{1}{v_0 k} \int \frac{dv}{v}$ y encuentran que la función velocidad está dada por $v(t) = -22,22 \frac{m}{s} \ln \ln \left(\frac{1}{10000 \text{ kg} + 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{s}} t} \right) + c$. Pero no arribaron a una expresión correcta para $v(t)$ porque usan la ecuación cinemática $v_f = v_0 + at$ que supone que la aceleración es constante. De nuevo se observa la ausencia de reflexión sobre el resultado, puesto que no analizan si la solución es razonable o no.

The image shows two pages of handwritten mathematical work. The left page starts with the conservation of momentum equation $(P)_i = (m_0 + 360t) \cdot (V)$. It then derives the differential equation $0 = 360t \cdot V + (m_0 + 360t) \cdot \frac{dV}{dt}$. After simplifying to $-360t \cdot V = m_0 + 360t \cdot \frac{dV}{dt}$, it separates variables and integrates to get $\ln|V| = \ln|C(e^{360t})|$. The right page shows the initial condition $P_{VI} \quad V_{(0)} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ and the calculation of the constant $C = \frac{1}{125} \frac{\text{km}}{\text{h kg}}$. The final expression for velocity is $Sol P_{VII} \quad V_{(t)} = \frac{1}{125} \frac{\text{km}}{\text{h kg}} (10^4 \text{ kg} + 360 \frac{\text{kg}}{\text{s}} t)$.

Imagen 2: Resolución presentada por G1

$\mu_k = 0$
 V_i
 V
 F
 Q
 $Q = 0,1 \frac{kg}{s}$
 $Q = 0,1 \frac{kg}{s}$
 $Q = \frac{V}{t}$
 $Q = 0,1 \frac{kg}{s}$
 $Q \cdot t = m$
 $M(t) = 10000 \text{ kg} + 0,1 \frac{kg}{s} \cdot t$

Imagen 3: Resolución presentada por G2

Conclusiones

Este tipo de enfoques contribuye a dar un nuevo significado a los conocimientos físicos y matemáticos previamente abordados, al tiempo que sirve como un estímulo externo para los estudiantes, cuestión que es compartida por Rodríguez (2015). La experiencia realizada arrojó resultados positivos, ya que permitió a los estudiantes compartir sus ideas, formular conjeturas, escuchar y validar las de sus compañeros, y emplear diversas estrategias para abordar los problemas según las relaciones percibidas en las situaciones planteadas.

En relación a lo sugerido por Heller y Heller (1999), en los grupos en los que se logró concretar prácticamente toda la actividad, pudo observarse que los estudiantes comienzan realizando una representación pictórica de la situación, algunos efectúan la representación física (diagramas de movimiento), ejecutan la fase de planificación al plantear ecuaciones, encuentran la solución, pero no realizan el control de la solución hallada. Una manera en que podría realizarse esto es verificar que la expresión encontrada satisface las condiciones iniciales. Otro mecanismo de validación involucra corroborar que la expresión hallada predice una disminución de la velocidad y que eso está en consonancia con sus conjeturas iniciales. A nuestro juicio, lo que todavía hay que fortalecer, es el trabajo independiente de los estudiantes,

ya que aún no tienen incorporado como práctica habitual, la validación de sus producciones, persiste la visión del docente como la única vía de validación. Lo cual se vincula con la práctica del pensamiento metacognitivo, conforme a Rodríguez (2015).

La identificación de dificultades relacionadas con la interpretación de la información proporcionada, resalta la necesidad de desarrollar habilidades de lectura, comprensión y análisis de textos científicos además de los conceptos disciplinares *per se*. El uso de problemas contextualizados es una estrategia pedagógica que podría ser utilizada para mejorar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes, puesto que estimulan el interés y la motivación al relacionar los conceptos teóricos con situaciones reales o plausibles.

Bibliografía

- Ander-Egg, Ezequiel** (2010). *Métodos y Técnicas de investigación social, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación*. Lumen.
- Artigue, Michèle** (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bardin, Laurence** (1996). *El análisis de contenido*. Akal.
- Benegas, Julio y Villegas, Myriam** (2011). Influencia del texto y del contexto en la Resolución de Problemas de Física. *Latin American Journal of Physics Education*, 5(1).
- Einstein, Albert e Infeld, Leopold** (1938). *The evolution of Physics from early concepts to relativity and quanta*. Simon y Schuster.
- Ellerton, Nerida** (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.
- Gil, Daniel y Torregrosa, Joaquín** (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), 447-455.
- Gil, Daniel, Furió, Carlos, Valdés, Pablo, Salinas, Julia, Torregrosa, Joaquín, Guisasola, Jenaro y González, Eduardo** (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio? *Enseñanza de las Ciencias*, 17(2), 311-20.

- Grabinger, Scott y Dunlap, Joanna** (1995). Entornos ricos para el aprendizaje activo: una definición. *ALT-J*, 3(2), 5-34.
- Heller, Patricia y Heller, Kenneth** (1999). *Cooperative Group Problem Solving in Physics*. University of Minnesota.
- Malaspina, Uldarico** (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas (documento digital). <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf>
- Malaspina, Uldarico y Vallejo, Estela** (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En U. Malaspina (Ed.), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7 – 54). REM-PUCP.
- Rodríguez, Mabel** (2015). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.153-174). Ediciones UNGS y EDUVIM.
- Pozo, Juan Ignacio y Gómez, Miguel** (2000). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Morata.
- Villegas, Myriam y Benegas, Julio** (2004). Adquisición de habilidades de expertos en la resolución de problemas en alumnos ingresantes a la Universidad. En M. Perrotta y A. Fuente (Comps.), *Memorias del SIEF VII* (pp.78-87). EdUNLPam.

Estudio de los errores en la resolución de inecuaciones en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemática

CARINA DUNA

carinaduna@gmail.com

ALEJANDRA MERCEDES MARTÍNEZ

ale_m_martinez@hotmail.com

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Luján (UNLu).

Resumen

Este trabajo estudia los errores y dificultades en la resolución de inecuaciones que presentan los alumnos que ingresan al Profesorado de Matemática de la ciudad de Luján. Como herramienta teórica se utilizó la Teoría de Funciones Semióticas inmersas en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición e instrucción matemática. Para el análisis, se diseñó una prueba diagnóstica con el objetivo de detectar los errores con los que los estudiantes ingresan a la carrera docente. Tras su implementación, los errores cometidos fueron identificados, analizados y clasificados de acuerdo a la clasificación de Radatz (1979). Del análisis cualitativo y descriptivo de los resultados obtenidos, se pudieron observar los tipos de errores que más predominaron y, con la información recabada, confeccionar una serie de sugerencias metodológicas que promuevan el aprendizaje reflexivo y la disminución de errores en el desarrollo de estrategias de resolución de inecuaciones.

Palabras clave: errores / inecuaciones / teoría de funciones semióticas

Introducción y antecedentes

El análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática es un tema de interés desde hace mucho tiempo y en la actualidad se ha vuelto un tema relevante para los investigadores en Educación Matemática. Es evidente que estos errores y dificultades generan preocupación en la mayoría de los docentes debido a que éstos influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos. Del Puerto *et al.* (2006) y Socas Robayna (1997) coinciden en que los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de dificultades y obstáculos propios del aprendizaje. Es decir, el aprendizaje de la matemática genera dificultades de diversa naturaleza y éstas se conectan en complejas redes que se manifiestan en la práctica en forma de obstáculos y aparecen en las producciones de los estudiantes en forma de errores.

Por otra parte, el trabajo con el concepto de desigualdad matemática y, por consiguiente, de las inecuaciones, es fundamental en la ciencia y la tecnología dado que se encuentra presente en prácticamente todos los temas de matemática y, en la carrera Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (PESM), se trata de un tema transversal a toda la carrera. Es así que se decide analizar los errores en la resolución de inecuaciones que cometen los alumnos que ingresan al PESH de la ciudad de Luján, Pcia. de Buenos Aires, esperando que este análisis brinde información valiosa acerca de cómo los alumnos, futuros docentes de matemática, construyen el conocimiento matemático.

Para llevar a cabo este trabajo de analizar los errores, se tienen en cuenta las herramientas que ofrece la Teoría de Funciones Semióticas (TFS) inmersas en el marco teórico Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición e instrucción matemática propuesto por Godino (2003). Bajo este enfoque, las funciones semióticas servirán para caracterizar los significados que se ponen en juego durante la actividad matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para profundizar sobre los errores en el aprendizaje de la matemática, diversos autores han propuesto distintas clasificaciones con el propósito de crear esquemas para su interpretación. Entre ellos, Radatz (1979) propone una clasificación de los errores considerando diferentes tipos de dificultades que dan origen a los errores y establece cinco categorías generales: errores debido a la dificultad del lenguaje; errores debido a dificultades para obtener información espacial; errores debido a

un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos; errores debido a la rigidez de pensamiento; y errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Numerosas investigaciones han abordado el estudio de las dificultades y errores cometidos en la resolución de inecuaciones en los distintos niveles del sistema educativo. Entre ellas podemos mencionar a Maroto Vargas (2013) quien estableció algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos de nivel secundario al resolver ejercicios sobre inecuaciones y presentó algunas ideas para la implementación de una propuesta didáctica. En la Universidad Nacional de Táchira, Venezuela, Torres (2013) profundizó la relación entre el uso de los registros gráfico y algebraico y observó el éxito alcanzado al estudiar los temas de funciones e inecuaciones, analizando los conflictos semióticos que surgen al estudiarlos. Núñez Sánchez (2012) elaboró, aplicó y analizó los resultados de una secuencia didáctica orientada a superar las dificultades que tienen algunos estudiantes universitarios de Perú tanto en la comprensión de los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas como en la resolución de problemas que requieren el uso de este objeto matemático. Heredia y Palacios (2014) realizaron un estudio con estudiantes de nivel secundario en Colombia y luego presentaron reflexiones, elementos conceptuales y metodológicos para posibles propuestas didácticas hacia maestros en formación y en ejercicio, en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales. Ninguno de estos trabajos se centró en los ingresantes a un profesorado de Matemática ni utilizó como marco teórico la TFS.

La mayoría de estas investigaciones coinciden en que la enseñanza de las inecuaciones se reduce a tareas mecánicas y no a la apropiación del contenido semántico de inecuaciones, como también apuntan al establecimiento pobre de relaciones entre los diferentes sistemas de representación semiótica de las desigualdades. Por ello, es importante abordar la enseñanza de las inecuaciones desde distintos sistemas de representación pues este hecho podría ayudar a reducir los errores cometidos en su resolución y promover un aprendizaje más reflexivo. Además, consideramos relevante que estas experiencias y reflexiones se lleven a cabo con docentes de matemática en formación, dado que son ellos los primeros que deben adquirir los conocimientos.

Marco Teórico

Para llevar a cabo el trabajo de analizar los errores, se tienen en cuenta las herramientas que ofrece la TFS inmersas en el marco teórico Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición e instrucción matemática propuesto por Godino (2003). Según esta teoría, el conocimiento se construye desde la actividad práctica, donde el dominio de las herramientas semióticas son un elemento básico, pues dichas herramientas, tal como menciona Duval (2000), son esenciales para la actividad cognitiva. Las funciones semióticas se pueden interpretar, metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos, poniendo en juego tres componentes, tal como se muestra en la Imagen 1.



Imagen 1: Funciones semióticas. Fuente: elaboración propia

Para Godino (2003), la noción de función semiótica es caracterizada mediante la pareja expresión/contenido o significante/significado que presupone una regla de correspondencia entre las componentes de dicha pareja y, por lo tanto, un acto de interpretación. Así, la comprensión de un objeto matemático por parte de los sujetos puede ser interpretada en términos de las funciones semióticas que éstos puedan establecer al poner en juego dicho objeto, ya sea como expresión o contenido de tales funciones. Esta noción, la de función semiótica, permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión del objeto que tienen los estudiantes en términos de las funciones que puede o no establecer.

Como se ha dicho anteriormente, este trabajo tiene por finalidad describir y estudiar los errores y dificultades cometidos en la resolución de inecuaciones por los alumnos que ingresan en el primer año de la carrera PESM. Para alcan-

zar este objetivo, se considera de gran importancia realizar una clasificación y categorización de los errores cometidos en matemática, cuyo propósito sea el de centrar la atención en los diferentes aspectos para reflexionar sobre ellos y luego poder ofrecer una propuesta de enseñanza más eficaz que ayude a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y colabore con el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática. Con el fin de indagar acerca de las características de los errores y las posibles causas que los originan, si bien muchos autores han realizado distintas propuestas de clasificación que apuntan a diferentes aspectos de los errores, en este trabajo consideramos la clasificación ofrecida por Radatz (1979). Este investigador realiza una clasificación de los errores pues considera necesario construir un marco teórico para el análisis y explicación de los mismos. Para ello parte del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales, que se presentan a continuación.

- Errores debido a la dificultad del lenguaje.

El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemático es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores. Es decir, errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos debido a su inadecuado aprendizaje.

- Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

Muchos de estos errores matemáticos emergen de las diferencias entre las imágenes espaciales y el pensamiento espacial de los alumnos. Estos errores aparecen cuando es necesario hacer una representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico y no se logra realizarlo con éxito.

- Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Entre ellos se pueden mencionar las deficiencias en el contenido y los problemas de conocimiento. Estas deficiencias pueden ser el desconocimiento de algoritmos, manejo inadecuado de conceptos básicos, realización de procedimientos incorrectos, incomprensión de símbolos, etc.

- Errores debido a la rigidez de pensamiento.

En estos casos, los alumnos no pueden adaptar lo que ya conocen a situaciones nuevas, es decir, existe una falta de flexibilidad en el pensamiento.

- Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Se producen por el desarrollo incorrecto de algoritmos, la falta de estrategias en la solución de tareas matemáticas, aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes, etc. El razonamiento por analogías no siempre funciona en matemática.

Dentro del ámbito de las matemáticas, la clasificación de Radatz es una de las clasificaciones más utilizadas no sólo por estar basada en la teoría del procesamiento de la información sino también porque se la considera más apropiada para estudiar los errores cometidos por los estudiantes, por ejemplo, en una prueba diagnóstica.

Objetivos

Este trabajo tiene por objetivo estudiar los errores que cometen los alumnos ingresantes al PESM a la hora de resolver inecuaciones y desarrollar una propuesta de actividades que pueda ser utilizada para salvar dichos errores y que, a su vez, les permita lograr un mayor manejo de la argumentación y comunicación de saberes.

Entre los objetivos específicos se pueden mencionar:

1. Mediante un examen diagnóstico, identificar y caracterizar los errores cometidos por los alumnos ingresantes al primer año de la carrera de PESM en la resolución de inecuaciones.
2. Analizar los errores y reflexionar sobre los obstáculos y dificultades que se presentan en la resolución de inecuaciones bajo la lupa de distintas teorías o aportes realizados por otros investigadores.
3. Proponer una aproximación metodológica de enseñanza que promueva el aprendizaje reflexivo y la disminución de errores en el desarrollo de estrategias de resolución de inecuaciones.

Metodología de trabajo y resultados obtenidos

Este trabajo se divide en tres etapas:

Etapla 1: Diseño e implementación de una evaluación diagnóstica.

El objetivo de esta evaluación es indagar acerca de las dificultades y errores que presentan los alumnos que ingresan al PESM en el estudio de las inecuaciones. Entre los aspectos matemáticos que se indagan con esta evaluación diagnóstica se encuentran: la definición, aplicación y representación en la recta real de desigualdades; y la resolución, análisis y representación gráfica de inecuaciones, entre otros. Asimismo, se busca analizar tanto los diferentes registros de representación utilizados en las resoluciones como las funciones semióticas establecidas.

Dicha actividad consta de una serie de seis ejercicios de resolución de inecuaciones y desigualdades que deben resolver explicando y argumentando todas las decisiones tomadas a la hora de responder. La evaluación diagnóstica fue entregada a 28 alumnos que ingresaron al PESM durante el año 2022, en el espacio curricular de Introducción al Cálculo. La implementación del diagnóstico se llevó a cabo durante una clase de tres horas de duración en el transcurso del primer mes de clases. La evaluación diagnóstica presentada a los estudiantes se encuentra disponible en el Anexo del presente trabajo.

Etapla 2: Detección y análisis de los errores.

Con la información recabada en dicho diagnóstico, el trabajo se centra en el análisis de los errores que cometen los alumnos ingresantes mediante el uso de las funciones semióticas. Estas funciones permiten entender cómo los estudiantes construyen los significados durante las prácticas. Para profundizar respecto de este tema, se han desglosado los ejercicios definiendo funciones semióticas que el estudiante tendría que establecer para poder resolverlos correctamente. Por ejemplo, el ítem a) del Ejercicio 1 decía lo siguiente:

- a) Sabiendo que k es un número real, escribir la siguiente afirmación mediante expresiones matemáticas: “ k es menor o igual que -1 y mayor que -3 .”

En la Imagen 2 se muestran las funciones semióticas que podrían establecerse para este ítem. La función f_1 relaciona el enunciado del problema en lenguaje coloquial con los símbolos matemáticos necesarios para expresar la afirmación que propone el ejercicio. Las funciones f_2 y f_3 establecen la asociación entre las proposi-

ciones enunciadas en lenguaje natural y las expresiones matemáticas simbólicas que las representan. La función f_4 establece una conjunción de proposiciones, es decir, los estudiantes deberían reconocer que las proposiciones 1 y 2 se cumplen en simultáneo y esto expresarlo mediante, por ejemplo, el símbolo matemático $\wedge$.

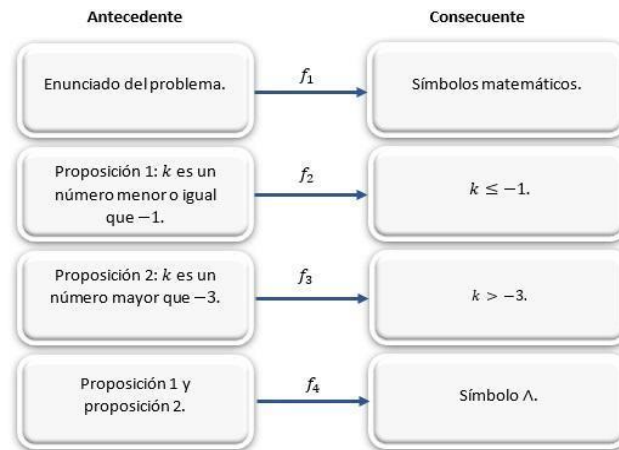


Imagen 2: Funciones semióticas establecidas en el Ejercicio 1, ítem a).
Fuente: elaboración propia

El establecimiento deficiente de funciones semióticas se manifiesta en prácticas calificadas como erróneas. Estos errores, asociados al incorrecto establecimiento de algunos tipos de funciones semióticas, se ubican o relacionan con las distintas categorías propuestas por Radatz (1979). Por ejemplo, el caso de una posible falta de establecimiento de funciones semióticas de tipo lingüístico o establecimiento incorrecto de ellas se puede vincular con la categoría “Errores debido a la dificultad del lenguaje”. Es esperable que los estudiantes que tienen dificultades para leer, por ejemplo, un símbolo matemático como puede ser $\geq$, arrastren esas dificultades hacia el resto de las actividades propuestas.

Establecidas las funciones semióticas esperadas en los ejercicios de la evaluación diagnóstica, se procede a la corrección de todos los trabajos producidos por los 28 alumnos. Dicha corrección permitió detectar errores como, por ejemplo, mal uso de las expresiones matemáticas. Ejemplo de ello podemos observar en la Imagen 3.

Handwritten student response on grid paper. It shows a set notation S followed by "a) K es numero real:". Below this, the inequality $-3 > k \leq -1$ is written and enclosed in a red rectangular box. To the right of the box, the expression $-1/2$ is written and crossed out with a diagonal line.

Imagen 3: Respuesta de un alumno al ítem a) del Ejercicio 1.
Fuente: extracción de la resolución realizada por un alumno

En la Tabla 1 se muestran los errores detectados en la evaluación ubicados en las categorías establecidas. Estos tipos de errores son señalados con una letra mayúscula y un número, según la categoría a la que mejor se ajusten.

Categoría 1: Errores debido a la dificultad del lenguaje.	
A1	Uso inadecuado de las expresiones matemáticas.
A2	Error en la lectura de símbolos.
A3	Error en la escritura del conjunto solución.
A4	Interpretación incoherente de los resultados.
Categoría 2: Errores debido a dificultades para obtener información espacial.	
B1	Error al ubicar los resultados en la recta numérica.
B2	Error al graficar las funciones.
B3	No resuelven gráficamente.
Categoría 3: Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	
C1	Inconsistencias en relación con las propiedades de las desigualdades.
C2	Error en la manipulación algebraica de las expresiones.
C3	Errores en las operaciones aritméticas.
C4	Multiplican ambos miembros por la expresión algebraica que figura en el denominador, pero no tienen en cuenta el signo
Categoría 4: Errores debido a la rigidez de pensamiento.	
D1	Intentan resolver el problema como si se tratase de una ecuación.
D2	Utilizan fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero no

	logran vincular el resultado con la inecuación planteada.
Categoría 5: Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.	
E1	A partir de un caso particular generalizan las soluciones.
E2	Estudia una desigualdad racional por casos de manera incorrecta.

Tabla 1: Errores detectados en la evaluación diagnóstica ubicados en categorías

Una vez identificadas las categorías y los errores que corresponderían a cada una de ellas, se asignaron a la corrección de cada ejercicio uno o más tipos de error, de acuerdo a las resoluciones observadas. Así, por ejemplo, como se observa en la Imagen 4, la mayor cantidad de errores detectados en la Categoría 1 corresponde a la incorrecta escritura del conjunto solución (A3) y a la incoherente interpretación de los resultados (A4). Esto pareciera estar relacionado también con el uso inadecuado de las expresiones matemáticas (A1), pues es de esperar que un alumno que tiene dificultades con la lectura y/o escritura de las expresiones matemáticas también tenga dificultades para escribir otro tipo de expresiones relacionadas con ellas como, por ejemplo, el conjunto solución de una inecuación. Análisis similares se realizaron para las otras cuatro categorías.



Imagen 4: Cantidad de errores de la Categoría 1.

Fuente: elaboración propia basada en el análisis de las evaluaciones

Este estudio sobre los errores detectados en la resolución de los ejercicios de la prueba diagnóstica permite vislumbrar que muchos de los errores cometidos por los estudiantes se deben a dificultades de tipo aritmético (operatoria) y/o algebraico (manipulación algebraica de variables), errores englobados dentro de la Categoría

3. En la Imagen 5 se puede observar la cantidad de veces que aparecen errores en esta categoría.

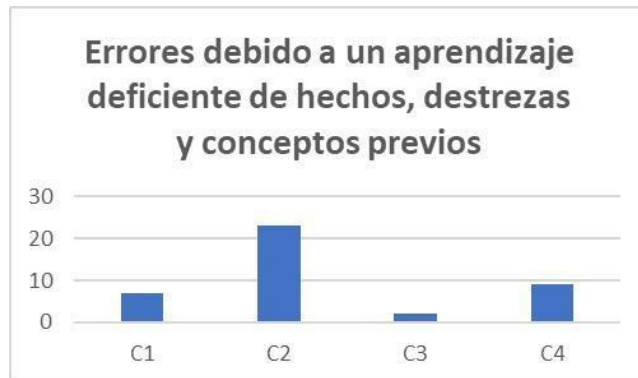


Imagen 5: Cantidad de errores de la Categoría 3.

Fuente: elaboración propia basada en el análisis de las evaluaciones

En el 96% de los casos, el abordaje de los ejercicios ha sido exclusivamente algebraico, lo que ha puesto de manifiesto que muchos de los errores cometidos en la resolución fueron debido al incorrecto uso o aplicación de las propiedades algebraicas y de orden de los números reales. También se han observado errores de interpretación, ya sea por una lectura incorrecta de la simbología matemática, por no saber representar gráficamente determinadas situaciones, o bien, por no poder vincular los gráficos realizados con los procesos algebraicos puestos en juego en la resolución de algunos ejercicios. Más precisamente, la resolución de aquellos ejercicios en los que se pedía la representación gráfica de funciones con la intención de comparar el gráfico con el proceso algebraico realizado por los alumnos, no se ha explicitado en ningún caso. Al respecto, tanto Torres (2013) como Barbosa (2003) consideran que se deben valorar las oportunidades del estudio de funciones para el desarrollo del pensamiento matemático y proponen cambiar la manera de enseñar ofreciendo actividades que involucren no sólo la interpretación y la resolución algebraica sino también las resoluciones gráficas ya que estas favorecen a la flexibilidad de pensamiento y además ofrecen mecanismos alternativos para poder determinar la veracidad de los resultados.

Etapas 3: Propuesta didáctica y sugerencias metodológicas.

A partir del análisis anterior, el cual nos permite contar con un entendimiento exhaustivo de las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de inecuaciones, se propone un conjunto de sugerencias metodológicas que tengan en cuenta los errores detectados y que ayuden a mitigar las dificultades encontradas.

En este sentido, teniendo en cuenta los aportes positivos que podría dar el enfoque gráfico a la resolución de este tipo de problemas, se ofrece una propuesta de actividades acompañada de sugerencias metodológicas en la que el enfoque gráfico cobra gran importancia, pues intenta otorgar mayor claridad conceptual y al mismo tiempo convertirse en una herramienta que valide un procedimiento algebraico llevado a cabo en la resolución de inecuaciones. Además, con la propuesta realizada es posible vincular este abordaje gráfico de resolución de inecuaciones con algunos aspectos del estudio de funciones, tema central de las últimas unidades del programa de la asignatura donde se llevó a cabo esta experiencia.

Conclusiones

El análisis detallado de los errores en la resolución de inecuaciones de estudiantes que ingresan al PESH revela la necesidad de abordar las dificultades desde múltiples enfoques, considerando aspectos lingüísticos, conceptuales y de pensamiento. La integración de herramientas como las funciones semióticas y la clasificación de errores de Radatz proporcionaron un marco sólido para el análisis realizado. Estas herramientas han sido valiosas no sólo para poder caracterizar los significados involucrados en la actividad matemática e identificar con mayor precisión las dificultades específicas que enfrentan los alumnos al resolver inecuaciones, sino que también ayudan a reflexionar sobre los errores y promueven una comprensión más profunda del tema, lo que resulta en un aprendizaje más significativo.

Otro aspecto interesante a destacar es la importancia de dirigir este estudio hacia futuros docentes de matemáticas, ya que son ellos quienes tendrán un impacto directo en la enseñanza y el aprendizaje de este tema en las aulas.

El análisis realizado con la prueba diagnóstica reveló cuáles fueron los diferentes tipos de errores que predominaron en la resolución de inecuaciones en el grupo de estudiantes en el que fue llevada a cabo, observándose una notoria dificultad en aquellos ejercicios que requerían de una representación gráfica. Las sugerencias metodológicas propuestas, con especial énfasis en el enfoque gráfico, ofrecen una vía prometedora para mejorar el aprendizaje y la comprensión de las inecuaciones.

Con este trabajo de investigación se desea destacar la importancia de una enseñanza reflexiva y estratégica para ayudar a los estudiantes a desarrollar un pensamiento matemático más profundo y efectivo.

Bibliografía

- Barbosa, Karla** (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 199-219.
- Del Puerto, Silvia, Minnaard, Claudia y Seminara, Silvia** (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie3842646>
- Duval, Raymond** (2000). Basic issues for research in mathematics education. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 24(1), 55-69.
- Godino, Juan** (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática (Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada).
- Heredia, Mónica y Palacios, María** (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre la enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje* (Tesis de licenciatura). Universidad del Valle.
- Maroto Vargas, Ana** (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*, 37(2), 1-16.
- Núñez Sánchez, Nixo** (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas: una propuesta en el marco de la teoría de las situaciones didácticas* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Radatz, Hendrik** (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172. <https://doi.org/10.2307/748804>
- Socas Robayna, Martín** (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico Romero (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.
- Torres, Ángela** (2013). Aplicación del enfoque gráfico en la enseñanza de inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva Ontosemiótico. *El cálculo y su enseñanza*, 4, 83-102.

Anexo Evaluación diagnóstica

Resolver las siguientes actividades en una nueva hoja en la que figuren:

- Nombre
- Edad
- Colegio del que proviene
- Año de egreso
- Año de ingreso al profesorado

Justificar cada una de las respuestas dadas o explicar los procesos o pasos que te llevaron a dar esas respuestas.

EJERCICIO 1:

- a) Sabiendo que k es un número real, escribir la siguiente afirmación mediante expresiones matemáticas: “ k es menor o igual que -1 y mayor que -3 .”
- b) Mencionar al menos 4 valores de k que hagan verdadera la expresión anterior,
- c) Representar gráficamente todos los posibles valores de k que cumplen con la condición anterior.

EJERCICIO 2:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inequación: $2(x - 3) > 5x + 9$

EJERCICIO 3:

Dada la siguiente inequación: $4 - 2(3 - x) < 7 - 2(1 - x)$

- a) ¿Existe al menos un número real que la verifique?
- b) Hallar el conjunto de números reales que verifica la inequación.

EJERCICIO 4:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inequación: $x^2 - 5x > -6$ y verificar para algunos elementos del conjunto.

EJERCICIO 5:

Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1$

- a) Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.
- b) ¿Para qué valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$?
- c) Hallar analíticamente todos los valores de x para los cuáles $f(x) < g(x)$. **Verificar gráficamente las soluciones halladas.**

EJERCICIO 6:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\frac{x-2}{x+1} > 2$.

Verificar para al menos 3 elementos del conjunto solución.

La homotecia en el tiempo: Transformaciones de este saber

PAULA RABANEDO

prabanedo@alumnos.exa.unicen.edu.ar

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Argentina.

VIVIANA CAROLINA LLANOS

vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN).

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina.

Resumen

Esta investigación aborda el problema de la enseñanza de la homotecia en la formación de profesores en matemática para la escuela secundaria. Se realiza un análisis histórico del concepto de homotecia y también de los planes y programas para la formación de profesores y los Diseños Curriculares para la Escuela Secundaria de la provincia de Buenos Aires. Con base en la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985), la investigación intenta identificar algunas de las transformaciones del concepto de homotecia a lo largo del tiempo, a la vez que se trata de reconocer si estos aspectos históricos impactan o no en la enseñanza media y en la formación de profesores, según los Diseños Curriculares y programas de Geometría.

Palabras clave: transposición didáctica / formación de profesores / enseñanza de la geometría / homotecia

Introducción

La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria atraviesa algunos problemas reconocidos por los profesores y la comunidad de educadores, entre ellos que no queda tiempo para enseñar todo, y en ocasiones no se llega a enseñarla, o que es más necesario enseñar álgebra y funciones. Más en general, Gascón (2004) sostiene que tanto la matemática como las cuestiones que se enseñan, están perdiendo sentido en los sistemas de enseñanza actual; ya que se presentan como transparentes e incuestionables, y en consecuencia se plantea su estudio de forma aislada de otros saberes de matemática. Este aislamiento podría tener origen en las transformaciones que ha sufrido el saber, pues en realidad un saber no es único, ni neutro, sino que ha sido descontextualizado, despersonalizado e incluso segmentado para poder ser enseñado (Otero, 2021). Esta investigación se preocupa por la enseñanza de la geometría, y específicamente de la homotecia, y nos preguntamos cuáles serían los posibles orígenes de los problemas antes mencionados, vinculados a este saber. Nos proponemos identificar entonces qué transformaciones ha experimentado este saber, para poder recuperar el sentido de la homotecia dentro de la geometría y de la matemática en general. La Teoría de la Transposición Didáctica (TDD) de Yves Chevallard (1985), que adoptamos como referencial teórico, brinda un marco de referencia para analizar estos cambios.

Antecedentes

Es posible encontrar varias investigaciones sobre la homotecia. Entre ellas se reconocen las que establecen un vínculo con las transformaciones geométricas, semejanza y teorema de Tales, que son algunos de los temas de geometría que se encuentran “abandonados” (Thaqi y Giménez, 2014). Lemonidis (1990), realiza un análisis epistemológico de la homotecia considerándola desde tres aspectos (intra-figural, como herramienta y como objeto matemático) y analiza las representaciones figurativas de situaciones de homotecia y sostiene que su tratamiento puede facilitarse o no, según el tipo y la complejidad de las configuraciones homotéticas utilizadas. Destaca en su investigación la importancia de la construcción del centro de homotecia, la determinación de los puntos homólogos, el cálculo de la dirección

homotética y la obtención de la razón de homotecia. Las investigaciones de Rubilar Crisóstomo (2020) y González *et al.* (2016) analizan los planes y programas de estudio y los libros de texto, y sostienen que en ellos aparecen diferentes definiciones para el concepto de homotecia y enfatizan que existe un fenómeno de desarticulación entre los temas, específicamente semejanza, homotecia y teorema de Tales.

La Teoría de la Transposición Didáctica

Se adopta como referencial teórico la TDD (Chevallard, 1985). El proceso de *transposición didáctica* permite analizar las transformaciones que experimenta un saber desde su origen hasta que efectivamente se enseña. Una de las etapas importantes de este proceso, ocurre dentro de lo que Chevallard denomina *noosfera* (sociedad, expertos académicos, políticos, docentes, expertos en currículum, y otros), pues allí se selecciona y decide el saber a enseñar, se determina de qué manera será enseñado y se prepara para ser difundido (Otero, 2021). El análisis de los documentos generados por la *noosfera* y la historicidad de un saber permiten identificar qué transformaciones ha sufrido para llegar a ser enseñado. Por tal motivo para identificar las transformaciones de la homotecia realizamos una descripción desde un punto de vista histórico-epistemológico de este saber. Analizamos los planes y programas para la formación de profesores, y los Diseños Curriculares para la Escuela Secundaria.

Evolución del concepto de homotecia

Describimos las transformaciones del concepto de homotecia, y vinculado a éste, el concepto más general de transformación geométrica, principalmente su evolución a lo largo de la historia a fin de identificar sus razones de ser dentro de la geometría y de la matemática en general. Desde el plano epistemológico, Lemonidis (1990) reconoce tres concepciones geométricas de la homotecia a lo largo de distintos períodos históricos:

- El período griego se caracteriza por las *relaciones intrafigurales*, resultados relativos a configuraciones. Existe la idea de correspondencia entre figuras, pero no la de transformación. Predominan las figuras semejantes y los casos de semejanza.

La semejanza permitía realizar el transporte de segmentos y ángulos, establecer la correspondencia entre los elementos de dos figuras mediante la superposición para asegurar su congruencia. Para Euclides el concepto de transformación como operación sobre un conjunto de puntos en el espacio no existe (Dahan-Dalmedico y Peiffer, 2017; Piaget y García, 1982). Aplica la teoría de las proporciones a la geometría plana y a las figuras semejantes en particular: dos figuras rectilíneas serán semejantes si los ángulos son respectivamente iguales y los lados que forman los ángulos iguales son proporcionales. En la *Proposición 2* del libro VI (tabla 1), que es la proposición de Tales y su inversa, utiliza para su demostración las reglas de las proporciones y el método de igualdad de áreas.

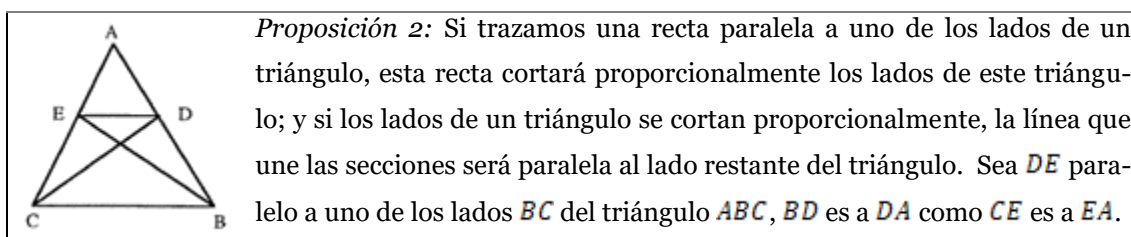


Tabla 1: Proposición 2 del libro VI. Fuente: Lemonidis (1990). Traducción propia

En este período, la idea de transformación no sólo se encontrará implícita en sus ideas, sino también en los desarrollos de otros matemáticos como Pappus (en la relación en función armónica) y Apolonio (en las cónicas) (Piaget y García, 1982).

- El período comprendido entre los siglos XVI y XVIII, se puede denominar de las *transformaciones geométricas como herramienta*, y éstas son percibidas como la aplicación de todos los puntos del plano en sí mismo.

Durante estos siglos, los pintores y arquitectos renacentistas conducen a la determinación de transformaciones y una aplicación funcional de éstas a lo largo del espacio: la perspectiva (imagen 1), que es una proyección central cuyo centro O representa el punto de vista de quien observa, sobre un plano de proyección P , tal que a todo punto X del espacio corresponde un X' que es la intersección de la recta OX con P .

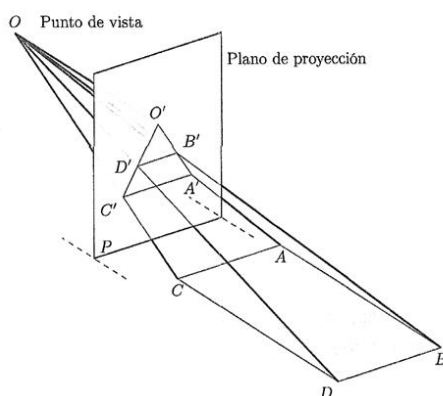


Imagen 1: Perspectiva. Fuente: Tomado de Dahan-Dalmedico y Peiffer, 2017, p. 156

Alberti (1511) demostró que la perspectiva transforma un sistema de rectas paralelas en otro de rectas concurrentes, y un siglo más tarde, para completar la correspondencia entre ambos sistemas, Desargues introduce el *punto del infinito* como el punto de concurrencia del sistema de paralelas. Éste, a partir de los desarrollos de Apolonio, define a las cónicas por su generación mediante secciones de un cono cortado por un plano y concibe todas las posiciones posibles. De este modo, el estudio de cada tipo de cónica aislada es reemplazado por una teoría general válida para todos los tipos de cónicas.

Euler, en 1797, generaliza los métodos analíticos de la geometría de Descartes y Fermat y demuestra que cualquier desplazamiento plano constituye una rotación o una traslación seguido de una simetría (González Urbaneja, 2008; Piaget y García, 1982).

- El periodo de estructuración y algebrización de la geometría (siglos XIX y XX), se denomina *de las transformaciones geométricas como objeto matemático*, es decir, búsqueda de una transformación como composición de dos o más transformaciones.

Poncelet retoma los trabajos de Desargues e instituye como método el principio de proyección para extender las propiedades del círculo a las cónicas, preguntándose cuáles de ellas se conservan y obtiene las propiedades métricas de la geometría euclidiana y las propiedades descriptivas que son invariantes por proyección. Funda la geometría proyectiva y, por primera vez en la historia de la matemática, se acentúa la idea de transformación geométrica (Dahan-Dalmedico y Peiffer, 2017).

La homotecia pierde su carácter de evidencia universal y se convierte en objeto de estudio, debido a que, en otras geometrías, como por ejemplo la esférica, la no-

ción de semejanza no existe y la de homotecia tampoco (Lemonidis, 1990). También es definida desde diferentes contextos: se comienza a diferenciar la homotecia directa de la inversa según la dirección relativa entre los segmentos del objeto y su imagen (tabla 2).

HOMOTECIA Y SEMEJANZA

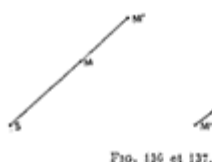


Fig. 136 et 137.

Definición. - Habiendo escogido un punto S que llamamos centro homotético y un número k que llamamos razón homotética o razón de semejanza, llamamos homotético de cualquier punto M al punto M' obtenido uniendo SM y tomando del punto S , sobre esta línea (fig. 136) o en su prolongación (fig. 137), un segmento SM' tal que

$\frac{SM'}{SM} = k$. Se dice que la homotecia es directa si el segmento SM' se toma en la dirección SM (fig. 136) e inversa si estos dos segmentos tienen direcciones opuestas (fig. 137). La figura homotética de una figura F es la figura formada por el conjunto de puntos M' , homotéticos de los que constituyen la figura F .

Tabla 2: Definición homotecia. Fuente: Lemonidis (1990) – Traducción propia

En su programa de Erlangen (1872), Klein utiliza la noción de grupo de transformaciones espaciales y expresa a cada geometría como un cuerpo de teoremas que describe las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo ciertas transformaciones, abriendo una nueva etapa para la geometría: el paso de las transformaciones proyectivas al estudio de las estructuras de grupo; así, varias geometrías son subgrupos de un sistema general que las contiene a todas (Dahan-Dalmedico y Peiffer, 2017; Lemonidis, 1990). En 1866, Petersen utiliza las transformaciones en forma funcional para resolver problemas de construcciones geométricas. Esta idea de transformación como herramienta permite estudiar la homotecia siguiendo la estructura de grupos.

A partir de los avances de Klein, Hilbert (1899) desarrolló una construcción axiomática de la geometría euclidiana transformándola completamente. Parte de objetos no definidos y especifica las relaciones entre ellos por medio de axiomas. Su método axiomático introduce un cambio, ya que se basa en la noción de estructura y en el formalismo. Hasta entonces, la congruencia implicaba la superposición exacta de las figuras, pero Hilbert introduce la congruencia de forma abstracta: la define como una correspondencia entre puntos (Klimovsky y Boido, 2005; Lemonidis, 1990).

Paralelamente, en el intento de extender al espacio la representación geométrica plana de los números complejos, surge el cálculo vectorial y en 1918 se piensa a la geometría a partir de espacios vectoriales (Lemonidis, 1990). Se define la estructura del plano afín y se estudian las aplicaciones de éste en sí mismo, denominadas aplicaciones afines o transformaciones de puntos afines, y que engloban a las homotecias del plano afín. La homotecia se expresa en lenguaje vectorial y comienza a traducirse en forma analítica.

- Desde el siglo XX, la geometría clásica tiene como representante a Hilbert quien entre otras cosas introduce la homotecia luego del *axioma de continuidad*, el cual permite definir un *sistema de abscisas* y las nociones de *distancia* y *longitud* de un segmento. Luego define la proyección paralela y enuncia el teorema de Tales. En Puig Adam (1947) aparece la siguiente definición y propiedades de la homotecia (imagen 2):

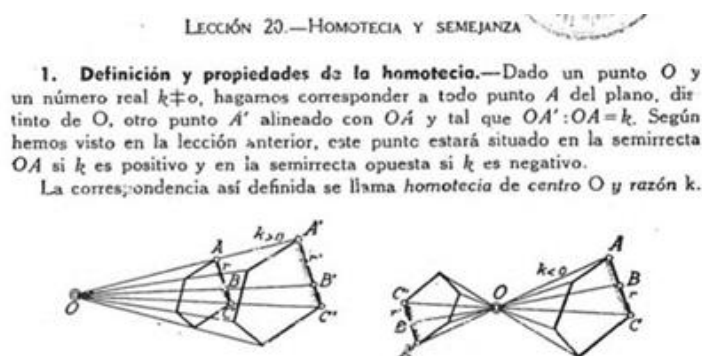


Imagen 2: Definición de homotecia. Fuente: Puig Adam (1947)

Allí realiza un tratamiento de la homotecia como estructura de grupo (imagen 3):

2. **Grupo de las homotecias con el mismo centro.**—Fácil es ver que la homotecia se convierte en identidad cuando $k=1$, y en la simetría central cuando $k=-1$. La identidad y la simetría central son, pues, casos particulares de la homotecia.

Transformando sucesivamente una figura mediante dos homotecias con el mismo centro O y cuyas razones sean k y k' se obtiene una homotecia de razón kk' . Pues si un punto cualquiera A se transforma sucesivamente en A' y A'' , A'' está en la recta OA y se tendrá

$$\frac{OA'}{OA} = k, \quad \frac{OA''}{OA'} = k', \quad \text{de donde} \quad \frac{OA''}{OA} = kk'$$

Por consiguiente: *Todas las homotecias con el mismo centro forman grupo al que pertenecen la identidad y la simetría central.*

En particular toda homotecia de razón negativa puede obtenerse como producto de la correspondiente positiva por la simetría respecto del centro.

Imagen 3: Grupo de homotecias. Fuente: Puig Adam (1947)

Luego de la definición y los teoremas que involucran la homotecia Puig Adam (1947) define la semejanza como la composición de una homotecia y una isometría.

Cada período da cuenta de las transformaciones del concepto de homotecia: surge definitivamente con los trabajos de Poncelet (siglo XVII), aunque sus orígenes se remontan hasta los griegos. La idea de transformación estaba ligada al transporte de segmentos y la congruencia de figuras; y comenzó a cobrar forma a partir de la idea de perspectiva utilizada por los pintores renacentistas, instaurándose con la geometría analítica y la teoría de grupos. Su evolución se vincula con otras geometrías y con otras áreas de la Matemática, principalmente el álgebra. Recuperar estos hechos históricos permitiría conocer algunas cuestiones cruciales en la evolución de dichos saberes, que guardan relación con la propuesta escolar del estudio de la semejanza y la homotecia.

La enseñanza de la homotecia en la escuela secundaria

El estudio de la homotecia corresponde a 3^{er} año del Nivel Secundario en la Provincia de Buenos Aires. Se ubica dentro del *Eje Geometría y Magnitudes*, en el cual se espera estudiar: Figuras planas - Transformaciones en el plano - Teorema de Tales. Figuras semejantes. Homotecias – Trigonometría - Medida.

En el Diseño Curricular de 3^{er} año se especifica el estudio de las isometrías: rotación, reflexión, simetría central y traslación, y la composición entre ellas en el núcleo sintético de *Transformaciones en el plano*. Aparecen ejemplos de actividades para estudiar simetría axial, centros y ejes de rotación de figuras y cuerpos, y para la composición de algunas transformaciones. En el núcleo *Teorema de Tales. Figuras semejantes. Homotecias* se proponen los conocimientos que se muestran en la tabla 3.

Teorema de Tales. Figuras semejantes. Homotecia

- Se propondrán problemas acerca de la división de segmentos en *partes iguales* (congruentes) y proporcionales.
- Se estudiarán figuras semejantes y se establecerán criterios de semejanza de triángulos. Se aplicarán los criterios contruidos al estudio de la semejanza de triángulos rectángulos.

- Se estudiará la homotecia y se realizará la construcción de figuras en escala.
- Si el nivel del curso es adecuado y los tiempos lo permiten se podrá trabajar la homotecia desde un punto de vista matricial (Ver Anexo II).
- Se establecerán relaciones entre perímetros y áreas de triángulos semejantes y las que existen entre perímetros y áreas de polígonos semejantes.
- Del mismo modo, se estudiará la existencia de relaciones entre áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Tabla 3: Tratamiento de la homotecia en la Escuela Secundaria. Fuente: Diseño Curricular para la Escuela Secundaria. 3^{er} año, 2008, pág. 332

La enseñanza de la homotecia en el nivel superior

Se analizan los planes de estudio y programas de los profesorados en Matemática de los Institutos Superiores de Formación Docente (ISFD) de la provincia de Buenos Aires y de tres Universidades: Universidad de Buenos Aires (UBA), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN) y Universidad Nacional del Sur (UNS), y se identifican los programas (tabla 4) que proponen estudiar homotecia y otros de sus conocimientos vinculados.

Institución	Programa	Síntesis de los conocimientos
UBA	Programa de Geometría para el <i>Profesorado de Enseñanza Media y Superior en Matemática</i>	<u>Geometría proyectiva</u> El plano proyectivo real: Puntos impropios, coordenadas no homogéneas, coordenadas homogéneas, rectas. Teorema de Desargues. Colíneaciones: Perspectividades, razón doble, cuaterna armónica, cuadrivértices, colineaciones. Dualidad y cónicas: Rectas y haces proyectivos, cuadriláteros, cónicas, hexágonos, Teoremas de Pascal y de Brianchon. Colineaciones especiales: Homologías, afinidades, semejanzas. <u>Transformaciones geométricas</u> Transformaciones entre conjuntos: Transformaciones, grupos de transformaciones, Transformaciones en la recta. Transformaciones en el plano: Proyectividades, afinidades, isometrías, transformaciones usando números complejos. Transformaciones topológicas: Número de Euler para poliedros simples. Invariantes topológicas, conexión, teorema de Jordan sobre curvas, teorema de los 4 colores, género de una superficie, característica de Euler, superficies con un solo lado, superficies orientables y no orientables. Inversiones: Definición, conjuntos de rectas y circunferencias, el problema de Apolonio, porismo de Steiner, geometría del compás de Mascheroni, construcciones con sólo la regla.
UNICEN	Programa de	<u>Unidad 2: Triángulos</u>

	Geometría con regla y compás para el <i>Profesorado en Matemática</i>	Clasificación de triángulos. Teorema de Pitágoras. Perímetro y área. Fórmula de Herón. Triángulos congruentes y semejantes. Teorema Fundamental de semejanza. Elementos notables de un triángulo y sus propiedades. La circunferencia inscrita y circunscrita. Teorema de la altura. Teorema de la bisectriz. El triángulo órtico, el triángulo medial, la recta de Euler y la recta de Simson. Teorema de Lehmus-Steiner. Teorema del Seno. Teorema del Coseno. Construcciones con regla y compás. <u>Unidad 5: Transformaciones Geométricas del Plano</u> Traslación. Rotación. Reflexión o simetría axial. Homotecia. Inversión.
UNS	Programa de Geometría para el <i>Profesorado en Matemática</i>	<u>Unidad 2</u> Transformaciones rígidas en el plano. Axiomas de rigidez ó congruencia. Congruencia de figuras. Orientación del plano. Simetría central. Congruencia de los ángulos opuestos por el vértice. Existencia del punto medio de un segmento. Simetría axial. Existencia y unicidad de la perpendicular por un punto a una recta dada. Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo. La bisectriz y la mediatriz como lugares geométricos. Ángulo recto. Rectas perpendiculares. Traslaciones. El axioma de las paralelas. Rotaciones. Centro y ángulo de rotación. Ángulos igualmente orientados de lados respectivamente paralelos ó perpendiculares. Descripción de todas las transformaciones rígidas del plano. <u>Unidad 5</u> Homotecias. Propiedades. Semejanza. Criterios de semejanzas de triángulos. Propiedad del punto de intersección de las medianas de un triángulo. Teorema de Pitágoras. Área de, regiones poligonales. Teorema de Hilbert. Área del rectángulo, paralelogramo, triángulo, trapecio y polígono regular.
ISFD	Programa de Geometría Métrica para el <i>Profesorado de Educación Secundaria en Matemática</i>	<u>Postulados de movimientos</u> Definición de Congruencia de Figuras. Movimientos directos e inversos. Postulado de paralelismo. Perpendicularidad en el plano. Simetrías. Composición de simetrías. Reducción de un movimiento a un producto de dos simetrías axiales. Otras reducciones de movimientos en el plano. <u>Sectores angulares determinados por dos rectas cortadas por una transversal</u> Triángulo: elementos y clasificación. Congruencia de triángulos: definición y criterios. Relaciones métricas en el triángulo. Desigualdades en el triángulo. Proporcionalidad de segmentos. Propiedades, teorema de Tales. Aplicaciones. Homotecia: definición y propiedades. Semejanza: definición y propiedades. Semejanza de triángulos: criterios.

Tabla 4: Conocimientos vinculados a la homotecia que se proponen en los programas de formación de profesores en Matemática. Fuente: Elaboración propia

Discusiones

A partir del análisis histórico notamos cambios en el tratamiento de la homotecia entre los períodos considerados, que va desde un tratamiento puramente geométrico a otro funcional y como estructura de grupo. Estos cambios producen ma-

yor abstracción a la hora de tratar el saber y, por otro lado, requieren de un estudio conjunto de la geometría y otras áreas de la matemática como el cálculo y el álgebra.

Para caracterizar el tratamiento escolar de la homotecia, analizamos los documentos curriculares vigentes para la escuela secundaria y para la formación de los profesores de los ISFD de la Provincia de Buenos Aires, además de tres programas de Geometría correspondientes a profesorado de la Universidad. De estos documentos se identifica que:

- El estudio de la homotecia en la escuela secundaria forma parte del *Eje Geometría y Magnitudes*, y en la propuesta la homotecia se menciona aislada y desarticulada de las demás transformaciones, como si ésta no lo fuera. Además, no se explicita el estudio de la composición entre isometrías y homotecia, y tampoco la semejanza como producto de dichas composiciones.
- Los programas de la formación de profesores de los ISFD para *Geometría Métrica* incluyen gran parte de los saberes geométricos del Nivel Secundario salvo rotación, traslación y simetría central que no se encuentran explicitados como parte de los movimientos. Además, el estudio de la homotecia aparece antes que la semejanza, contrario al orden propuesto para el Nivel Secundario.
- En los programas de las Universidades identificamos que: En *Geometría* de la UBA se propone el estudio de la semejanza y posteriormente de las isometrías, sin especificarse cuáles de ellas se estudiarán y la homotecia no se explicita en ninguna de las unidades. En la cátedra de *Geometría con regla y compás* de la UNICEN se sugiere el estudio de la semejanza y posteriormente, el de las transformaciones geométricas del plano, en el que se incluye a la homotecia, pero no aparece la simetría central y, al igual que en la propuesta escolar, no se hace referencia al vínculo de éstas con la semejanza. Finalmente, en el programa de *Geometría* de la UNS se propone estudiar todas las transformaciones rígidas del plano y dos unidades después la homotecia y la semejanza, en contraposición al orden propuesto para la escuela secundaria.

Según estos documentos parecería que los profesores abordan algunos de los saberes necesarios para enseñar en la escuela secundaria y sin establecer una relación entre ellos; lo que podría ocasionar la pérdida de sentido de estos conocimientos en la enseñanza media o que tal vez no sean enseñados. Creemos necesario incluir en la formación de los profesores un estudio completo de la homotecia y de

otros saberes que se proponen en el Diseño Curricular del nivel medio de la provincia de Buenos Aires.

Conclusiones

Las propuestas de los Diseños curriculares para la enseñanza de la homotecia en el Nivel Secundario, y en el Nivel Superior, no guardan correspondencia con las transformaciones en el tiempo de este saber. Parecería ser que varios aspectos claves que se muestran en su proceso histórico, como por ejemplo la idea de composición de homotecias ligada al grupo de transformaciones, no son contemplados para la enseñanza, lo que tal vez sería interesante recuperar, no sólo para la enseñanza de la homotecia sino de las transformaciones en general en la formación de profesores y como consecuencia, en la escuela secundaria. Por otro lado, el análisis de los programas para estudiar geometría en el ciclo superior de la formación de los profesores permite identificar que se propone estudiar menos geometría que la que deberían conocer los profesores para enseñar, según la propuesta de los diseños curriculares de la escuela secundaria. Esto podría contribuir al fenómeno del encierro del profesor en el nivel de los temas (Gascón, 2004); ignorándose una parte del tratamiento de los saberes que corresponde enseñar, y a la vez podrían desaparecer los motivos del estudio, el por qué y para qué de tal cuestión, lo que produce un estudio sin sentido de estos saberes. Creemos indispensable un estudio completo y con sentido de la homotecia que contemple los principales aspectos de este saber, como la construcción del centro de homotecia, la identificación de puntos homólogos, el cálculo de la razón de homotecia y la determinación de su dirección; así como también la relación con otras transformaciones y con la semejanza, tanto en la escuela secundaria como en la formación inicial de los profesores.

Bibliografía

Chevallard, Yves (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble: La Pensée Sauvage. (Traducida al español: Chevallard, Y (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE)

- Dahan-Dalmedico, Amy y Peiffer, Jeanne** (2017). *Una historia de las matemáticas: rutas y dédalos*. Libros del Zorzal.
- Gascón, Josep** (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Suma*, (45), 41-52.
- González, Yosenith, Arias, Ignacio, Picado, Miguel y Valverde, Gabriela** (2016). Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de la homotecia mediante la metodología del análisis didáctico. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 696-704). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- González Urbaneja, Pedro** (2008). Euler y la Geometría Analítica. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, IX, 83-116.
- Klimovsky, Gregorio y Boido, Guillermo** (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático*. AZ editorial.
- Lemonidis, Charalambos** (1990). *Conception, realisation et resultats d'une experience d'enseignement de l'homothetie* (Tesis doctoral). University of Western Macedonia.
- Ministerio de Educación** (2008). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria*. 3er Año. DGCyE.
- Otero, María Rita** (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Piaget, Jean y García, Rolando** (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI.
- Puig Adam, Pedro** (1947). *Curso de Geometría Métrica*. Nuevas Gráficas.
- Rubilar Crisóstomo, Leticia** (2020). *Un estudio sobre semejanza geométrica, homotecia y teorema de Thales en el saber a enseñar de los últimos veinte años* (Tesis de Maestría). Universidad de Santiago.
- Thaqi, Xhevdet y Giménez, Joaquim** (2014). Trayectorias Iniciales de Formación de Profesores. El Caso de las Transformaciones Geométricas. *REDIMAT*, 3(3), 253-275.

Complementariedad de las geometrías sintética y analítica: el caso del Profesorado en Matemática de la UNR

LUCÍA SCHAEFER

lucias@fceia.unr.edu.ar

Universidad Nacional de Rosario (UNR)

NATALIA SGRECCIA

sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Universidad Nacional de Rosario (UNR). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Resumen

En este trabajo interesa analizar los modos de complementariedad y continuidad de las geometrías sintética y analítica del plano en el trabajo didáctico en el aula, en particular, en la asignatura Geometrías del Plano correspondiente al tercer año del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. La investigación de tipo cualitativa, es un estudio de un caso donde se analiza el contenido de una propuesta intencionalmente diseñada, su respectiva implementación, y dos grupos enfocados realizados con estudiantes. Las categorías de análisis se corresponden con los dominios del conocimiento matemático para la enseñanza. Entre los principales hallazgos se destaca la propuesta de dos asuntos de discusión que permiten activar los diferentes dominios del modelo al estudiar la complementariedad de los enfoques geométricos.

Palabras clave: geometría sintética / geometría analítica / formación de profesores / conocimiento matemático para la enseñanza

Presentación

En los Profesorados Universitarios en Matemática (PUM), se distinguen las geometrías como un ejemplo paradigmático para la enseñanza de una teoría axiomático-deductiva. Se señala, al igual que en Barrantes, López y Fernández (2015), que las geometrías tienen numerosas aplicaciones sobre el mundo que nos rodea y que propician el desarrollo de diferentes habilidades y formas de razonamiento. A pesar de esto, comprenden una rama de la Matemática habitualmente desvalorizada, tanto en la escuela como en la formación de profesores (Fernández y Gysin, 2010), dejada a un lado o presentada de forma desarticulada con contenidos que se repiten año a año desde la educación primaria. Y con más razón, existe una importante falta de integración entre los enfoques sintético y analítico en la escuela secundaria (Gascón, 2002). De allí la necesidad de investigar cómo conectar las técnicas sintéticas y analíticas sin perder de vista la continuidad y complementariedad de ambos enfoques (Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2015, 2016), para una comprensión profunda e integrada de las geometrías (Bonilla y Parraguez, 2013). Sin embargo, muchos autores resaltan la escasa formación docente en geometrías, con desconocimiento de sus fundamentos (Ferreira Santos y De Melo Teles, 2021; Portalone Crescenti, 2008; Zakaryan y Sosa, 2021).

En este sentido, y en el marco de una tesis doctoral más amplia, interesa analizar los modos de complementariedad y continuidad de las geometrías sintética y analítica del plano en carreras de PUM del país, en cada nivel de concreción curricular: políticas curriculares, accionar institucional y trabajo didáctico en el aula. En esta oportunidad, se presentan resultados referidos al nivel del trabajo didáctico en el aula, con relación a las tareas matemáticas en la asignatura Geometrías del Plano, de tercer año del PUM de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), a partir de una propuesta diseñada en el marco de la investigación. En el plan de estudios de la carrera (Argentina, 2018), las geometrías son una de las tres ramas del núcleo disciplinar, junto a análisis y álgebra, y se abordan con distintos niveles a lo largo de los cuatro años de formación. Las geometrías se trabajan en términos elementales en primer año (Álgebra y Geometría Analítica I y II) y con una mirada integradora en tercer año (Geometrías del Plano y Geometrías del Espacio), con los fundamentos disciplinares de la geometría sintética para resignificar el enfoque analítico estudiado en primer año. En efecto, se trata de un espacio donde se espera

integrar ambos enfoques para una mejor comprensión de las geometrías del plano en la configuración del conocimiento matemático para la enseñanza -MKT- (Ball, Thames y Phelps, 2008) de los futuros profesores en clave de resignificación del contenido de la materia para hacerlo asequible a otros al enseñarles.

Encuadre conceptual y metodológico

Ball, Thames y Phelps (2008) presentan un modelo surgido en la práctica docente en matemática (MKT) que alude a habilidades y hábitos de razonamiento necesarios por los docentes para construir un puente entre el conocimiento de la disciplina y el de su enseñanza. Sostienen que es posible reconocer dominios tanto en el conocimiento de la disciplina como en el conocimiento didáctico del contenido (Imagen 1).



Imagen 1: Dominios del modelo MKT

En particular, en el *conocimiento de la disciplina*, el *conocimiento común del contenido* (CCK) refiere al conocimiento matemático básico proveniente de estudios en el nivel superior. El *conocimiento especializado del contenido* (SCK) es propio de la enseñanza, y a diferencia con el CCK, atiende a ordenar las secuencias que podrían desarrollar los distintos aspectos de un contenido específico. El *conocimiento en el horizonte matemático* (HCK) implica realizar conexiones con contenidos matemáticos futuros o más generales, y tomar decisiones sobre cómo tratar los contenidos. En este caso, el “contenido” lo constituyen las geometrías sintética y analítica del plano.

Desde este marco, la investigación que se plantea es de tipo cualitativa con alcance descriptivo-interpretativo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2014), con foco en la articulación y continuidad de los enfoques sintético y analítico en la formación de profesores en Matemática, puntualmente en el nivel curricular del aula (Terigi, 1999). La propuesta consiste en un estudio de caso (Stake, 1999) en el marco de una carrera (el PUM de la UNR), de la que las autoras son graduadas y docentes. Se trabaja con una propuesta de enseñanza ofrecida a la cátedra, su respectiva implementación y dos grupos enfocados posteriores con las estudiantes participantes. Se involucra el análisis de datos de diferente naturaleza, provenientes de actos de habla, producciones escritas y materiales de estudio, desde una triangulación metodológica (Imagen 2). A la herramienta de análisis la constituyen los dominios del conocimiento de la disciplina del MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008), junto a las modalidades de estudios previos (Ciccioli y Sgreccia, 2020; Schaefer y Sgreccia, 2018).

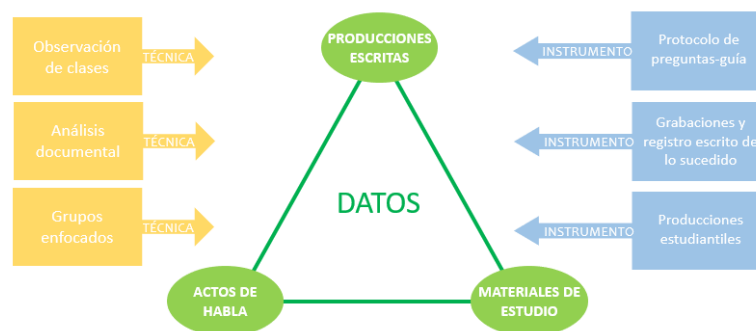


Imagen 2: Metodología del estudio

La propuesta de enseñanza: Problemas A y B

En el nivel curricular del aula, se realizaron observaciones de las clases de la asignatura Geometrías del Plano, donde se trabajó con geometría sintética. Se pudo contextualizar los contenidos y detectar ciertos aspectos poco trabajados relativos a la complementariedad y continuidad de los enfoques sintético y analítico. A partir de esto, para las últimas clases, se realizaron dos propuestas a la cátedra (Problemas A y B), que podrían resolverse desde el enfoque sintético o analítico o sintético-analítico.

El Problema A (Imagen 3) está basado en uno propuesto por Echeverría Anaya (2015) -en cursiva figuran indicaciones para los docentes de la cátedra (D1 y D2)-.

1. Resuelva el problema: "Hallar una circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3)$, $B(6,11)$ y $C(12,5)$ " (La idea es no dar mayores indicaciones, para que surjan distintas resoluciones)
2. Comparta su resolución (puede ser escaneada o en Overleaf) y clasifique todas las del curso según sus diferencias y similitudes. (Se espera que surjan al menos dos resoluciones: una exclusivamente analítica resolviendo un sistema de ecuaciones, otra pensando primero una estrategia sintética y luego volviendo a la analítica. Ejemplo de estrategia sintética: utilizando mediatrices; en este caso, ¿cuál sería el enunciado del problema sintético? ¿cómo se puede escribir?)
3. En la clasificación anterior, decida con cuál o cuáles de los enfoques se está trabajando. Analice similitudes y diferencias, ventajas y desventajas de cada uno.

Imagen 3: Consigna Problema A

En su implementación estuvieron presentes cinco estudiantes (E1 a E5) quienes resolvieron la propuesta de forma individual, para luego poner en común lo pensado con sus compañeras y con los docentes. A modo ilustrativo, en la Imagen 4 se observa la producción de E1, junto a actos de habla codificados del momento de puesta en común, y con diferentes colores, definiciones y propiedades utilizadas en cada resolución.

Dibujo sintético

AF3-1-E1: Primero dije, hay tres puntos, veo que no están alineados, me formo un triángulo. Para ver que no estaban alineados, yo usé lo de la última unidad de recta paramétrica

Primero tengo que ver que A, B y C son no alineados, observo que para A, B por $Ax \equiv B$ existe una recta en el plano r , o lo cual pertenecen $\{A+B\}$. Luego puedo escribir r como $r \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3 + 8\lambda \end{cases}$. Con $A(2,3)$ pto para r y $r(4,8)$ recta direct

Obtenemos ahora que $C \notin r$. Yo veo que $C(12,5)$, entonces veo si el sist tiene sol $p/(12,5)$. $\begin{cases} 12 = 2 + 4\lambda \\ 5 = 3 + 8\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 4\lambda \\ 2 = 8\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5/2 = \lambda \\ 1/4 = \lambda \end{cases} \therefore \text{no tiene sol}$

$\therefore A, B$ y C no pertenecen a la misma r y entonces no están alineados. / Definición sintética de puntos alineados

Axioma I3. Existencia y unicidad de recta

Ecuaciones paramétricas de la recta dados dos puntos

Definición analítica de punto perteneciente a una curva

Imagen 4: Ejemplo de triangulación de datos, caso de E1

Además de la presentación de las diferentes resoluciones, se comparten pasajes de la discusión posterior (Imagen 5). Resaltan dos cuestiones: procuran caracterizar a la geometría sintética y analítica, y a esta última como más contundente (A32-D1), exacta (A33-D1), estricta (A40-D1) que la primera; discuten sobre el modo de presentar la consigna y su influencia en el enfoque elegido para la resolución (A42-D2 a A48-E2).

A1-E2: De última, si no, lo que habría que hacer sería tomar el punto medio de un lado, hacer la perpendicular que pasa por ese punto, es decir, en la ecuación, intersecarla con la otra mediatriz, igualar esas dos ecuaciones, y ahí sacaría el circuncentro, ¿no? De otra manera...

A2-D1: Claro...

A3-D2: **Dar ecuaciones a las mediatrices...**

A4-E2: Claro, o de otra forma. No sé si tardaría más, capaz.

A5-D2: Pero... ¿vos decís que buscando la ecuación de las mediatrices podríamos...? **¿Qué beneficio tendríamos a tu versión?**

A6-E2: Ah, no, no sé. Decía otra forma, nada más. **No sé si es más rápido o no. Capaz que es más largo.**

A7-D1: Si, si, claro, en este caso particular creo que... No sé, parece que esta forma es la más rápida *(se refiere a la de E2)*. No sé qué les parece.

A8-D2: Claro, al desarrollo, esta es **más corta o más contundente, no sé cómo decirlo. Totalmente algebraicamente. Así que totalmente analítica.**

(...)

A29-D1: Como ven, en el enfoque que hace E1 y los que hicieron este, están usando un enfoque... ¿qué sería este enfoque? ¿Qué sería? ¿Sintético o analítico?

A30-E2: Sintético.

A31-D1: Claro, estarían usando esto de ver la intersección de la mediatriz, el circuncentro del triángulo, eso sería un enfoque... sería el enfoque sintético del problema. Y el que hizo E2 de plantear directamente la ecuación y resolverlo sería puramente analítico.

A32-D2: **Quedarnos con solo lo sintético, me asegura la existencia de este punto O, me asegura la existencia de la circunferencia, pero no es que puedo decir "es esa, acá está".** Cómo lo describis a ese conjunto, existe, es un conjunto de puntos, todo bien, pero **el modelo analítico es más... a mí me parece que es más contundente, ¿no?**

A33-D1: Si... no sé qué les parece a ustedes. ¿Qué dicen? Porque claro, **el analítico parece que nos da exactamente el punto.**

(...)

A39-E4: Lo que no sé si entendí bien los enfoques sintético y analítico. Pero **HAY que ir al analítico en algún momento para llegar específicamente al centro y al radio, ¿no?**

A40-D1: Eh, si, por lo menos si... por lo que veo, en este caso, **siempre necesitás ir a usar algo analítico para llegar estrictamente.**

A41-E4: Claro, porque era encontrar la ecuación de la circunferencia. Si fuera construirla nomás, era otra cosa.

A42-D2: Ah, buena observación. Si ponemos la palabra "hallar la circunferencia" sin decir qué, podría ser más amplia la respuesta, tenés razón. Igual ya que los puntos estén dados en el modelo del par de números reales a mí ya eso me da la idea de que tengo que trabajar ahí. Esperate, ¿cómo decía? Porque acá copiaron dos enunciados distintos *(mientras mira las entregas de E1 y E2)*.

Imagen 5: Extractos de la implementación del Problema A

En la clase siguiente se desarrolló el Problema B (Imagen 6; Ancochea, 2011).

(Se puede pensar que las alumnas no tienen las consignas desde el inicio, si no que el o la docente es quien va dirigiendo la clase de esta manera)

Partiremos del siguiente enunciado: "Hallar las circunferencias de radio 3cm que sean tangentes en el punto (0,4) a la recta $4x + 3y - 12 = 0$ "

1. ¿Desde qué enfoque de la geometría está planteado el problema? Justifique su elección.
2. ¿Cómo resolvería el problema? Escriba una estrategia (solo la idea paso a paso, no su resolución).
3. ¿Qué elementos y propiedades utiliza en la estrategia anterior? ¿Desde qué enfoque se plantea? *(Se espera que las alumnas noten que la estrategia se hace desde el enfoque sintético)*
4. *(Suponiendo que se plantearon los ítems 2 y 3 desde el enfoque sintético)* ¿Cómo podríamos escribir el enunciado en términos del enfoque sintético? ¿Qué diferencias y similitudes tiene con el enunciado original?
5. Resuelva el problema planteado en el ítem anterior. ¿Existe alguna solución? ¿Cuántas?
6. Resuelva el problema original, pero desde el enfoque analítico. ¿Existe alguna solución? ¿Cuántas?
7. ¿Cuál de las dos resoluciones considera más general? ¿La del ítem 5, la del ítem 6 o ninguna de ellas? ¿Por qué?

Imagen 6: Consigna Problema B

En su implementación participaron siete estudiantes (E1 a E8, sin E3). El trabajo fue resuelto en tres grupos (G1 a G3). A la Pregunta 1 la respondieron G1 y G3, y coincidieron en que se trata del enfoque analítico debido a la forma en que se presenta la recta y el punto en el enunciado. En la Pregunta 2 tanto G1 como G2 piensan su estrategia desde el enfoque sintético y luego resuelven desde el analítico, con un ida y vuelta entre ambos, donde se toma de cada uno lo que resulta útil. En particular, G2 comete errores algebraicos y los detecta al pensar nuevamente el pro-

blema de modo sintético. En ambos casos los enfoques se complementan y lo sintético le da sentido a lo analítico (Gascón, 2002), con indicios de una mirada geométrica completa (Gaita Iparraguirre y Ugarte Guerra, 2014). G3 también muestra esta complementariedad al intuir, sin resolver el sistema de ecuaciones, que tendrá dos soluciones, por pensarlo desde lo sintético.

En las Preguntas 3 a 5 se destaca la continua confrontación o comparación entre los enfoques en ambos problemas. En efecto, concluyen que la geometría sintética justifica lo que realizan en la analítica; buscan caminos de resolución alternativos, totalmente analíticos; cuestionan qué modificar en el enunciado para que sea sintético, con palabras como “construir” o “una recta cualquiera”; obtienen el enunciado “Dada una recta r y P un punto de r , construir las circunferencias tangentes a r en P , de radio 3 ”; analizan a qué refiere que una resolución sea más general, desde tres perspectivas, para cualquier: recta y punto; valor (coeficientes, radio, etc.); curva (no necesariamente recta).

Los grupos enfocados

A partir de lo trabajado en los Problemas A y B, surgieron dos grandes asuntos de discusión: las consignas y el modo de presentarlas (Asunto 1 -A1-), a raíz del análisis sobre la contundencia de los enfoques y cuál sería la respuesta esperada de acuerdo al enunciado dado; el contraste entre ambos enfoques (Asunto 2 -A2-), abordado tanto en el Problema A (donde se observa la complementariedad, pero no la continuidad) como en el B (con distinciones más claras entre una geometría y otra). Cada uno se retomó en los grupos enfocados a partir de un meme motivador (Imagen 7). El A1 fue acompañado por el Meme 1 (M1) y el primer grupo de preguntas-guía (A1-1 a A1-4; Imagen 8) -relacionadas con los dominios del MKT que se indican-. Por su parte, el A2 se introdujo con los M2 y M3, junto al segundo paquete de preguntas-guía (A2-1 a A2-6).



Imagen 7: Memes motivadores de los grupos enfocados

- A1-1: ¿Qué les transmite la imagen? ¿Cómo la interpretan? ¿Qué dirían a partir de la misma? (CCK)
 A1-2: ¿Qué diferencias hay entre los tres enunciados? ¿Resolverían los tres de igual manera? ¿Por qué? (se pueden mostrar ejemplos de sus resoluciones, seleccionando una de cada tipo). (CCK, SCK)
 A1-3: ¿Cuál sería el próximo enunciado, si tuviésemos que agregar un cuarto? (SCK)
 A1-4: Motivado por el diálogo A32-D2 a A40-D1, ¿qué significa que un enfoque sea más simple, eficaz o contundente? ¿Creen que alguno de los dos lo es? (HCK)
 A2-1: ¿Qué les transmite cada imagen? ¿Cómo las interpretan? ¿Les transmiten la misma idea? ¿Cuál creen más acertada?
 A2-2: ¿A qué hacemos referencia con “geometría sintética”? ¿Y con “geometría analítica”? ¿Qué diferencias, similitudes y relaciones podemos establecer entre una y otra? (HCK)
 A2-3: Durante las discusiones de los Problemas A y B se contraponen los enfoques, lo cual lleva a pensar en la complementariedad. Pero, ¿la continuidad? ¿A qué refiere esto? (se presenta la Tesis de continuidad entre las geometrías sintética y analítica de Gascón (2002)). ¿A qué creen que se hace referencia con continuidad? ¿A qué nos referimos si hablamos de complementariedad? ¿Creen que trabajaron estos dos aspectos durante la asignatura? ¿Y durante la carrera?
 A2-4: En el programa de la asignatura, ¿dónde se puede observar la distinción entre los enfoques? ¿Se transmite una visión integrada de ambos? ¿En qué parte del programa trabajarían esta integración? ¿Por qué? ¿De qué manera? (KCC)
 A2-5: ¿En qué aporta al conocimiento geométrico del profesor el enfoque sintético? ¿Y el analítico? ¿Y estudiar su complementariedad y continuidad?
 A2-6: ¿En qué forma a un ciudadano conocer el enfoque sintético de la geometría? ¿Y el analítico? (KCS)

Imagen 8: Preguntas-guía de GE1 y GE2

Los grupos enfocados se realizaron en dos instancias (GE1 y GE2), fueron grabados, transcritos y analizados inicialmente desde las categorías del conocimiento de la materia del MKT surgidas en estudios previos (Ciccioli y Sgreccia, 2020; Schaefer y Sgreccia, 2018), que aquí se fueron robusteciendo y actualizando. En lo que sigue se presentan momentos de activación de cada dominio de interés.

El CCK se activó en diversas oportunidades, al pensar *procedimientos de resolución* para resolver el problema planteado, o bien, al reconocer alternativas. Esta modalidad surgió tanto a partir de A1-2 como al momento de analizar las resoluciones realizadas en las clases de Geometrías del Plano. También se activó al decidir si las *respuestas son correctas o incorrectas*, y si los procedimientos son necesarios (solo en GE1).

Otra de las modalidades refiere a conocer las *propiedades geométricas* y sus fundamentos cuando se rememoran resultados geométricos ya vistos. También se

activó el hecho de conocer y aplicar las *definiciones de objetos geométricos* (GE1-223-T a GE1-228-E6; GE2-144-T a GE2-145-E4), al recordar cómo delimitar los conceptos y plantear la discusión de definiciones de un mismo objeto desde ambos enfoques.

GE1-223-T: Claro, puro analítico porque ya se pone a trabajar con las ecuaciones. ¿Qué significa que el punto pertenezca a la circunferencia? En sintética, ¿qué significa que un punto pertenezca a la circunferencia?

GE1-224-E6: Que esté en el dibujo.

GE1-225-E8: Sí, no se. Eso, que esté...

GE1-226-E2: Ah, no, que esté a distancia radio del centro.

GE1-227-T: Claro, exacto, que esté a la misma distancia del centro. Ahora, en analítica, ¿qué significa que un punto...

GE1-228-E6: Que verifique la ecuación.

GE2-144-T: Claro, qué es tangente, qué es perpendicular, qué es circunferencia. Bueno, qué es circunferencia en lo analítico es verificar la ecuación, ¿y qué sería tangente? ¿Que una circunferencia y una recta sean tangentes en lo analítico?

GE2-145-E3: Y, que sólo tengan un punto en común, o hay un único punto que pasa por ambas.

GE2-146-E4: Que verifica las dos ecuaciones.

Imagen 9: Actos de habla de GE1 y GE2

Las estudiantes también activaron diferentes *registros de representación* para referirse a los objetos geométricos -gráfico, simbólico o coloquial- y discutir, en particular, las representaciones de una circunferencia e incluso argumentar el tipo de registro utilizado. Si bien se esperaba activar el CCK con A1-2, también fue motivado por A1-1 (Registros de representación), A1-3 (Propiedades, Registros de representación), A2-2 (Procedimientos de resolución, Definiciones, Registros de representación) y A2-3 (Procedimientos de resolución, Definiciones).

Dentro del SCK las estudiantes *justificaron procedimientos* y la elección de cierto camino de resolución y de enfoque analítico o sintético, ya sea propio o de los estudiantes. También *seleccionaron distintas representaciones* según el contexto o problema y establecieron relaciones entre ellas y el concepto representado. Así mismo, se activó cuando realizaron *generalizaciones* al abstraer características en común de un enunciado o de conceptos (GE1-79-T a GE1-80-E6; GE2-133-E4). O bien cuando detectaron el grado de *dificultad matemática* en un problema o una situación, en diferentes contextos como la experiencia propia, las consignas y las representaciones.

GE1-79-T: Volviendo acá a M1, ven que hay tres tipos de enunciados, ¿no? Si tuviesen que agregar un cuarto, porque acá hablaban sobre si este es más general, más eficaz, más contundente.

GE1-80-E6: Diría construir y HALLAR la ecuación de una circunferencia que pase por A, B y C.

GE2-133-E4: Podemos ponerles letras en vez de números a los puntos, a las coordenadas, y hacer eso, una demostración analítica.

Imagen 10: Actos de habla de GE1 y GE2

Realizaron *interpretaciones de producciones estudiantiles* al analizar y comprender los procedimientos e ideas de los estudiantes en sus entregas del año anterior, ya sea para comparar resoluciones entre sí y con las propias, o agruparlas según diferentes criterios o el enfoque utilizado. Si bien se esperaba activar el SCK a partir de A1-2 y A1-3, también fue motivado por A1-1, A1-4, A2-2, A2-3 y A2-6.

La activación del HCK se dio cuando establecieron *relaciones entre la geometría analítica y sintética*, ya sea de superioridad-inferioridad, de complemento (GE2-107-E3) o de argumentación (GE1-62-E2 a GE1-63-E6), para luego poder distinguirlas.

Además, las estudiantes pudieron determinar *características de la geometría sintética* (GE1-192-E6; GE2-66-T a GE2-68-E3) *y de la geometría analítica* (GE1-60-E2; GE1-180-E6; GE2-60-E4). Si bien los A1-4 y A2-2 activan esta modalidad, como se esperaba para el HCK en general, se advierte a lo largo de toda la discusión, ya sea a partir del análisis de resoluciones o de los extractos de diálogos de clase.

GE1-62-E2: (...) Creo que lo sintético justifica lo analítico, no sé si en el orden.
 GE1-63-E6: Ah, yo lo pensaba al revés.

GE2-107-E3: Y para mí las dos van ahí, se complementan, pero es obvio también que con la sintética sola no sé si llegas a algo, por decir de alguna forma, que la necesitás y a veces hasta puede ser más fuerte la sintética.

GE1-60-E2: Uno que lo analítico es más contundente.
 (...)
 GE1-180-E6: No, yo cuando pienso en analítico pienso en las cuentas, los símbolos, las fórmulas.
 (...)
 GE1-192-E6: A mí sintético me viene gráfico a la mente.

GE2-60-E4: Tiene algo más de genérico, ¿no? Que no hubo que construir unos ejes antes para poder especificar cuál es esa circunferencia, pero no se...
 (...)
 GE2-66-T: ¿Y los otros? ¿Qué parte sería analítica? ¿Qué parte sintética?
 GE2-67-E4: Este es todo sintético, es todo construcción.
 GE2-68-E3: Sí, el mío también, yo no hice ningún cálculo, también lo justifiqué...

Imagen 11: Actos de habla de GE1 y GE2

Las estudiantes también hacen *alusión al trabajo matemático*, que involucra conocer las formas de proceder en Matemática: comunicar, definir, argumentar, probar. Y, por último, en GE1 surge el *contexto histórico*, relativo a los orígenes de los conceptos y la historia de la geometría, para justificar, por ejemplo, el tipo de representación utilizada. Si bien se esperaba activar el HCK con A1-4 y A2-2, también lo fue en A1-1 a A1-3 y A2-1 a A2-6. En general, la *caracterización de la geometría analítica y sintética*, y la *relación y distinción entre los enfoques* se activaron en simultáneo o a continuación; posiblemente porque, para distinguirlas, lo hacían en contraposición de uno con el otro.

El Asunto-Ítem más potente (más modalidades motivadas) fue el A2-2, siendo el único que incentivó la activación de los seis dominios. Así mismo, la *caracterización de la geometría analítica y sintética* se activó a partir de más Asunto-Ítem.

Conclusiones

Se analizaron los modos de complementariedad y continuidad de las geometrías sintética y analítica en el PUM de la UNR en el nivel de trabajo didáctico en aula, a partir de implementar una propuesta que permitió detectar dos grandes asuntos: presentación de las consignas (A1) y contraste entre los enfoques sintético y analítico (A2). En relación con A1, se infiere que la presencia de coordenadas para los puntos en el enunciado indujo a las estudiantes a optar por el enfoque analítico. Es decir, la forma de la consigna puede sugerir trabajar en uno u otro enfoque. Con respecto a A2, describen a la geometría sintética como aquella referida a construcciones (gráficos), surgida con Euclides, que aporta argumento a lo que se realiza en la geometría analítica, lo cual la relaciona con las demostraciones. Sostienen que permite ordenarse e implica mayor cantidad de razonamientos; mientras que la geometría analítica es descrita como contundente, especializada, fuerte, genérica, mecanizada, y con mayor confianza y certeza en cuanto a la existencia de un elemento.

También las estudiantes concluyen que el enfoque sintético justifica al analítico, en correspondencia con lo planteado por Gascón (2002), quien destaca que las técnicas sintéticas dan sentido a las analíticas. Al mismo tiempo, indican una relación cíclica entre ambos enfoques, además de complementaria, de necesidad -la geometría sintética necesita de la analítica- y de subordinación -la geometría analítica es considerada un modelo de la sintética-.

Cabe destacar que tanto A1 como A2 lograron activar los tres dominios del conocimiento de la disciplina, en el marco del MKT, a través de los datos (Imagen 12). Desde el análisis de los registros de representación y de la discusión de definiciones, procedimientos o propiedades, ambos asuntos involucran el CCK. Así mismo, desde la selección de representaciones y la justificación de procedimientos, A1 se relaciona con el SCK, mientras que en A2 se destacan las generalizaciones de conceptos y el estudio de la dificultad matemática en las propuestas. Por último, el

HCK se vincula con A1 y A2 al provocar la discusión de las características de cada enfoque y la relación entre ellos.

Se subraya que desentrañar la relación entre los asuntos motivadores y las modalidades activadas contribuye a pensar nuevas propuestas para el aula de formación.

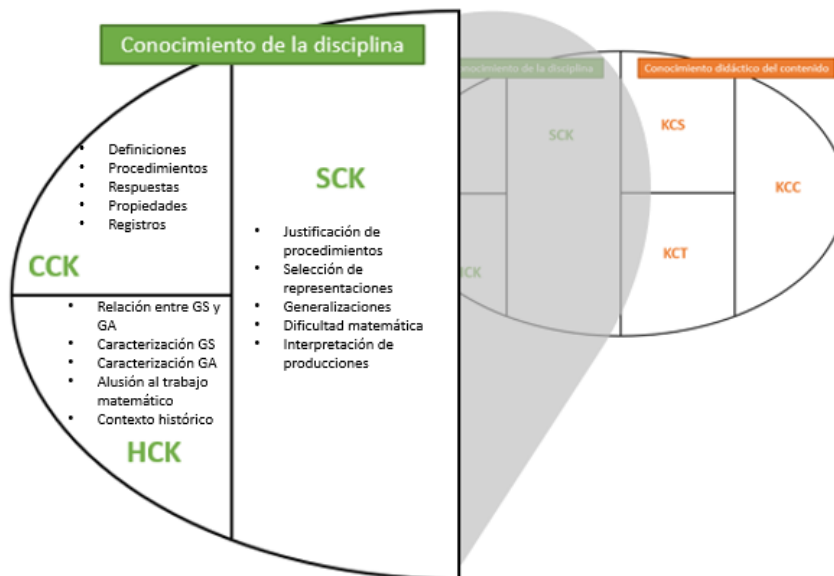


Imagen 12: Modalidades y dominios activados en los grupos enfocados

Bibliografía

- Ancochea, Bernat** (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en la secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp.533-551). Centre de Recerca Matemàtica.
- Argentina** (2018). *Consejo Superior. Plan de Estudios del Profesorado en Matemática*. Universidad Nacional de Rosario.
- Ball, Deborah, Thames, Mark y Phelps, Geoffrey** (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barrantes, Manuel, López, Marco y Fernández, Manuel** (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.
- Bonilla, Daniela y Parraguez, Marcela** (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. En R. Flores (Ed.), *ALME*, 26, 611-618.

- Ciccioli, Virginia y Sgreccia, Natalia** (2020). Conocimiento matemático para la enseñanza de geometría analítica en futuros profesores. *REIEC*, 15(1), 1-20.
- Echeverría Anaya, Julio** (2015). *Estudio de la circunferencia desde la geometría sintética y la geometría analítica, mediado por el GeoGebra, con estudiantes de quinto grado de educación secundaria* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de Perú.
- Fernández, Graciela y Gysin, Liliana** (2010). Una propuesta para enseñar geometría proyectiva en la formación de profesores de matemática (documento digital). <https://doi.org/10.33044/revem.10232>
- Ferreira Santos, Luciana y De Melo Teles, Rosinalda** (2021). Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: uma visão do estado da arte. *EMP*, 23(1), 79-111.
- Gaita Iparraguirre, Cecilia y Ugarte Guerra, Francisco** (2014). Conexiones entre la geometría sintética y la geometría analítica: Un estudio en el contexto de la Educación Básica de Perú. En U. Malaspina Jurado (ed.), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp.55-70). Pontificia Universidad Católica de Perú.
- Gascón, Josep** (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.
- Henríquez-Rivas, Carolina y Montoya-Delgadillo, Elisabeth** (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 51-70.
- Hernández Sampieri, Roberto, Fernández Collado, Carlos y Baptista Lucio, Pilar** (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- Portalone Crescenti, Eliane** (2008). A formação do professor de matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. *Práxis Educativa*, 3(1), 81-94.
- Schaefer, Lucía y Sgreccia, Natalia** (2018). Enseñanza de la geometría sintética a futuros profesores. El caso de la UNR. *REDIMAT*, 7(2), 134-161.
- Stake, Robert** (1999). *Investigación con estudios de caso*. Morata.
- Terigi, Flavia** (1999). *Curriculum. Itinerarios para aprehender un territorio*. Santillana.
- Zakaryan, Diana y Sosa, Leticia** (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), 71-97.

Los números reales y las concepciones del infinito

MARÍA CAROLINA BENITO

maria.benito@unipe.edu.ar

MARA CEDRÓN

mara.cedron@unipe.edu.ar

BETINA DUARTE

betina.duarte@unipe.edu.ar

URIEL KASMAN

uriel.kasman@unipe.edu.ar

CECILIA LAMELA

cecilia.lamela@unipe.edu.ar

MARÍA CECILIA MONTES DE OCA

maria.montes@unipe.edu.ar

Universidad Pedagógica Nacional, UNIPE

Resumen

En esta presentación damos cuenta de algunos fenómenos didácticos que emergen como resultado de la conceptualización de los estudiantes del infinito y que intervienen en la comprensión de los números reales. Nos apoyamos en dos investigaciones, una en el nivel secundario y otra con estudiantes del profesorado de matemática en su primer año de formación. Mostramos que, así como las concepciones del infinito se ponen en juego al argumentar sobre varios aspectos de los números reales, del mismo modo, una propuesta de enseñanza que abra a la reflexión sobre aspectos teóricos de este conjunto numérico —la irracionalidad, la infinitud de desarrollos decimales, la densidad del orden y la representación en la recta numérica— fomenta la comprensión sobre el infinito.

Palabras clave: números reales / infinito potencial / infinito actual / concepciones

Introducción

En el proyecto de investigación PICTO 2017-0022, “De la resolución de problemas hacia la construcción de teoría en el aula. Puentes posibles en el campo de los Números Reales¹”, nos propusimos estudiar condiciones didácticas para llevar adelante un proceso de conceptualización del campo de los números reales en el nivel secundario que promueva un pensamiento teórico. Con este propósito concebimos una secuencia didáctica junto a un grupo de docentes del nivel, implementamos (estudiantes de 15, 16 y 17 años) y estudiamos los fenómenos didácticos asociados a su desarrollo.

Este equipo de autores se encuentra en la actualidad investigando la enseñanza y aprendizaje del campo de los reales en el nivel universitario. Nos interesa comprender las concepciones sobre los reales, su representación, la densidad del orden y la recta como objeto matemático que los estudiantes del profesorado de matemática construyen al finalizar el primer año de formación.

En ambos proyectos encontramos que las concepciones de los estudiantes acerca del infinito se hacen presentes a la hora de concebir expresiones decimales infinitas periódicas y no periódicas y su representación en la recta, en las formas de argumentar acerca de la densidad de los racionales, en las formas de razonar sobre la recta numérica y sus propiedades matemáticas que heredan del conjunto numérico de los reales. Frente a estos emergentes que han sucedido en ambas investigaciones nos preguntamos: ¿puede el tratamiento de los números reales constituirse en una plataforma para hacer avanzar a los estudiantes en su comprensión del infinito? y recíprocamente ¿puede el tratamiento del infinito hacer evolucionar las nociones de los estudiantes sobre los números reales? Desarrollaremos algunos análisis y compartiremos resultados provisorios en esta presentación.

Referencias teóricas

Numerosas investigaciones se han dedicado a las concepciones del infinito y su vínculo con distintos aspectos de la enseñanza de la matemática (Fischbein *et al.*,

1 El equipo de investigación de este proyecto estuvo formado por algunos de los autores y otras investigadoras.

1979). Tomaremos en cuenta aquí aquellas que aportan a nuestro interés específico acerca de las concepciones del infinito en vínculo con la enseñanza de los reales. Montoro y Ferrero (2022) documentan los aportes de varios autores quienes, por un lado, muestran la inestabilidad del infinito actual en jóvenes que han terminado el ciclo secundario y por el otro, advierten la necesidad de contextos educativos que propicien la reflexión sobre algunas ideas contraintuitivas en el marco de los números reales a través de intervenciones de enseñanza específicas.

La posibilidad de encontrar y de ubicar infinitos números entre dos números reales dados es una acción que se encuentra en oposición (Vergnac, 2013) con dos ideas presentes en estudiantes: por un lado, un conjunto que contiene infinitos números (o puntos en la recta) necesita expandirse y por lo tanto no puede ser un conjunto acotado; y por otro lado, no es posible concebir un conjunto acotado infinitamente divisible (Cedron *et al.*, 2021). Además, aceptar que la recta está constituida por puntos, aun pareciendo una cuestión trivial a nuestros ojos, ha generado mucha controversia y debate a lo largo de los siglos (Scaglia, 2000). En un recorrido sobre ideas en la matemática a lo largo de la historia, Scaglia señala que la interpretación de la naturaleza de la recta, si bien se basa en decisiones axiomáticas, probablemente responda también a intuiciones iniciales, punto de partida para desarrollos posteriores. Hemos pensado entonces en la necesidad de desafiar la intuición sobre puntos y recta, esto involucra necesariamente las concepciones acerca del infinito.

Frente a la pregunta por la igualdad $0.999...=1$ la visualización de un proceso infinito de agregado de nueves en la expresión decimal del número lleva a algunos estudiantes —en sintonía con el segundo señalamiento de Vergnac— a sostener que el proceso no termina nunca y por lo tanto no es posible alcanzar el número 1. Sierpiska (1987, pp 391), analiza este fenómeno y propone que se trata de una concepción de infinito vinculada a la idea de tiempo. Consideramos que, en este caso, no incide la magnitud (representada por los nueves) sino la idea de un proceso que siendo infinito no tiene fin. Es la temporalidad del infinito la que parece incidir en esta concepción.

En su análisis sobre las formas que adopta el infinito en las argumentaciones de estudiantes de primer año de la universidad, Sierpiska observa que las concepciones del infinito como proceso de algunos estudiantes son lo suficientemente sólidas como para resultar persistentes aun frente a contraejemplos presentados por un docente. Tall ha investigado por más de 20 años las relaciones entre las concepcio-

nes del infinito y el pensamiento formal e informal en jóvenes que transitan la educación secundaria y universitaria. Interesado por detectar conflictos relativos a la noción de límite a resolver durante el aprendizaje de los números reales, el investigador presenta explicaciones de estudiantes acerca del infinito: “es algo que no existe y nunca se alcanza” o “(es) un símbolo que representa lo inalcanzable” mostrando la fuerza de la concepción potencial del infinito que se construye a través de las experiencias que ofrece la enseñanza (Tall, 1978). En nuestras experiencias de aula y entrevistas hemos encontrado descripciones similares.

También Sierpinska aporta argumentos de estudiantes que apelan a imágenes sobre el infinito producidas en su trayectoria escolar. Tal es el caso de la noción de asíntotas de funciones que les permiten, por analogía, decidir que $0,999\dots$ es distinto de 1, pues “así como la curva y la recta asíntota están cada vez más cerca pero nunca se tocan, el $0,999\dots$ está cada vez más cerca sin alcanzar a valer 1”. En estos argumentos el infinito aparece asociado a una idea de límite informal pero potente para dar cuenta del fenómeno de las asíntotas y se extrapola a una notación $0,999\dots$ en la que los puntos suspensivos colaboran en la visualización del infinito potencial.

Otra cuestión que Tall (2001) señala y que en nuestras investigaciones aparece en contextos similares es la transferencia hacia el infinito de regularidades halladas en casos finitos. De este modo, dado que el conteo de números se apoya sobre una biyección (en muchas ocasiones puesta en acto), los estudiantes suponen que, si un intervalo real mide el doble que otro, tendrá el doble de números reales, o que el conjunto de los naturales pares tiene la mitad de números que el conjunto de los naturales. Estas concepciones del infinito heredando propiedades de lo finito requieren ser tomadas por la enseñanza.

Interesada por los conocimientos de los números reales al final de la educación secundaria y en los comienzos de la formación universitaria, Bloch (2018) señala que los estudiantes de Francia que finalizan un primer año de formación universitaria aceptan que todo límite tiene por resultado un número, aunque no imaginan que todo número constituye un límite. Tomamos este señalamiento como una evidencia de las relaciones inacabadas entre concepciones del infinito que se juegan en el concepto de límite y el conocimiento de los números reales que se construyen en esta etapa.

Referencias metodológicas

La investigación en el nivel secundario se desarrolló a partir del diseño de una secuencia de enseñanza de los números reales discutida y ajustada con cuatro docentes de escuelas secundarias de la Ciudad de Buenos Aires, con quienes se desarrolló un análisis a priori en un trabajo de índole colaborativo. Este grupo de docentes implementó la secuencia en sus aulas durante 9 clases (cinco semanas) contando con observación participante, registro y toma de datos a cargo del equipo de investigación. Se desarrolló un test y se implementó a los efectos de documentar los aprendizajes. El análisis de los hechos de la clase iniciado en el seno del equipo de investigación derivó en la escritura colectiva desarrollada entre docentes e investigadoras de un documento el cual contiene la secuencia, su análisis y se nutre de experiencias de aula.

En nuestra segunda investigación nos propusimos indagar las concepciones de estudiantes del primer año del profesorado universitario en matemática, sobre los números reales, la recta numérica y la recta geométrica, y los vínculos que establecen entre ellos. Elaboramos un cuestionario suministrado a 18 estudiantes voluntarios en forma presencial en la universidad de una hora de duración con preguntas cerradas y tareas a completar. El análisis de las respuestas obtenidas permitió identificar diferentes posturas en relación con las concepciones de números reales. Diseñamos a partir de ello entrevistas individuales semiestructuradas que tuvieron lugar tres semanas después del cuestionario. Concebimos preguntas con el objetivo de hacer avanzar las respuestas dadas por las estudiantes (todas mujeres) al cuestionario y ejemplos para tensar sus argumentos y así profundizar las concepciones identificadas.

En esta presentación tomamos parte de los análisis de ambos proyectos que nos permiten detectar las concepciones sobre el infinito en ambos grupos de estudiantes.

Estudiantes de escuela secundaria: densidad del orden y el infinito en la representación de los números

En la secuencia desarrollada (Benito *et al.*, 2023) abordamos el estudio de la densidad del orden en los reales como un modo de conceptualizar a este conjunto.

El estudio de esta propiedad ofrece una primera dimensión de análisis sobre las nociones del infinito: la necesidad de romper con una idea del infinito como algo no acotado (Vergnac, 2013), en expansión, idea que subyace en la construcción de los conjuntos de números enteros. La comprensión de la densidad —en su versión de la existencia de infinitos números entre dos dados— supone una percepción del infinito que no es evidente en estudiantes de escuela secundaria (Cedón *et al.*, 2021).

Estudiar la densidad implica también aceptar la equivalencia entre dos ideas: dados dos números reales distintos hay infinitos números entre ellos y, no existe ni el anterior ni el posterior inmediatos a un número real. Encontramos que para algunos estudiantes el hecho de poder encontrar infinitos números entre dos dados (comprendiendo y dominando alguna técnica) no es evidencia suficiente para considerar la imposibilidad de encontrar el anterior o posterior inmediato de un número real. En ocasiones también postulan que un conjunto acotado y abierto en $\mathbb{R}$ tiene último elemento (Cedón *et al.*, 2021). La propuesta diseñada tiene la intención de problematizar y comprender ambas ideas.

En las implementaciones realizadas, frente a la tarea de encontrar el mayor elemento en el intervalo $(0;1)$ —problematizando así su existencia— los y las estudiantes proponen argumentos para aceptar o rechazar la igualdad $0,\overline{9}=1$ (Cedón *et al.*, 2021). Señalamos algunas consideraciones respecto a estos argumentos en vínculo a la concepción del infinito de esos estudiantes. En una clase en donde, a partir de razonamientos deductivos se arriba a la igualdad $0,\overline{9}=1$ nos encontramos con reacciones contrapuestas. Estudiantes que en principio consideran imposible esta igualdad, terminan aceptándola frente a los razonamientos deductivos presentados. Otros la rechazan sosteniendo que el número $0,\overline{9}$ es casi 1, pero siempre es menor. Tenemos como hipótesis que el posicionamiento de estudiantes que admiten la igualdad se encuentra en vínculo con la posibilidad de aceptar la idea del infinito actual. Efectivamente, tomarla como cierta supone aceptar un estado final en el proceso de agregar sucesivos nueves, haciendo primar para ello una idea del infinito actual (Sierpinska, 1987). Para quienes no la aceptan, los infinitos nueves de la escritura $0,9999\dots$ remiten a la imposibilidad de “llegar al 1”: el proceso de agregar nueves es inacabado y por lo tanto no se llegaría a 1.

De este modo, encontramos que un aspecto del estudio de la densidad — la no existencia de último elemento en un conjunto abierto y acotado— involucra una

percepción del infinito (potencial vs. actual), algo difícil de atrapar en este momento de la escolaridad (Cedrón *et al.*, 2021).

Aceptar que entre dos números distintos existen infinitos involucra la aceptación de un “infinito acotado”. Las experiencias nos demuestran que transitar ese paso no se logra de una vez y para siempre. La representación de los números, en particular las expresiones decimales infinitas, también funcionan como una dimensión a problematizar. Considerando este hecho, en la secuencia tomamos como hipótesis el doble enriquecimiento entre la conceptualización de la densidad y la de los números que tienen una representación mediante expresiones decimales infinitas. Por un lado, producir expresiones decimales finitas e infinitas entre dos números dados es un soporte para abordar la pregunta general acerca de si hay o no infinitas posibilidades; por el otro, abordar preguntas sobre la densidad genera un espacio para profundizar el estudio de las expresiones decimales infinitas (periódicas o no) y las dudas o los conflictos que trae el infinito en la representación de los números. Por ejemplo, estudiantes que encuentran infinitos números entre dos expresiones decimales finitas, podrían sostener sin hallar contradicción que entre $2,\overline{3}$ y $2,\overline{4}$ no hay números “ya que esos números no terminan nunca”.

Durante la investigación en el nivel secundario consideramos a las expresiones decimales infinitas como una característica compartida entre algunos números racionales y los irracionales. Por ello, en la secuencia se estudian similitudes y diferencias, en particular, a partir de analizar expresiones decimales dadas a través de una regla de formación de sus cifras decimales (que llamaremos *ley de formación*).

Con frecuencia se supone que los irracionales son números donde no es posible anticipar las cifras en ninguna posición de sus expresiones decimales. Si bien esto caracteriza a números como π o $\sqrt{2}$ —y es una de las dificultades para tratar con ellos— no es el caso de los números irracionales dados por ley de formación donde es posible anticipar qué número estará en cualquier posición². Es por esto que nos propusimos iniciar el estudio de las expresiones decimales infinitas no periódicas a partir de expresiones con ley de formación y considerando que los números periódicos también tienen una ley de formación.

La producción de números dados por leyes de formación que devienen en irracionales permite disponer de una variedad de ejemplos y así visualizar a los irracio-

2 Un ejemplo de irracional dado por ley de formación es: $0,123412351236\dots$. La ley de formación podría enunciarse como: “después de la coma, las tres primeras cifras decimales son 123. Luego, se ubica el 4. Se repiten las cifras 123 y se intercala cada vez un número natural, a partir del 5”.

nales como un conjunto infinito. En las implementaciones observamos algunos tratamientos que hacen los estudiantes de estas expresiones infinitas dadas por ley de formación. Identificamos la posibilidad de manipular lo infinito de esas expresiones al producir creativamente números de este tipo o al ordenarlos. Como consecuencia de la tarea de “inventar” expresiones decimales infinitas emergen nuevas formas de producir irracionales. Por ejemplo, para encontrar un número entre 3,14 y π , un grupo de estudiantes propone “puede haber un número irracional ya que cambiando un dígito del número π [después de los milésimos] para que este sea más chico, logramos que esté entre 3,14 y π ”. Estos estudiantes encuentran la forma de superar el problema de la escritura decimal infinita proponiendo como ejemplo un irracional a partir de otro conocido y tomando de la escritura decimal de éste aquello que es difícil de controlar por ser irracional. Interpretamos en esta producción un modo de manipular el infinito en la representación de los números.

El infinito en las concepciones de estudiantes del profesorado de matemática

En el proyecto de investigación en el que participaron estudiantes universitarios, a partir de los cuestionarios y entrevistas realizadas, pudimos relacionar las distintas concepciones del infinito que se ponen en evidencia en sus respuestas sobre el conjunto de los números reales. En particular pudimos relevar información acerca de esta relación al profundizar sobre la distinción entre objetos materiales e ideales, la representación de expresiones decimales infinitas en la recta y la densidad de $\mathbb{R}$. Nos interesa mostrar a continuación algunos recortes de los cuestionarios y las entrevistas para analizar el posicionamiento de algunas estudiantes frente a situaciones en donde se hace presente el infinito (las entrevistadas fueron mujeres).

Dos afirmaciones del cuestionario sondean cuál es su concepción acerca de los objetos ideales y materiales, en particular, de los puntos y la recta. Mientras la primera afirmación diferencia explícitamente la recta material de la ideal, la segunda

hace referencia a puntos sin mencionar la condición de material o ideal. Buscamos así relevar la consistencia de las posiciones de las estudiantes³.

La mayoría acepta una distinción entre una recta material y una ideal, pero considera que los puntos ocupan un espacio “muy chiquito”. Incluso algunas visualizan infinitos puntos entre dos dados. Estas estudiantes no perciben una contradicción entre la infinitud de puntos en un recinto acotado y el hecho de que cada uno ocupe una superficie. En su concepción del infinito imaginan que ajustar la superficie a algo “muy” pequeño resuelve la infinitud. Creemos que el hecho de que los puntos sean reconocidos como parte de la recta geométrica hace que adquieran una materialidad, en aras de darle entidad a la propia recta. En esta circunstancia, parece anti intuitivo aceptar que la recta pueda estar compuesta por infinitos puntos que no ocupen superficie. ¿Cómo podría “existir” una recta compuesta por infinitos puntos si no tienen al menos una “diminuta superficie”?

También indagamos sobre el grado de acuerdo con la posibilidad de ubicar en la recta con exactitud a los números con expresión decimal infinita. Esto permitió realizar un análisis en dos sentidos: advertimos en qué medida las concepciones del infinito estuvieron presentes al considerar una posición exacta para estos números y, por otro lado, cómo pueden las estudiantes apoyarse en técnicas de ubicación para profundizar su comprensión sobre el infinito. Para algunas estudiantes disponer de una técnica es suficiente para resolver la ubicación de números en la recta, por eso afirman que se puede ubicar exactamente a números con expresión decimal infinita, periódica y también a los que son de la forma “raíz cuadrada de un número primo”. Sin embargo, otros números irracionales no pueden ubicarse exactamente en la recta porque “son números infinitos y no sabés cómo siguen”. Para estos consideran una “ubicación por posición”. Se trata de un proceso que consiste en ir ubicando en la recta cada expresión decimal finita obtenida al truncar la expresión del irracional, incorporando en cada paso una cifra decimal más. Al ser un proceso infinito, esto no da certeza sobre la ubicación exacta de estos números por no poder finalizar el procedimiento. Entendemos que para estas estudiantes no es posible aceptar que la infinitud de pasos no impide encontrar una posición exacta. Interpretamos que esto pone en evidencia una concepción del infinito potencial que explica por qué consideran imposible representar estos números en la recta.

3 Afirmación 1: Al trazar una recta, la línea que dibujamos es una representación material y como tal tiene grosor, pero la recta es un objeto ideal y por lo tanto no tiene grosor. Afirmación 2: Los puntos de la recta ocupan una diminuta superficie.

Otras posiciones se manifestaron por quienes tienen en claro la ubicación exacta de números racionales y conocen un método para ubicar las raíces cuadradas de números primos, pero al mismo tiempo se plantean “¿dónde entran los irracionales si entre dos puntos racionales hay infinitos racionales? O tenemos una cosa o tenemos otra”. La existencia de infinitos puntos racionales en la recta entre dos dados obtura, de algún modo, la aceptación de otros infinitos puntos no racionales en ella. Interpretamos que en esta concepción el infinito se presenta como todo y es la idea principal que sustenta esta posición.

Por otra parte, algunas estudiantes solo aceptan la ubicación exacta de los números con expresión decimal finita en tanto son “números que terminan”. En cambio, los que tienen una expresión decimal infinita son “números que no terminan” y no tienen una ubicación exacta en la recta. Conocer los métodos de construcción de Tales y de Pitágoras para ubicar números no alcanza y se duda que den la ubicación exacta en el caso de expresiones decimales infinitas. Cuando se le preguntó a una de las estudiantes si el número $0,3\overline{2}$ admite una ubicación exacta, ella respondió que no puede ubicarlo exactamente. En sus palabras: “ $0,323232$ infinitamente no sé dónde lo voy a encontrar. Sé que en algún momento se va a chocar con $0,333333$ o $0,323232$ hasta que pueda cambiar a $0,33$ el último, pero ya va a ser otro número. Tampoco podría encontrarlo”. Interpretamos que los números con expresiones decimales infinitas están —en su concepción— en movimiento en la recta y por eso no tendrían un lugar exacto. Lejos de aceptar el infinito como un proceso finalizado, las ideas que despliega la estudiante en la entrevista están más cerca de percibir un infinito potencial.

Otras estudiantes no necesitan conocer un método para tener certeza de que cada número real ocupa un lugar preciso en la recta. La creencia de que todos los números reales tienen una ubicación exacta les permite evitar el conflicto que advertimos en otras estudiantes generado por la infinitud de la expresión decimal. En estos casos, la comprensión de una característica de los números reales como es su ubicación única y precisa en la recta les permite acercarse a una conceptualización de infinito actual.

Por otra parte, varias estudiantes reconocen la existencia de más irracionales que racionales en la recta. En la entrevista una de ellas explica:

“Yo me amigué más con las expresiones decimales, lo veía más fácil de esa manera. Los irracionales son más que los racionales porque a cualquier expresión de-

cimal le puedo correr un cero detrás de la coma, agregarle un número y se va a hacer infinito y va a haber más irracionales así. [...] Si uso esa técnica, de correrle un cero después de la coma, o agregarle otro cero o correrle un uno y siempre respetando que no haya un período, si parto del número raíz de dos que es 1,41 y muchos números más y pongo 1,041 y los que vienen después, voy a tener un irracional nuevo. Entonces para mí hay más irracionales que racionales”. Más allá de que su argumento no garantiza la existencia de más irracionales que racionales, constituye un procedimiento que le ayuda a comprender la existencia de infinitos irracionales. En este sentido, creemos que es la posibilidad de actuar sobre el infinito la que le ayuda a hacer evolucionar sus concepciones acerca de los números reales.

A modo de síntesis, desde nuestra posición las estudiantes se ven confrontadas a superar la noción de infinito como proceso para poder comprender las nociones de los números reales mencionadas.

Conclusiones

En la secuencia diseñada tomamos como una condición didáctica para la conceptualización de los números reales el trabajo con actividades que convocan a pensar sobre aspectos teóricos de este conjunto numérico en relación con la irracionalidad, la infinitud de desarrollos decimales, la propiedad de densidad y la representación en la recta numérica.

Como hemos mencionado en este texto, conceptualizar a los números reales involucra entre otras cuestiones el pasaje del infinito potencial al actual dado que supone aceptar la condición de número que está dado por su desarrollo decimal infinito.

Los análisis presentados nos permiten concluir que acceder a los desarrollos decimales infinitos (periódicos y no periódicos) abre el juego a la reflexión, al cuestionamiento, a la abstracción matemática y al pensamiento teórico. Del mismo modo, aceptar los números irracionales, esto es, los desarrollos decimales sin fin y sin período supone crecer en la racionalidad, valga el juego de palabras.

La densidad de los racionales y los reales ayuda a avanzar en la comprensión del infinito. El hecho de poder encontrar siempre un número entre otros dos dados, como puede ser a partir de una ley de formación, refuerza la posibilidad de que ha-

ya infinitos puntos entre dos. Además, conocer los métodos apoyados en Tales y Pitágoras genera condiciones para aceptar la ubicación exacta en la recta de infinitos números reales. Estos son ejemplos de cómo algunas técnicas que se aprenden en el trabajo con los reales fomentan la comprensión sobre el infinito ya sea en la posibilidad de concebir al infinito en un intervalo acotado o bien aceptar la conclusión de un proceso infinito.

Bibliografía

- Benito, Carolina, Bergé, Analía, Cedrón, Mara, Duarte, Betina, Herrera, Romina, Lamela, Cecilia, Montes de Oca, María Cecilia, Morales, Graciela y Rey, Mauro** (2023). *Los números reales en la escuela secundaria. Una secuencia posible*. UNIPE Editorial Universitaria.
- Bergé, Analía, Cedrón, Mara, Duarte, Betina, Herrera, Romina y Lamela, Cecilia** (2018). De la Resolución de problemas a la construcción de teoría en el aula: puentes posibles en el campo de los reales. *XLI Reunión de Educación Matemática. REM-UMA*, Universidad Nacional de La Plata.
- Bloch, Isabel** (2018). Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université 1. Université de Bordeaux. *Petit x*, 106, 65-77.
- Cedrón, Mara, Duarte, Betina, Herrera, Romina y Lamela, Cecilia** (2021). Representación y densidad en los reales. Análisis de experiencias de aula. *Revista Científica EFI-DGES*, 7(12), 109-122
- Fischbein, Efrain, Tirosh, Dina y Hess, P.** (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, (10), 3-40.
- Montoro, Virginia y Ferrero, Martha** (2022). Diversidad de ideas construidas por estudiantes sobre los números reales, los números irracionales, el orden y la densidad. *Revista de Educación Matemática*, 37(1), 61-92.
- Sierpińska, Anna** (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>
- Scaglia, Sara** (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta numérica* (tesis de doctorado). Universidad de Granada.
- Tall, David y Schwarzenberger, Rolph** (1978). Conflicts in the learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49
- Tall, David** (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 199-238.

Vergnac, Martina (2013). *Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives* (tesis de maestría). Université Montpellier II.

La congruencia de triángulos: estudio epistemológico en el ámbito del profesorado en matemática

ALICIA ALEJANDRA AZAR

aalejandraazar@gmail.com

Instituto de Formación Docente Continua San Luis. IFDC-San Luis

ROSA MABEL LICERA

rlicara@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto. UNRC

Resumen

En este trabajo presentamos un problema de investigación en Didáctica de la Matemática en torno al estudio de la congruencia de triángulos. Desde el marco teórico y metodológico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), explicitamos una posición epistemológica respecto a este saber en *la Institución de la Formación Inicial del Profesorado en Matemática* a partir de un estudio histórico-epistemológico. Con este análisis ponemos en evidencia que no hay una forma universal de presentar *este saber en la comunidad científica y en la enseñanza* y proponemos indicadores para su estudio en la institución del profesorado.

Palabras clave: congruencia de triángulos / geometría / dimensión epistemológica / teoría antropológica de lo didáctico

Introducción

El estudio de la Geometría ha ido perdiendo espacios en la enseñanza secundaria. Es habitual que los profesores prioricen otras áreas de la matemática, llegando incluso en algunos casos a excluir a la geometría de su planificación anual. En otros casos, su enseñanza consiste en la presentación, -más o menos formal- de una lista de definiciones y propiedades, proponiendo luego tareas bastante estereotipadas. Este “olvido” de la geometría está vinculado con la pérdida de sentido de su estudio, cayendo, tal como lo afirma Chevallard (2015), en una enseñanza monumentalista: el profesor muestra a sus alumnos los saberes como monumentos que se deben conocer, aunque no se sepa cuál es su utilidad, lo que ocasiona un problema docente¹ que podríamos resumir con las siguientes cuestiones: ¿Qué tipo de tareas proponer para que el estudio de la Geometría cobre sentido para los alumnos? ¿Cómo hacer que los alumnos se involucren en dicho estudio? Más allá de las indicaciones generales presentes en los diseños curriculares, ¿Qué se debe enseñar de Geometría en la escuela secundaria? ¿Cómo debe ser esta enseñanza?

Esta problemática docente forma parte de un problema profesional (PPG) que toma los interrogantes planteados, pero además cuestiona las razones de ser de la geometría en la escuela y los condicionantes institucionales de la labor docente: ¿Por qué, para qué enseñar Geometría en la escuela secundaria? ¿Cómo superar el monumentalismo imperante en relación a su estudio?

Esta comunicación es un recorte del Trabajo Final de la carrera de posgrado interinstitucional (Universidad Nacional del Litoral, Universidad Nacional de Río Cuarto y Universidad Nacional de San Luis) Especialización en Didáctica de la Matemática. El problema de investigación abordado toma como punto de partida el PPG mencionado y se sitúa en *la Institución de la Formación inicial del Profesorado en Matemática* (en adelante IFP), ya que consideramos que la formación inicial tiene que abarcar el estudio de cuestiones problemáticas que forman parte de la profesión docente. Tomamos además un recorte del saber geométrico, *la congruencia de triángulos y los criterios de congruencia* (en adelante **O**).

1 En términos de la TAD se denomina problema docente, a la problemática que se plantea el profesor, como tal profesor, cuando tiene que enseñar un saber matemático en la clase (Gascón, 1999; Barquero, Bosh y Gascón, 2013).

Marco teórico

El trabajo lo enmarcamos dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), iniciada por el investigador francés Yves Chevallard a finales de los años 1980. Esta teoría considera que toda actividad matemática es esencialmente una actividad de modelización. Propone, a su vez, la noción de organización matemática o praxeología como herramienta para describir tanto la actividad matemática como el producto de dicha actividad, enfatizando la relación dialéctica esencial entre “la praxis” y “el logos”. En este marco, “hacer matemática”, tal como lo afirma Bosch (2000), consiste en resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas -el saber hacer- de manera inteligible, justificada y razonada mediante el saber, lo que lleva a la construcción o reconstrucción de organizaciones matemáticas.

Por su lado, “enseñar y aprender matemáticas” hace referencia a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para dar respuestas a situaciones bajo ciertas condiciones. El rol del docente consiste en dirigir dicha reconstrucción, mientras que el aprendizaje puede verse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual o grupal. Se destaca también, desde la TAD la necesidad de conocer por lo menos algunas de sus razones de ser de los saberes a ser estudiados, que lo hacen socialmente dotado de sentido.

En este marco, Gascón (2011) plantea que, para abordar toda la complejidad de un problema de investigación en Didáctica de la Matemática, éste debe trascender los problemas profesionales abordando cuestionamientos desde tres dimensiones básicas: la dimensión epistemológica, la dimensión económica y la dimensión ecológica. La dimensión epistemológica incluye las cuestiones relativas a la naturaleza, funciones y razones de ser del objeto de estudio. La dimensión económica abarca cuestiones sobre la forma de organizar, interpretar y enseñar una obra matemática en la institución donde se plantea el problema. La dimensión ecológica comprende las cuestiones relativas a las condiciones que mantienen las organizaciones matemáticas y didácticas vigentes y a las restricciones que inciden sobre los posibles cambios de las mismas en una dirección determinada.

En esta comunicación sintetizamos el trabajo realizado en la dimensión epistemológica del problema de investigación, planteando cuestiones que guían el análisis

y proponiendo indicadores para repensar el estudio de la congruencia de triángulos en IFP.

Un modelo epistemológico de referencia para la congruencia de triángulos: la dimensión epistemológica del problema didáctico

Una hipótesis básica de la TAD es la relatividad institucional de los saberes y, consecuentemente, la inexistencia de posiciones epistemológicas universales. Por consiguiente, consideramos ineludible, por parte del investigador, la construcción explícita de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) del ámbito de la actividad matemática implicada en el problema de investigación, en nuestro caso un modelo de **O** en IFP (Bosh y Gascón, 2005, 2007, Gascón, 2011). Este MER se constituye en una hipótesis de trabajo que permite disponer de un lugar “propio” desde donde mirar las distintas instituciones involucradas en el problema sin asumir acríticamente el punto de vista que viene dado desde alguna de ellas. Como tal, es provisional, permanentemente puesto a prueba a partir de su contraste con la realidad que se investiga. Su explicitación forma parte de la dimensión epistemológica del problema didáctico.

En el abordaje de la dimensión epistemológica distinguimos dos momentos centrales. En el primer momento desarrollamos un análisis descriptivo del lugar que ocupa la obra **O** en textos científicos y libros de texto. El segundo momento está marcado por la enunciación de cuestionamientos epistemológicos y la propuesta de respuestas tentativas a los mismos, las que se constituyen en principios de un posible MER en torno a **O** para IFP.

Para el primer momento tomamos como material empírico dos textos de indiscutible influencia en el desarrollo de la Matemática: Elementos de Euclides (aproximadamente 300 a.C.) y Fundamentos de la Geometría de Hilbert (1899) y cuatro libros de texto, vigentes en la enseñanza universitaria, seleccionados por presentar propuestas bastante disímiles respecto a **O**:

- Libro 1 (L1): Clemens, S. R., O'Daffer, P. G. y Cooney, T. J. (1989). Geometría: con aplicaciones y solución de problemas. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Libro 2 (L2): Pogorélov, A. (1974). Geometría elemental. [sn].

- Libro 3 (L3): Garguichevich, G. (2007). Geometría del plano y del espacio.
- Libro 4 (L4): Moise, E. E. (1968). Elementos de geometría superior. Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia Para el Desarrollo Internacional (AID).

Los indicadores que guían este análisis —que se fueron delimitando en paralelo al estudio de los textos— son: (a) Objetivo manifiesto por el autor. (b) Conjunto numérico utilizado. (c) Noción de congruencia de segmentos y ángulos. (d) Noción de congruencia de triángulos. (e) Criterios de congruencia de triángulos. A su vez, respecto de (c) los indicadores fueron: Estatus de la noción (primitiva o definida). Términos utilizados. Relación con las nociones de distancia, longitud y amplitud. Respecto a (e) los indicadores fueron: Explicitación de posibles razones de ser. Estatus y justificación.

En todos los textos estudiados **O** aparece como un saber no problemático, asociado a tareas bien definidas, ya que el objetivo de estos es reescribir obras matemáticas preexistentes para comunicarlas, ya sea a la propia comunidad científica o en instituciones de formación superior en forma de sistemas axiomáticos deductivos. Están desarrolladas en un “contexto de validación de los saberes” que implica tomar decisiones respecto a cuáles nociones y proposiciones serán las iniciales y cuáles se derivarán de ellas. En la mayoría de los casos la justificación de dichas decisiones permanece oculta al lector.

Principios que forman parte del MER propuesto para O

En el segundo momento, tomando como insumo el análisis descriptivo realizado en el primero, planteamos los siguientes interrogantes de corte epistemológico:

I1: ¿Por qué la congruencia (y en general el conocimiento geométrico y matemático) se presenta en sistemas axiomáticos deductivos?

I2: ¿Qué propiedades deben cumplir necesariamente los axiomas? ¿Qué propiedades son deseables? En particular, ¿qué determina el estatus de axioma o teorema de las afirmaciones geométricas en relación a la congruencia de triángulos?

I3: ¿Cuál sería una definición pertinente de congruencia de triángulos en IFP?

I4: ¿Es necesario distinguir entre las relaciones de congruencia e igualdad?

I5: ¿Cuál es la razón de ser de la noción de congruencia de triángulos y del establecimiento de los criterios?

I6: ¿Qué tipo de tareas matemáticas deberían formar parte de las obras que se estudian en IFP en relación con los llamados criterios de congruencia?

A continuación, sintetizamos respuestas tentativas a los interrogantes planteados que, como lo adelantamos, constituyen principios de un posible MER para IFP.

I1: ¿Por qué la congruencia (y en general el conocimiento geométrico y matemático) se presenta en sistemas axiomáticos deductivos?

El texto *Elementos* representa un gran aporte a la Matemática y a la ciencia en general, ya que propone la primera sistematización de los conocimientos geométricos existentes en el siglo III a.C. de tal manera que, a partir de unos pocos principios, los axiomas, se puedan deducir las proposiciones de toda una teoría.

Por su lado, Hilbert afirma la idea que el método axiomático deductivo es el “más seguro desde el punto de vista lógico” para caracterizar una teoría. “Todo lo que puede ser objeto del pensamiento matemático, *en cuanto esté madura la construcción de una teoría*, cae bajo el método axiomático y por lo tanto directamente dentro de la matemática” (como se cita en Kline, 1992, p.1354). Spivak (1978) a su vez, enfatiza su utilidad: “sintetizar un viejo saber en un reducido número de propiedades sencillas e inmediatas a partir de las cuales se obtendrá “un sorprendente número de diversos hechos” (p. 3).

Es indudable que el método axiomático deductivo permite presentar, de forma muy precisa, sintética y general, la estructura de las distintas áreas de la Matemática. Sin embargo, la presentación axiomática consiste en una reescritura formal de teorías cuyo proceso de construcción, a partir de cuestiones a resolver queda velada. Generalmente, este enfoque no da cuenta ni de las tareas problemáticas que están en su génesis, ni del uso que se hace o puede hacer de ellas; aspecto central de los saberes al pensar su enseñanza. En este sentido Chevallard (2013) afirma:

La ausencia del cuestionamiento de las obras y, en particular, de los saberes, en cuanto a sus razones de ser no permite, pues, más que una entrada ficticia en la cultura, y hace de las obras ídolos (del griego *eidos*, forma) que ciertas personas veneran (p. 107).

Consideramos que en la IFP deberían proponerse como cuestiones a estudiar, las potencialidades y limitaciones del método axiomático en la presentación del

conocimiento matemático, pensando en su transposición a instituciones de enseñanza. En particular es importante reconocer que, si bien *la deducción* es fundamental en la justificación de los saberes matemáticos, existen otros procedimientos que contribuyen a la construcción de dichos saberes.

I2: ¿Qué propiedades deben cumplir necesariamente los axiomas de un sistema axiomático? ¿Qué propiedades son deseables? En particular, ¿qué determina el estatus de axioma o teorema de las afirmaciones geométricas en relación a la congruencia de triángulos?

Todo sistema axiomático es consistente, esto es, de los axiomas no se deducen contradicciones (p y no p). Por otro lado, puede ser deseable, aunque no necesario —si se quiere contar con la menor cantidad posible de proposiciones iniciales— que los axiomas cumplan la propiedad de independencia, esto es, que ningún axioma se deduzca de los otros.

El hecho que algunas afirmaciones matemáticas se consideran axiomas en algunos textos científicos y teoremas en otros es arbitraria, acorde a los objetivos que persigue cada autor. Este aspecto de “convención” también está presente en las reconstrucciones de las obras matemáticas en instituciones de enseñanza. Por condicionamientos de diversa índole, tales como: metas educativas, restricciones de tiempo, complejidad, se toman decisiones que suelen quedar veladas no sólo para los potenciales estudiantes, sino incluso para los docentes que utilizan esas obras como material de guía para sus clases.

En la siguiente tabla (Tabla 1) sintetizamos el estatus dado a los criterios de congruencia de triángulos (nombrados clásicamente como LAL, LLL, ALA y LLA) en los textos analizados, evidenciando diferencias sustanciales entre ellos. En la tabla también incorporamos el llamado por Hilbert Axioma 5, “si dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se cumplen las congruencias: $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $BAC \cong B'A'C'$, entonces se cumplen también las congruencias $ABC \cong A'B'C'$ y $ACB \cong A'C'B'$. (Hilbert, 1899, p. 16)

	Euclides	Hilbert	L1	L2	L3	L4
Axioma 5	---	Axioma	---	---	---	---
Criterio LAL	Teorema	Teorema	Axioma	Axioma	Axioma	Axioma

Criterio LLL	Teorema	Teorema	Axioma	Teorema	Teorema	Teorema
Criterio ALA	Teorema	Teorema	Axioma	Teorema	Teorema	Teorema
Criterio LLA	---	---	---	---	Teorema	Teorema

Tabla 1: Estatus de los criterios de congruencia

En nuestro análisis observamos que:

- La intención de Euclides en *Elementos* es realizar una sistematización de los saberes geométricos de su época ordenándolos, clasificándolos y sistematizándolos, no explicitando algunas intuiciones iniciales, de carácter espacial, que forman parte de las deducciones.

- Hilbert por su parte, presenta un nuevo conjunto —en sus palabras “simple y completo” — de axiomas independientes entre sí para la Geometría Euclídea, y deduce a partir de ellos sus teoremas más importantes (Hilbert 1899, p. 1). En su sistema axiomático están presentes las propiedades de consistencia y particularmente de independencia de los axiomas geométricos. *Fundamentos de la Geometría* no está pensado como un texto para la enseñanza sino como un texto científico que — al eliminar las llamadas “lagunas lógicas” presentes en Euclides— aporta a solucionar problemas de fundamentación de la matemática de la época.

- En L1, el autor pone en evidencia su decisión en relación al sistema axiomático adoptado desde el título del texto: *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*. Su objetivo es utilizar proposiciones matemáticas como una “caja de herramientas” disponibles para la resolución de problemas, es decir, su foco se centra en la utilidad de los saberes geométricos sin “perder tiempo” en deducir los criterios de congruencia de triángulos, los que aparecen con estatus de axiomas.

- En L2, L3 y L4, el propósito de cada autor es elaborar un texto de Geometría elemental para la enseñanza superior enfatizando su justificación. Vale destacar que sólo en L4 los autores proponen una explicación metamatemática en relación a la elección de un criterio de congruencia como axioma y los demás como teoremas.

Estas distintas decisiones ponen en evidencia la relatividad institucional de las obras matemáticas. Resaltamos que esta relatividad debería ser considerada en IFP, en vez de naturalizarse la existencia de una única forma de concebir los saberes. Esto requeriría desarrollar procesos de estudio que promuevan, por parte de los estudiantes del profesorado, actitudes críticas sobre el estatus de las afirmaciones matemáticas atendiendo a objetivos institucionales, en particular a los objetivos de estudio en la escuela secundaria.

I3: ¿Cuál sería una definición de congruencia de triángulos pertinente en IFP?

En primer lugar, consideramos importante tratar críticamente la noción de congruencia de segmentos y ángulos, distinguiendo dos enfoques:

- El enfoque euclidiano toma al sistema de los números naturales como sistema numérico de base para la construcción del sistema geométrico, aunque asume implícitamente la idea de *magnitud continua* (lo que en el desarrollo científico se va a modelizar muy posteriormente concibiendo el sistema de los números reales). La noción de congruencia de segmentos y de ángulos será primitiva, caracterizada axiomáticamente como una relación de equivalencia que cumple además otras propiedades. Esta caracterización axiomática se origina en la idea intuitiva de movimientos rígidos del plano y superposición de figuras. En este texto también aparece la idea de continuidad.

- El enfoque métrico toma al sistema de los números reales como sistema de base para la construcción del sistema geométrico. Aquí la congruencia de segmentos se define a partir de la noción de longitud de segmentos la que, a su vez, puede ser primitiva (decisión adoptada por ejemplo en L3) o definida (como por ejemplo en L4) a partir de la noción primitiva de distancia entre puntos. A su vez, estas nociones se originan en el proceso efectivo de comparar cantidades y la noción de unidad de medida. Algo análogo pasa con las nociones de congruencia de triángulos y medida angular. Las caracterizaciones axiomáticas involucradas en ambos casos no son nada triviales, responden a procesos de reflexión profundos para plasmar en pocas afirmaciones procesos complejos.

Consideramos que el estudiante en IFP debiera conocer y comparar distintos enfoques axiomáticos, analizar su origen y las potencialidades y limitaciones de tales enfoques en los procesos de estudio en la escuela secundaria.

En relación con la congruencia de triángulos, en el siguiente cuadro (Tabla 2) sintetizamos las definiciones expuestas en los textos analizados.

	Caracterización de congruencia de triángulos
Euclides	No hay ninguna referencia anterior a la proposición 4 en la que se establecen condiciones mínimas para que dos triángulos “resulten iguales”.
Hilbert	Se dice que un triángulo ABC es congruente con el $A'B'C'$, cuando se verifican todas las congruencias: $AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C', \hat{A} \cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'}$. (p.17)

L1	Una correspondencia entre vértices, ángulos y lados, de manera tal que cada par de lados y ángulos correspondientes sean congruentes. (p.85)
L2	Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se llaman iguales, si se tiene: $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ y $AC = A_1C_1$ (p.24)
L3	Dos triángulos son congruentes si y sólo si son congruentes todos sus lados y sus ángulos homólogos. (p. 54)
L4	Sean los triángulos ABC y DEF y una correspondencia uno a uno, $ABC \leftrightarrow DEF$ entre sus vértices. Si cada par de lados correspondientes y cada par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una congruencia. Si $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia, entonces se escribe $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. (p.119)

Tabla 2: Definiciones de congruencia

Tanto Hilbert como L2 establecen implícitamente una correspondencia entre vértices a partir de la notación dada. L1 y L4 consideran que dos triángulos son congruentes si existe *alguna* biyección entre sus vértices tal que los ángulos y segmentos que se corresponden resulten congruentes. Mientras que L3 habla de elementos “que se corresponden” sin indicar de qué correspondencia se está hablando.

Al pensar en una definición pertinente en la IFP, acordamos con lo que proponen L1 y L4. Consideramos que al hablar en estos términos se eliminan ambigüedades, al hablar de lados homólogos o lados correspondientes, sin haber establecido previamente ninguna correspondencia biyectiva.

I4: ¿Es necesario distinguir entre las relaciones de congruencia e igualdad?

En relación a los libros analizados podemos sintetizar que:

- Euclides no utiliza la expresión congruente, sino que emplea la expresión “igual” para indicar esta relación entre distintos elementos geométricos como segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, etc.
- Hilbert caracteriza la relación de congruencia entre segmentos y entre ángulos axiomáticamente. Al comienzo del apartado que llama *El grupo de axiomas III: axiomas de congruencia*, el autor expone la siguiente explicación: “Los segmentos están entre sí en ciertas relaciones, para cuya descripción sirven las palabras congruente o igual” (p. 13), en principio tratando los dos términos como sinónimos. Sin embargo, al enunciar los criterios de congruencia de triángulos emplea el término “congruente” y el signo “ $\cong$ ”.

- En L1 el autor utiliza el término “igual” para referirse a la relación de congruencia entre segmentos, triángulos o ángulos.
- En L2 el autor emplea la expresión “congruente” para referirse a la relación entre segmentos, triángulos o ángulos.
- En L3 se utiliza el término “congruente”, explicitando que la palabra “congruente” no significa “igual” dando a modo de ejemplo: “dos segmentos son iguales si y sólo si están constituidos por los mismos puntos del plano, es decir son iguales como conjuntos de puntos” (p. 42).
- En L4 los autores dedican un apartado para establecer el alcance del término igual y exponen un fundamento de por qué se utiliza la palabra congruente para referirse a la relación de equivalencia básica en Geometría.

Consideramos que en IFP deben ponerse a discusión ambigüedades relativas a las relaciones de igualdad y congruencia, presentes en distintos textos. En particular es interesante considerar el punto de vista de L4 cuando se propone utilizar estrictamente el término *congruencia* para indicar lo que se denomina “la relación de equivalencia básica en geometría”, ya que emplear la palabra igual puede llevar a dificultades que se podrían evitar.

I5: ¿Cuál es la razón de ser de la noción de congruencia y del establecimiento de los criterios?

Tal como lo señala Chevallard (2013) el conocimiento de un saber no se da si no se conoce su utilidad y sus usos. “Lo que un saber permite comprender y lo que un saber permite hacer al comprenderlo constituye su utilidad; así pues, la utilidad de un concepto es su capacidad para equipar el pensamiento y la acción” (p. 101). De modo que, es necesario frente a un saber, conocer por lo menos algunas de sus posibles razones de ser, que lo hacen *socialmente dotado de sentido*.

Chevallard (2013) menciona que si bien en los años 2000 en la educación secundaria francesa se reincorporan como tema de estudio los criterios de congruencia (ausentes desde la “reforma de la matemática moderna” en la década de 1960) se han perdido sus posibles razones de ser. Sin embargo, en libros de texto previos a dicha reforma, se pueden encontrar apartados donde se explicita su utilidad, como por ejemplo para demostrar que dos segmentos miden lo mismo o que dos ángulos miden lo mismo (p.101). En palabras de Chevallard “los casos de isometría son las herramientas de cierta “fontanería” matemática la cual sin ellos debería apelar a otras herramientas” (p.103). Por ejemplo, para demostrar que *los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes*: Dado el paralelogramo $ABCD$, al trazar la diagonal AC , la correspondencia $A \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow A$ determina una congruencia entre triángulos (criterio ALA, lado común y congruencia de ángulos correspondientes

entre paralelas) utilizando solamente la definición de paralelogramo como cuadrilátero con lados opuestos paralelos. El establecimiento de la congruencia permite afirmar que $AD \cong BC$ y $AB \cong DC$.

Sin desmedro de considerar como posible razón de ser de los criterios de congruencia de triángulos el problema de analizar la existencia y unicidad de construcciones bajo ciertas condiciones, consideramos importante en IFP rescatar la posición de Chevallard (la que se plantea claramente en L1 pero queda relegada a un segundo plano en los otros textos analizados), que recupera como razón de ser de los criterios de congruencia su utilidad en el establecimiento de igualdad de medidas entre segmentos y/o ángulos.

I6: ¿Qué tipo de tareas matemáticas deberían formar parte de las obras que se estudian en IFP en relación con los llamados criterios de congruencia?

Proponemos dos grandes tipos de tareas:

T1: (a) Planteo de cuestiones problemáticas que se constituyen en razones de ser de los criterios, rescatando su utilidad para proponer respuestas a dichas cuestiones. El ejemplo mencionado arriba plantea una situación problemática en la que no aparecen triángulos, sin embargo, la técnica consiste en elegir triángulos adecuados y establecer su congruencia vía un criterio. Este trabajo genera nueva información que permite dar respuesta a la cuestión planteada. (b) Comparación de este tipo de tareas con las tareas escolares prototípicas en la enseñanza secundaria: Determinar congruencia entre dos triángulos dados y construir triángulos congruentes a uno dado.

T2: Independientemente que los estudiantes de IFP tengan conocimiento o no del enunciado de los criterios, explorar condiciones suficientes mínimas para establecer la congruencia entre dos triángulos, lo que lleva a enunciar los criterios en principio, en carácter de conjeturas a partir de un trabajo que involucra la exploración de casos particulares, la experimentación con instrumentos geométricos (regla, escuadra, compás, transportador), la visualización utilizando software geométrico, la imaginación espacial y la inducción.

Conclusiones

En esta comunicación presentamos parte de un trabajo de investigación en torno a la obra matemática *congruencia de triángulos* en la *Institución de la Formación inicial del Profesorado en Matemática*. Partimos de un problema de la

profesión docente: ¿Qué, por qué, para qué y cómo enseñar Geometría en la escuela secundaria? ¿Cómo superar el monumentalismo imperante en el estudio de la Geometría en la escuela?

Siguiendo a Gascón (2011) describimos cuestiones que forman parte de la dimensión epistemológica del problema, cuyo abordaje nos permitió proponer rasgos característicos de un MER en torno a la congruencia de triángulos en relación con la naturaleza, funciones y razones de ser de $\triangle$ en IFP. Desde este modelo desnaturalizamos el punto de vista tradicional de la enseñanza de este saber, muy cercano a las caracterizaciones axiomáticas vigentes en el ámbito científico.

Hemos puesto en evidencia, además, que no hay una forma universal de presentar la noción de congruencia y los criterios de congruencia para triángulos; lo que habilita a pensar que lo establecido en la enseñanza actual se puede cuestionar y modificar en función de los objetivos institucionales de dicho estudio.

Bibliografía

- Barquero, Berta, Bosch, Marianna y Gascón, Josep** (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(3), 307-338.
- Bosch, Marianna** (2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Universidad de Huelva Publicaciones. <https://www.seiem.es/docs/actas/04/Actas04SEIEM.pdf>
- Bosch, Marianna y Gascón, Josep** (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Coords.), *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp. 107-122). La Pensée Sauvage.
- Bosch, Marianna y Gascón, Josep** (2007). 25 años de transposición didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Yves** (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Libros del Zorzal.

- Chevallard, Yves** (2015). *Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm*. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.
- Clemens, Stanley, O'Daffer, Phares y Cooney, Thomas** (1989). *Geometría: con aplicaciones y solución de problemas*. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Euclides**. *Elementos* (1991). (Trad. Puertas Castaños, M.). Gredos.
- Garguichevich, Graciela** (2007). *Geometría del plano y del espacio*. UNR Editora.
- Gascón, Josep** (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 129-150). SEIEM.
- Gascón, Josep** (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(2), 203-231.
- Hilbert, David** (1991). *Fundamentos de la geometría* (Trad. Cebrián, F.). CSIC-CSIC Press.
- Kline, Felix** (1945). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Biblioteca matemática.
- Moise, Edwin y Downs, Floyd** (1968). *Elementos de geometría superior*. (Trad. García, M.). Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia Para el Desarrollo Internacional (AID).
- Pogorélov, Aleksei** (1974). *Geometría elemental*. [sn].
- Spivak, Michael** (1978). *Calculus*. Reverté.

Enseñanza de límite puntual. Una aproximación a la fertilidad de las consignas matemáticas

BIBIANA IAFFEI

bibiana.iaffei@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral (UNL) CONICET

ADRIANA FAVIERI

adriana.favieri@gmail.com

Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológica - Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM)

PATRICIA CAVATORTA

patricia.cavatorta@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral (UNL)

Resumen

El eje central de esta ponencia es la ‘fertilidad de las consignas matemáticas’ en la enseñanza de conceptos, como el límite puntual. Profundizamos en cómo una consigna fértil no sólo desafía intelectualmente, sino que también invita al estudiantado a una rica exploración conceptual. La investigación surge de una Tesis de Maestría en Didácticas Específicas, donde subrayamos la necesidad de consignas que trasciendan la mera accesibilidad, promoviendo un aprendizaje matemático que sea genuinamente significativo. Presentamos la reformulación de una consigna sobre límites puntuales, para transformarla en una herramienta de aprendizaje rica. Mostramos cómo desde lo propuesto en su enunciado se puede ampliar el nivel de Potencial Matemático (PM) y la Demanda Cognitiva (DC) requerida; haciendo surgir el uso de Tecnologías Digitales (TD) por necesidad y habilitando al tratamiento del concepto desde varios Registros de Representación (RR). Esto amplía las oportunidades para la exploración de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades de argumentación. Nuestro propósito es continuar promoviendo este enfoque que contribuye a la enseñanza de la matemática.

Palabras clave: consigna matemática / límite puntual / fertilidad / Cálculo I

Introducción

La construcción de conceptos matemáticos sienta sus bases en un terreno fértil, donde emergen conocimientos significativos. Un elemento clave es la cuidadosa formulación de consignas que orientan este proceso constructivo. Las consignas deben ser accesibles y enriquecedoras, permitiendo a las y los estudiantes beneficiarse de múltiples enfoques, conexiones, representaciones y razonamientos. Además, deben fomentar la interpretación y comunicación de ideas matemáticas, profundizando el entendimiento y ampliando los repertorios conceptuales relacionados con el tema.

En la presente ponencia, se examina y propone una reformulación de una consigna específica sobre el límite puntual de funciones reales de una variable real. El objetivo de la reformulación es potenciarla para que promueva un aprendizaje matemático más profundo y significativo. Este enfoque se centra en el concepto de ‘fertilidad’ de las consignas matemáticas, término elaborado en la investigación realizada en una Tesis de la Maestría en Didácticas Específicas. Dicha investigación tenía como meta evaluar la efectividad de las consignas matemáticas en la enseñanza de límites puntuales, según se presentan en los materiales didácticos recomendados para la asignatura Cálculo I del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral (UNL).

Marco teórico

Las consignas son los vehículos a través de los cuales se presentan las tareas matemáticas en el aula (Barreiro *et al.* 2016). Estas no sólo implican la aplicación de procedimientos y estrategias, sino también el uso de definiciones matemáticas y la modelización de fenómenos. Para evaluar una consigna matemática, consideramos su Potencial Matemático (PM), la Demanda Cognitiva (DC) que impone, la influencia de las Tecnologías Digitales (TD) en su resolución y los Registros de Representación (RR) aplicables, que aclaramos a continuación.

El PM de una consigna matemática depende de las posibilidades de exploración que habilita y de la capacidad para argumentar sobre la validez de la resolución o respuesta ofrecida. En otras palabras, una consigna potencialmente rica no sólo

presenta un problema a resolver, sino que también invita al estudiante a investigar diferentes enfoques y a justificar sus decisiones (Barreiro y Rodríguez, 2014, Barreiro *et al.* 2016). La exploración implica investigar diversas vías y estrategias para abordar el problema, sin necesidad de demostrar la validez de cada paso o resultado obtenido. La argumentación se centra en fundamentar las decisiones tomadas durante la resolución, presentando razonamientos coherentes y evidencias.

Barreiro *et al.* (2016) establecen criterios de redacción de consignas para promover la riqueza matemática en las resoluciones, entre los que se destacan:

- Evitar imprecisiones o incompletitudes en la redacción.
- Contextualizar las preguntas si se describe una situación real.
- No informar sobre la existencia o unicidad de lo buscado.
- Evitar instrucciones directas; en cambio, fomentar la argumentación.
- Solicitar explicaciones sobre por qué se descartan opciones (en opción múltiple).

Según Smith y Stein (1998) el término DC refiere al nivel de pensamiento que es requerido para abordar y resolver una tarea con éxito. Consideran cuatro niveles:

- Tareas de memorización (TM). Implican reproducción de fórmulas, reglas o definiciones sin la necesidad de aplicar un procedimiento. No hay conexión con los conceptos o significados.
- Tareas de procedimiento sin conexión (TPSC). Son algorítmicas, implican procesos rutinarios. Buscan la producción de respuestas correctas y no fomentan la comprensión profunda. Solicitan describir el procedimiento utilizado.
- Tareas de procedimiento con conexión (TPCC). Los enunciados matemáticos deben guiar al estudiante hacia procedimientos generales que estén estrechamente vinculados con los conceptos subyacentes. Para una comprensión completa, es esencial trabajar con diferentes representaciones y aplicar los procedimientos de manera consciente, utilizando los conceptos matemáticos pertinentes.
- Tareas para producir matemáticas (TPM). Requieren un enfoque de pensamiento complejo y creativo, sin seguir algoritmos preestablecidos. La solución no se basa en métodos conocidos, sino que exige una exploración detallada y comprensión de los conceptos matemáticos implicados, así como el uso de conocimientos pertinentes y la consideración de restricciones que pueden influir en las estrategias de resolución.

Las TM y TPSC tienen una baja DC, ya que implican la memorización y reproducción de información sin permitir la exploración ni la argumentación. En cambio, las TPCC y TPM representan un salto cualitativo en las exigencias cognitivas, porque habilitan exploración y búsqueda de fundamentos para respaldar la resolución.

Por otro lado, los RR semióticos propuestos por Duval (2006) son esenciales para la expresión y comunicación de conceptos matemáticos. Las consignas pueden ser formuladas o resueltas usando distintos RR, ya sea individualmente o en combinación, fomentando así la comprensión desde múltiples perspectivas. Cada RR ofrece una visión única del objeto matemático, con sus propias ventajas y limitaciones. La interacción entre los distintos RR en la resolución de una consigna es esencial para la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. El trabajo dentro de un RR se denomina tratamiento y el cambio de un RR a otro se denomina conversión. La elección de un RR adecuado es importante en la resolución de consignas, pero también lo es la flexibilidad para cambiar de RR cuando la resolución lo requiere.

Blázquez y Ortega (2001) describen el concepto de límite, fundamentado en la función, a través de cuatro registros de representación: verbal, numérico, gráfico y algebraico. Cada registro ofrece una perspectiva única para abordar el límite puntual:

- Registro de Representación Verbal (RRV). Utiliza el lenguaje cotidiano para explicar cómo los valores de una función se tienden al límite en la vecindad de un punto específico (c).
- Registro de Representación Numérico (RRN). Emplea tablas de valores para mostrar la tendencia de la función hacia el límite cerca del punto de interés (c).
- Registro de Representación Gráfico (RRG). Visualiza el límite como un punto en el eje de ordenadas, tal que a todo segmento sobre este eje que lo contiene (sin ser uno de sus extremos) le corresponde otro (sobre el eje de abscisas) que contiene al punto de interés (c). Para cada punto de este último segmento (excepto el mismo c y sus extremos), le corresponde un punto (la imagen de la función) del segmento del eje de ordenadas.
- Registro de Representación Algebraico (RRA). Incluye:
 - el uso de la definición métrica en los términos usuales de ε y δ , que son los controles de las aproximaciones o la definición topológica de entornos.
 - el trabajo con expresiones algebraicas equivalentes para valores distintos del punto de interés (c) y el cálculo del límite o la determinación de su inexistencia.
 - la notación de límite para expresarlo.

Hitt (2003) destaca la influencia del avance tecnológico y la capacidad de graficar en computadoras y calculadoras en el estudio de las representaciones matemáticas de un concepto en construcción. Barreiro *et al.* (2016) proponen criterios de pertinencia y significatividad (CPS) del uso de TD en la resolución de consignas matemáticas. Recuperamos los principales.

- CPS A: Promover la búsqueda genuina de pruebas matemáticas, permitiendo comprender y justificar por qué la respuesta proporcionada por la TD es válida.
- CPS B: Considerar esencial el uso de TD, si las ideas matemáticas fundamentales no son claras sin estas, aunque la tarea pueda resolverse con lápiz y papel.
- CPS C: Mantener el foco en el objetivo matemático, priorizando el contenido matemático sobre el recurso tecnológico.
- CPS D: Permitir la elección autónoma de recursos tecnológicos y plataformas, así como la búsqueda de bibliografía adicional.

En concordancia con lo planteado por Barreiro *et al.* (2016), si se cumplen los criterios B y C, la valoración del uso de TD es positiva, y el cumplimiento de los demás la enriquece. Si no se cumplen estos dos criterios, la valoración es negativa.

GeoGebra es reconocido en el ámbito de la Educación Matemática como un recurso valioso para la construcción de los conceptos, a partir de propuestas que permitan explorar en múltiples RR. Según Arteaga *et al.* (2019) GeoGebra proporciona:

- Cuatro vistas diferentes para cada objeto matemático: gráfica, numérica, algebraica y de hoja de cálculo.
- Tres representaciones distintas para apreciar los objetos matemáticos: gráfica (puntos, gráficos de funciones), algebraica (coordenadas de puntos, ecuaciones) y en celdas de hoja de cálculo.
- Vinculación dinámica entre las representaciones, donde los cambios en una se reflejan automáticamente en las otras.

Con base en los fundamentos teóricos previos, postulamos que la ‘fertilidad de una consigna matemática’ contempla tanto su Potencial Matemático como la Demanda Cognitiva inherente a su resolución. Esta fertilidad se manifiesta en las posibilidades de exploración y argumentación que la consigna promueve, mediante el uso de distintos Registros de Representación; que pueden verse influenciadas por el uso de Tecnologías Digitales disponibles. La convergencia de estos componentes otorga a la consigna una fertilidad intrínseca, que emana de su complejidad matemática y de las habilidades procedimentales y cognitivas que exige.

Metodología

La consigna objeto de este estudio fue seleccionada junto con otras diecisiete para el análisis en la investigación de la tesis, siguiendo criterios metodológicos

preestablecidos. La naturaleza de la investigación fue cualitativa, caracterizada por la obtención de datos a través de un análisis interpretativo descriptivo. Según Hernández *et al.* (2010), “las *investigaciones cualitativas* se basan más en una lógica y proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general” (p. 8) y se enfocan en “comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto” (p. 358).

La investigación se contextualizó en la recuperación de los materiales didácticos recomendados para la asignatura Cálculo I del Profesorado en Matemática de la UNL. El objetivo fue evaluar la efectividad de las consignas matemáticas para la enseñanza de límites puntuales (propuestas en dichos materiales), cuando el estudiantado aún no está familiarizado con las técnicas de cálculo de límites ni con la definición métrica de los mismos. Esto se fundamenta en que desde la cátedra de Cálculo I se propone una enseñanza que va desde lo exploratorio conjetural y la detección de aspectos relativos al concepto, hacia la formalización de la definición y las estrategias de cálculo.

El proceso investigativo se desarrolló en varias fases, que incluyeron:

- La selección de consignas sobre límite en textos sugeridos en la asignatura Cálculo I.
- Un análisis exhaustivo de estas consignas utilizando el instrumento ‘Grillas de escaneo’, el cual se alinea con los indicadores propuestos en el marco teórico, y la elaboración de posibles soluciones tanto con el uso de GeoGebra —una TD accesible— como sin ella.
- La extracción de conclusiones y evaluación de la ‘fertilidad’ de las consignas.
- La reformulación de ciertas consignas basada en los hallazgos observados.

Por las razones antes expuestas el análisis de la consigna estudiada contempla que la misma se incorporaría cuando el estudiantado aún no está familiarizado con las técnicas de cálculo de límites ni con la definición métrica de los mismos.

La consigna y su análisis

Procederemos a examinar la consigna seleccionada para este estudio, específicamente el ejercicio 18 de la sección 2.2, extraído de la obra ‘Cálculo: conceptos y contextos’ de James Stewart (2010). Esta consigna ha sido elegida por su relevancia para ilustrar posibles modificaciones practicables para elevar su fertilidad.

Ejercicio 18 (pág. 103)
 Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales).

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$$

$x = 0; -0,5; -0,9; -0,95; -0,99; -0,999; -2; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$

Imagen 1: Consigna estudiada

Escaneo de la consigna y apreciaciones sobre el enunciado

Presentamos a continuación el análisis detallado de la consigna utilizando el instrumento ‘Grilla de escaneo’. Es importante señalar que las selecciones realizadas se fundamentan en una evaluación crítica del enunciado, en las resoluciones potenciales desarrolladas y en las conclusiones derivadas de este proceso.

Sobre			Se cumple			N/C	Observación
			NO	Parcial	SI		
La redacción		C1: Enuncia de forma precisa y completa			X		
		C2: Formula preguntas en el contexto real				X	
		C3: Evita proporcionar información sobre la existencia y/o unicidad de la solución.			X		
		C4: Proporciona los procedimientos a seguir			X		
		C5: Solicita argumentos	X				
		C6: Requiere justificar la selección en caso de opciones múltiples				X	
Los registros de representación	Tipo/s de registro/s desde los que sugiere resolver	Verbal	X				No sugiere
		Numérico			X		
		Gráfico	X				No sugiere
		Algebraico	X				No sugiere
	Tipos de transformaciones	¿Permite tratamiento?			X		
		¿Admite o pide conversión?	X				
Las posibilidades de exploración y argumentación		¿Es necesario explorar distintas posibilidades?		X			
		¿Da lugar a la argumentación o justificación?	X				
La demanda cognitiva que requieren		T Memorización	X				
		T Proced. Sin Conexión			X		
		T Proced. Con Conexión	X				
		T Producción Mat.	X				
El uso de GeoGebra		¿Es posible resolverla utilizando el software?			X		
		¿Enriquecería el trabajo matemático?			X		

	¿Permitiría trabajar con más registros de representación?			X		
	¿Cambiaría la demanda cognitiva señalada?		X			

Tabla 1: Escaneo de la Consigna estudiada

El procedimiento de resolución es impuesto: “evaluar la función” (con la cantidad de cifras decimales a considerar). Además, se indica en qué números evaluar, por lo que no existe posibilidad de exploración libre, da lugar a una exploración direccionada. No habilita a la toma de decisiones en relación al RR en el cual trabajar, se impone el RRN.

No da lugar a la argumentación ya que solicita que intuya a partir de los datos obtenidos al evaluar la función en los valores que se indican. Quien resuelve esta consigna, explora en forma direccionada y no argumenta, sólo aplica un procedimiento impuesto y a partir de ello conjetura que el límite no existe.

Possible resolución con lápiz y papel

Como se impone evaluar la función en los números dados para intuir el valor del límite planteado, al resolver con lápiz, papel y calculadora sólo es posible trabajar desde un RRN. Quien resuelve puede realizar tablas como las de la Imagen 2 y establecer que el límite no existe dado que conforme x tiende a -1 , tanto por derecha como por izquierda, las imágenes de la función no se aproximan a un número.

x	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$		x	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$
0	0		-2	2
-0.5	-1		-1.5	3
-0.9	-9		-1.1	11
-0.95	-19		-1.01	101
-0.99	-99		-1.001	1001.0000000002
-0.999	-999			

Imagen 2: Tablas de evaluación de la función en valores próximos a -1

Aportes si se resuelve con GeoGebra 5.0. Fundamentación de la inexistencia del límite desde distintos RR

Cuando se ingresa en el renglón de entrada la ley de la función se observa lo mostrado en la Imagen 3.

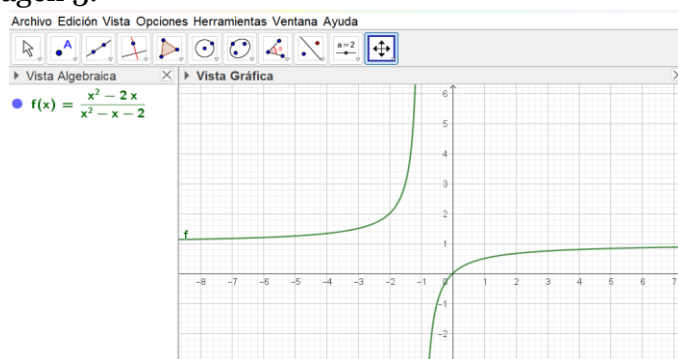


Imagen 3: Vistas Algebraica y Gráfica de GeoGebra 5.0 al ingresar la ley de f

A partir de lo presentado en la Vista Gráfica puede inferirse que esta función racional no está definida en $x = -1$, presentando una asíntota vertical (vale aclarar que se muestra una curva continua en $x = 2$ aunque no lo es). Este es un posible argumento para indicar la no existencia del límite propuesto desde un RRG. Otros argumentos son los que se exponen a continuación, con abordajes desde otros RR simultáneamente (cuestiones a considerar en la reformulación de una consigna más fértil).

Considerando que la consigna solicita explícitamente evaluar la función en valores de x dados, quien resuelve puede acudir a la Hoja de Cálculo y realizar en paralelo la evaluación de la función en dichos valores. Y así generar una lista de puntos que pueden observarse tanto en la Vista Algebraica como en la Vista Gráfica (ver Imagen 4). Además, es posible evaluar la función rápidamente en muchos más valores utilizando el arrastre en la hoja de cálculo.

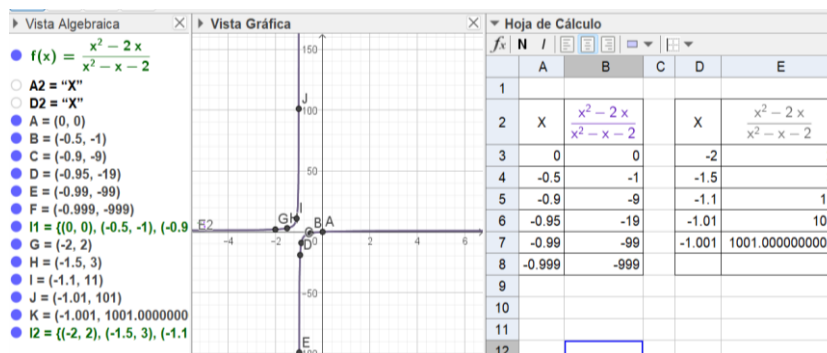


Imagen 4: Vista Algebraica, Gráfica y Hoja de cálculo al ingresar la ley de f

Ingresando en el renglón de entrada “simplificar(f)” aparece en la Vista Algebraica $g(x) = \frac{x}{x+1}$, y su gráfica coincide con la de f (aunque sabemos que ello no sucede en $x = 2$, cuestión interesante a considerar en la reformulación de la consigna). Esto habilita a analizar el límite propuesto haciendo uso de la ley de g , y deduciendo que cuando x tiende a -1 el numerador de la expresión tiende a -1 , sin embargo del denominador tiende a tomar valores cada vez más cercanos a cero, positivos y negativos, cuando $x > -1$ y $x < -1$ respectivamente.

Aportes si se resuelve con GeoGebra Suite. Identificación de otro punto de interés para analizar el límite de la función

Además, de poder realizar un trabajo similar al presentado con GeoGebra 5.0, esta versión permite observar otras cuestiones. En la Vista Gráfica se puede identificar que la función presenta una asíntota vertical de ecuación $x = -1$ y que sucede algo particular en $x = 2$ o en las proximidades de este valor, dado que muestra un señalamiento especial (ver Imagen 5).

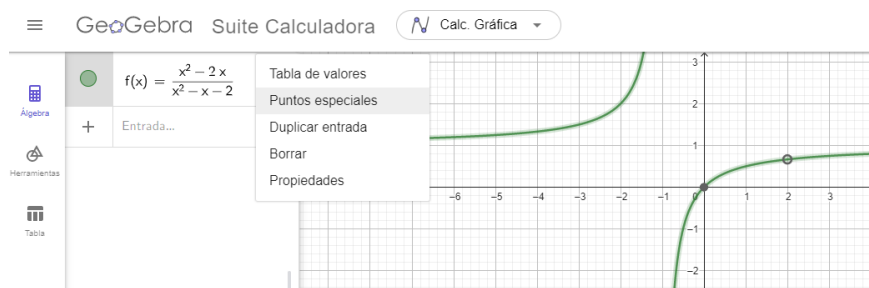


Imagen 5: Vista Algebraica y Gráfica de GeoGebra Suite al ingresar la ley de f

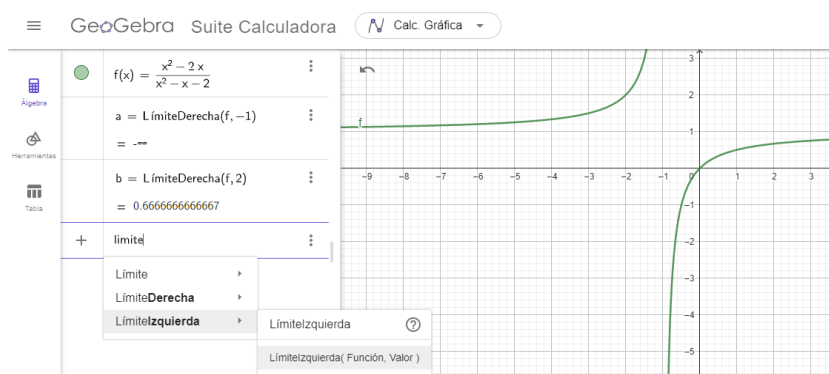


Imagen 6: Límites laterales en la Vista Algebraica de GeoGebra Suite para f

Además, pueden calcularse los límites laterales directamente como se muestra en la Imagen 6 (también se puede con GeoGebra 5.0).

Conclusiones parciales y posibles modificaciones del enunciado

Por lo expuesto consideramos que si se resuelve con lápiz, papel y calculadora la consigna tiene un PM pobre y es una TPSC, dado que su resolución exitosa no necesariamente conduce a una discusión profunda sobre el concepto matemático en cuestión.

Por otro lado, la utilización de GeoGebra enriquece el proceso al permitir trabajar con tres registros de representación: numérico (RRN), gráfico (RRG) y algebraico (RRA). Esto no sólo facilita la construcción de argumentos más sólidos sobre la inexistencia del límite propuesto, sino que también promueve una exploración más amplia y estimula la consideración de diferentes métodos de resolución. Además, posibilita la identificación de otros valores de x que para los cuales sería interesante realizar un análisis. Para lograr esto, es necesario modificar la consigna.

Consideramos que si se modifica el enunciado de manera que se solicite el análisis de la existencia del $\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$ ($a \in \mathbb{R}$) justificando lo hallado, puede transformarse en una TPCC y, por ende, aumentar su PM. En este caso, al dejar abiertas las posibilidades de exploración (ya que a puede ser cualquier número real) no es posible hacerlo en forma exhaustiva desde un RRN. En este caso es probable que quienes resuelvan opten por usar el software. Asimismo, es factible que focalicen las exploraciones y argumentaciones (desde distintos RR) para los casos $a = -1$ y $a = 2$, lo cual contribuiría a una mayor fertilidad de la consigna.

La consigna reformulada

En respuesta a las consideraciones detalladas previamente, hemos reformulado la consigna original. Ambas versiones, la inicial y la modificada, se exhiben en la Imagen 7 para facilitar la comparación visual de los cambios implementados.

Para enriquecer la consigna consideramos que la misma debía: evitar direccionar los procedimientos y respuestas; solicitar comunicación de los procesos realizados o afirmaciones hechas y extender el alcance del estudio, ampliando a más casos.

Consigna original	Consigna reformulada
Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$ $x = 0; -0,5; -0,9; -0,95; -0,99; -0,999; -2; -1,5; -1,1; -1,01; -1,001$	Para cualquier número real a, analice la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$ y explique las razones por las que arriba a esas conclusiones.

Imagen 7. Consigna original y consigna reformulada

Conclusiones finales

En conclusión, la consigna matemática sobre el límite puntual que hemos examinado y reformulado ilustra de manera ejemplar cómo la fertilidad de un problema no solo reside en su PM y la DC, sino también en cómo estos se entrelazan con los RR y el uso de TD.

Hemos visto que al enriquecer la consigna considerando los tres aspectos señalados, el uso del GeoGebra puede surgir como necesidad por parte del estudiante y al mismo tiempo favorecer el uso de distintos registros de representación. De esta manera podemos amplificar las oportunidades para que las y los estudiantes exploren conceptos matemáticos profundos y desarrollen habilidades de argumentación. Esta sinergia entre componentes es lo que verdaderamente potencia la fertilidad de una consigna, permitiendo que las y los estudiantes no solo comprendan al límite puntual en un sentido procedimental, sino que también aprecien distintos aspectos del concepto a partir de la manifestación de la coherencia entre varios RR.

Nuestro propósito es continuar promoviendo este enfoque de la enseñanza de la matemática basado en la fertilidad de las consignas en este y otros temas.

Bibliografía

- Arteaga, Eloy, Medina, Juan y Del Sol Martínez, Jorge** (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Revista Conrado*, 15(70), 102-108.
- Barreiro, Patricia y Rodríguez, Mabel** (2014). Análisis del potencial matemático de consignas para clases de Matemática. *V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática*, Universidad Nacional del Litoral.
- Barreiro, Patricia, Leonian, Paula, Marino, Tamara, Pochulu, Marcel y Rodríguez, Mabel** (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.
- Blázquez, Sonsoles y Ortega, Tomás** (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME*, 4(3), 219-236.
- Duval, Raymond** (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.
- Hernández, Roberto, Fernández, Carlos y Baptista, Pilar** (2010). *Metodología de investigación*. MC Graw Hill.
- Hitt, Fernando** (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-224.
- Smith Margaret y Stein, Mary** (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-350.
- Stewart, James** (2010). *Cálculo: Conceptos y contextos*. Thomson.

Análisis de clasificaciones y definiciones de cuadriláteros en libros para la formación docente

CECILIA LASPINA

cecilaspina@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.

DIANA GIULIANI

digi@sinectis.com.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

SILVIA BERNARDIS

silvia.bernardis@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.

Resumen

En esta ponencia presentamos un avance de una tesis de Maestría en Didácticas Específicas de la Universidad Nacional del Litoral, que persigue como objetivo general explorar y analizar el proceso de elaboración de clasificaciones y formulación de definiciones por parte de futuros docentes.

Para fundamentar el diseño de una propuesta de enseñanza a partir de la cual se construye información que se analiza para responder a tal objetivo, se realizó un análisis de libros utilizados en la formación docente, centrado en la forma en que estos materiales abordan las clasificaciones y definiciones de cuadriláteros. A partir de dicho análisis se observa que prevalecen en los libros el paralelismo de los lados como criterio principal de clasificación y las definiciones presentadas de manera única y acabada.

Palabras clave: geometría / formación docente / clasificaciones / definiciones / cuadriláteros

Introducción

El presente trabajo está enmarcado dentro del Proyecto de Investigación CAI+D 2020 “Análisis de la producción de significado en el marco de procesos de modelización en clases de matemática”, que dirige la Dra. Sara Scaglia y se desarrolla en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral y es parte de la Tesis de Maestría en Didácticas Específicas de Cecilia Laspina, dirigida por las docentes Diana Giuliani y Silvia Bernardis, que persigue como objetivo general explorar y analizar el proceso de elaboración de clasificaciones y formulación de definiciones por parte de futuros docentes.

Si bien está muy presente la creencia de que, en matemática en su carácter de ciencia exacta, existe sólo una forma correcta de definir los objetos y relaciones que estudia, la matemática en tanto construcción social, admite sin embargo una diversidad de posibles definiciones de un mismo concepto, igualmente válidas.

La investigación realizada surge a partir de la necesidad de que los estudiantes de profesorado de nivel superior, exploren y construyan conocimientos por sí mismos, en particular definiciones y clasificaciones de los objetos geométricos y rompiendo con el carácter de unicidad que se les suele otorgar.

Para fundamentar las decisiones tomadas en el diseño de una propuesta de enseñanza que persiga nuestros objetivos, se realizó un análisis de libros utilizados en la formación docente. Dicho análisis se centró en la forma en que estos materiales abordan el tratamiento de las clasificaciones y definiciones de cuadriláteros.

La clasificación de cuadriláteros

La clasificación de cuadriláteros, será abordada en este trabajo desde las dos categorías que plantea De Villiers (1994). Una de ellas es la particional, basada en definiciones excluyentes, que lleva a que los subconjuntos generados sean disjuntos. Por ejemplo, definir un paralelogramo como un cuadrilátero de lados opuestos paralelos, pero ángulos no rectos, excluiría inmediatamente los rectángulos. Esta lógica particional, si bien no es usualmente muy aceptada por los matemáticos, es matemáticamente correcta y puede realizarse de manera razonablemente económica.

En contraposición a la anterior, el autor plantea otra clasificación denominada jerárquica, que se basa en definiciones incluyentes. El paralelogramo, por ejemplo, se definiría en este caso como un cuadrilátero con lados opuestos paralelos, y como el rectángulo cumple con tal condición, se trataría de un caso especial de paralelogramo. Esto genera una jerarquía de cuadriláteros con clases inclusivas.

Se puede interpretar a partir de las distintas clasificaciones que, en la jerárquica, el paralelogramo sería el cuadrilátero más general, que incluye como subconjuntos a los rectángulos y rombos y la intersección de ambos subconjuntos serían los cuadrados. Mientras que la clasificación particional excluye a rombos y rectángulos de la categoría de paralelogramos, y excluye el cuadrado también de los mismos.

Con respecto a la utilización de cada una de ellas, el autor sostiene:

Si bien ambas clasificaciones son matemáticamente correctas, es importante comprender por qué una, la jerárquica, es usualmente más funcional en el estudio de la geometría, y las principales ventajas que De Villiers (1994) plantea son:

- Lleva a definiciones y formulaciones de teoremas más económicas.
- Simplifica la sistematización deductiva y derivación de propiedades o conceptos más específicos.
- Provee a menudo de un útil esquema conceptual para resolver problemas.
- A veces sugiere definiciones alternativas y nuevas proposiciones.
- Provee de una perspectiva global útil.

Con respecto a la economía de cada una de las clasificaciones, se evidencia que, la elaboración de definiciones excluyentes requiere de explicitar mayor información, con el propósito de excluir casos no deseados. A diferencia de ésta, una definición incluyente, es más económica, pues no es necesario agregar información adicional para excluir casos.

La definición y la clasificación como procesos o como productos

Como uno de los objetivos que persigue la secuencia didáctica que diseñamos es lograr que los estudiantes conciban a la construcción de clasificaciones y formulación de definiciones como un proceso, recuperamos aportes de distintos autores que abordan esta cuestión. De acuerdo a Winicki Landman (2006), existe una diferencia entre definir como proceso y definición como producto. El autor expresa que

un futuro profesor debe tener oportunidades que le permitan reflexionar acerca de los roles que las definiciones cumplen en el desarrollo de las matemáticas, la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como definición de un concepto matemático y las consecuencias de esta elección.

De Villiers (1998) cita a otros autores que expresan una crítica a la enseñanza de definiciones directas, sin poner énfasis en el proceso subyacente de definir. Por un lado, menciona a Freudenthal (1973), quien plantea que la mayoría de las definiciones no han sido el comienzo sino el toque final de la actividad organizativa y que no debería privarse a los niños o, en nuestro caso, futuros profesores de este privilegio. Justamente es este uno de los objetivos que perseguimos con la secuencia, que las definiciones y clasificaciones se formulen al final de un camino, luego de que se hayan estudiado los objetos y se los haya distinguido de otros.

Por otro lado, cita a Ohtani (1996: 81), quien expresa que la práctica tradicional de impartir definiciones a los estudiantes es considerada un método de persuasión moral con varias funciones sociales, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes: para justificar el control del maestro sobre los estudiantes, para alcanzar un grado de uniformidad, para evitar tener que lidiar con las ideas de los estudiantes y para eludir la problemática de las interacciones con estudiantes.

De Villiers (1998) sostiene que, para favorecer la comprensión de las definiciones geométricas por parte de los estudiantes, y de los conceptos que éstas definen, es indispensable involucrarlos en alguna etapa del proceso de definición de conceptos geométricos. Por otra parte, también expresa que resulta casi irrazonable esperar que los estudiantes formulen definiciones formales por su cuenta, dada la gran complejidad inherente al proceso de definir y la trayectoria anterior de los estudiantes, excepto que en ésta hayan sido guiados en forma didáctica a partir de ciertos ejemplos en los cuales luego puedan apoyarse para producir sus propios intentos. El autor sostiene que la construcción de definiciones es una actividad matemática tan importante como otras, como por ejemplo la de resolver problemas, conjeturar, generalizar, validar, etc., cuestión que nos resulta muy importante destacar. Y sostiene que es muy extraño que esta tarea haya sido tan descuidada en la enseñanza de la matemática.

Relación entre definiciones y clasificaciones

El proceso de elaboración de clasificaciones está íntimamente relacionado con las definiciones de los objetos geométricos que se consideren. Calvo (2001) expresa que las clasificaciones no son únicas, y que dependen de las definiciones y de los criterios con los cuales se clasifica. Por ejemplo, podemos clasificar triángulos según la cantidad de lados iguales y según los tipos de ángulos que tienen.

En el caso de los cuadriláteros, es posible tener en cuenta distintas opciones, como por ejemplo: los tipos de ángulos que posee (cóncavos o convexos), el paralelismo de lados, la cantidad de lados iguales que tienen, las características de sus diagonales, entre otras. Calvo (2001) sostiene que los criterios de clasificación son cambiantes, por lo que es interesante proponer un trabajo en el que se juegue “a cambiarlos”, con el objetivo de favorecer la observación de distintas propiedades de las figuras. Este trabajo consecuentemente promoverá que se realicen agrupaciones distintas a las habituales, teniendo en cuenta propiedades distintas a las “ortodoxas” (p.108), relativizando de este modo el peso de los nombres y otorgando, en consecuencia, más importancia al análisis de las características. Este es el objetivo central de nuestro trabajo.

Las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en libros utilizados en la formación docente

En nuestra investigación, analizamos el tratamiento que se le da a las definiciones y clasificaciones de cuadriláteros en distintos libros que se utilizan en la formación de docentes de Matemática, los criterios que se adoptaron para clasificarlos y definirlos; y si se ofrecen distintas definiciones para un mismo cuadrilátero.

Nuestro interés en el análisis de diversos libros radica en que en muchas oportunidades se constituyen como recursos o fuentes con las cuales los docentes diseñan sus propuestas de enseñanza.

En relación con esto, Vargas (2003), citado por Vidal (2010), señala:

el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento mayoritariamente usado por los profe-

sores. [...] Esta posición privilegiada del texto, condice indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico” (p.2).

Para realizar este análisis, seleccionamos los libros que abordan cuadriláteros, sugeridos en el Diseño Curricular actual de la provincia de Santa Fe para la cátedra Geometría II del profesorado en Matemática y en los Programas de las cátedras Geometría Euclídea Plana y Taller de Geometría de la carrera del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), de los últimos diez años. La muestra que cumplen tales condiciones está compuesta por tres libros, si bien en nuestra investigación realizamos un análisis más exhaustivo de cada texto, por una cuestión de extensión compartiremos un análisis más acotado, y nos enfocaremos solo en las definiciones de cuadriláteros que cada uno de los autores presentan.

Los libros seleccionados son:

- 1) Puig Adam (1980). Curso de Geometría Métrica. Gomez Puig Ediciones.
- 2) Tirao (1979). El Plano. Docencia.
- 3) Sanchez-Marmol y Perez-Beato (1945). Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación. Tomo I. Segunda edición. S.A.E.T.A.

Puig Adam (1980). El autor establece que la clasificación de los mismos se realizará teniendo en cuenta el paralelismo de los lados, realizando la aclaración de que solo podrán ser paralelos los lados opuestos del mismo, es decir los no consecutivos. Teniendo en cuenta esta clasificación, citamos las definiciones que el autor presenta:

Trapezio: “Cuando un cuadrilátero tiene un solo par de lados opuestos paralelos se llama trapezio” (p.66).

Paralelogramo: “Cuando un cuadrilátero tiene dos pares de lados opuestos paralelos se llama paralelogramo” (p.66).

Rectángulo: “Si uno de los ángulos de un paralelogramo es recto, lo son los otros tres, como suplementarios o iguales a él, y la figura se llama rectángulo” (p.67).

Rombo: “Llámesese rombo a un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales” (p.67).

Cuadrado: “Un rectángulo con los cuatro lados iguales se llama cuadrado” (p.67).

Romboide: “Se llama romboide a todo cuadrilátero ABCD con dos pares de lados consecutivos iguales” (p.68).

El autor expresa que se adopta la denominación “romboide” de Rey Pastor, por parecerle más útil que la aplicación clásica que de esta palabra se hace para designar a un paralelogramo que no sea rombo ni rectángulo, y que carece de interés. No se hace referencia a los cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos, entendiendo que, dada la aclaración anterior, los mismos no son de interés para el autor.

Al definir trapecio como un “cuadrilátero con solo un par de lados paralelos” excluye de esta familia a los paralelogramos y a todos los romboides que tienen dos pares de lados consecutivos iguales pero distintos entre sí, es decir, excluye a los romboides no rombos y no cuadrados. De esta manera, en términos de De Villiers (1994) se generan dos familias disjuntas de cuadriláteros, lo cual corresponde a una clasificación particional. Sin embargo, dentro de cada una, encontramos que hay cuadriláteros que cumplen las propiedades de otros. Por ejemplo, un cuadrado, al estar definido como “un rectángulo con los cuatro lados iguales”, es a la vez rectángulo y cuadrado; y además es rombo por cumplir con la igualdad de todos sus lados.

Luego, tanto el rectángulo como el rombo, son paralelogramos, con características más específicas como ser un ángulo recto o todos sus lados iguales. Es interesante mencionar que al definir romboide, el autor no lo realiza a partir del paralelismo de sus lados, sino a partir de la igualdad de los mismos. Si comparamos las definiciones de rombo y romboide, se puede inferir que un rombo cumple con las condiciones del romboide -y en consecuencia también el cuadrado-, por lo tanto también observamos una jerarquía dentro de la categoría romboide; así como también que las categorías “paralelogramo” y “romboide” tienen en común la categoría rombo y su subcategoría cuadrado.

Por lo tanto, encontramos que Puig Adam (1980), realiza una clasificación de cuadriláteros tanto jerárquica como particional. Al definir rectángulo, rombo y cuadrado el autor realiza en todos los casos la siguiente observación: “El rectángulo/rombo/cuadrado tiene pues, todas las propiedades del paralelogramo, y además las siguientes específicas...” (p.67).

Si bien el autor, explicita que el criterio que se adopta para clasificar es el paralelismo de lados, define tanto al rombo como al romboide a partir de la igualdad de sus lados.

Tirao (1979). El autor define a los cuadriláteros de la siguiente manera:

Trapecio: “Un cuadrilátero se llama trapecio si tiene un par de lados paralelos. Estos lados se llaman bases. En todo trapecio se llama base media al segmento determinado por los puntos medios de los lados no paralelos” (p.32).

Paralelogramo:

Un cuadrilátero se llama paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos. En todo paralelogramo la base media con respecto a un par de lados paralelos es el segmento que tiene por extremos a los puntos medios de los otros dos lados (p.32).

Luego de enunciar y demostrar ciertos teoremas de paralelogramos y trapecios, presenta la siguiente definición:

Si uno de los ángulos de un paralelogramo es recto, el cuadrilátero se llama rectángulo. Se llama cuadrado a un rectángulo que tiene sus cuatro lados congruentes. Se llama rombo a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes. Se llama romboide a todo cuadrilátero que tiene un par de lados consecutivos congruentes y los otros dos lados también congruentes (p.35).

Si bien en la definición anterior, no se menciona la inclusión de los rombos dentro de la categoría paralelogramo, el autor realiza una observación posterior donde expresa que: “un rectángulo por ser paralelogramo tiene todas sus propiedades y además tiene otras específicas. Todo rombo es un paralelogramo y todo cuadrado es rombo” (p.35). Al igual que en el libro de Puig Adam (1980), observamos que el autor también define a romboide a partir de la igualdad de lados consecutivos. Si comparamos las definiciones de rombo y romboide, se puede inferir que un rombo cumple con las condiciones del romboide -y en consecuencia también el cuadrado-, por lo tanto también observamos una jerarquía dentro de la categoría romboide; así como también que las categorías “paralelogramo” y “romboide” tienen en común la categoría rombo y su subcategoría cuadrado.

En resumen, observamos que dentro de la categoría “paralelogramo” todos sus elementos están definidos de forma jerárquica (el cuadrado es rombo y rectángulo a la vez, y todos son paralelogramos), a su vez todos los elementos de la categoría “paralelogramo” satisfacen las condiciones de la categoría “trapecio”. Sin embargo, hay romboides que no cumplen con la propiedad de tener un par de lados paralelos,

por lo que de acuerdo a De Villiers (1994), estamos frente a una clasificación tanto jerárquica como particional.

Por otra parte, observamos que se adopta como característica para definir y clasificar los cuadriláteros, el paralelismo de sus lados, exceptuando al rombo y romboide que se los define por la igualdad de lados.

Sanchez-Marmol y Perez-Beato (1945). Los autores en la definición 57 definen los siguientes cuadriláteros:

Entre los cuadriláteros convexos se distinguen:

El *paralelogramo*, que tiene sus lados opuestos paralelos (Imagen 1: fig. 62).

El *rectángulo*, que tiene sus cuatro ángulos iguales entre sí (Imagen 1: fig. 63).

El *rombo*, que tiene sus lados iguales (Imagen 1: fig. 64).

El *cuadrado*, que tiene sus lados y sus ángulos iguales (Imagen 1: fig. 65).

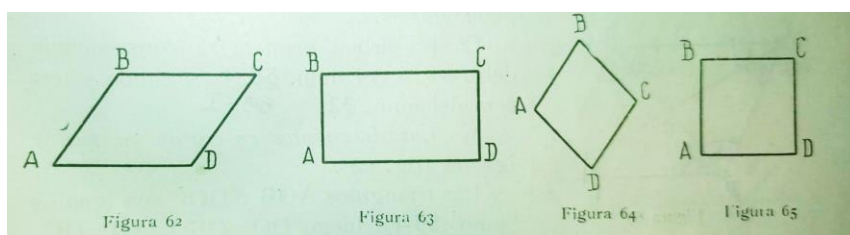


Imagen 1

El *trapezio*, que tiene dos lados opuestos paralelos (Imagen 2: fig. 66).

Un *trapezio* se llama *rectángulo* si uno de los lados no paralelos es perpendicular a los paralelos (Imagen 2: fig. 67).

Trapezio isósceles es aquel que tiene iguales los lados AB y CD no paralelos (Imagen 2: fig. 68).

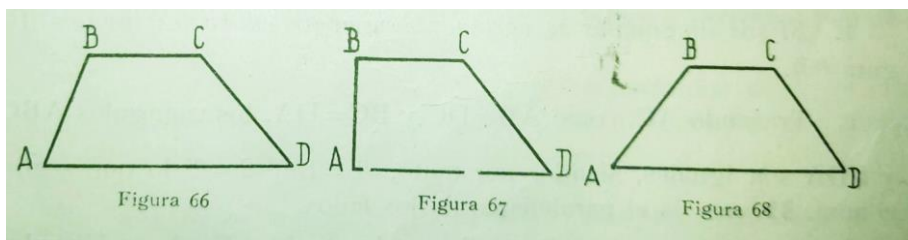


Imagen 2

Los autores no hacen referencia en esta sección a cuadriláteros que no tengan lados paralelos.

Cabe aclarar que si bien, el rombo, rectángulo y cuadrado no son definidos como paralelogramos, se demuestra en el recíproco de un teorema que: “un cuadrilátero convexo es paralelogramo:

1. Si tiene sus lados opuestos iguales.
2. Si tiene sus ángulos opuestos iguales.
3. Si los lados opuestos son a la vez iguales y paralelos
4. Si sus diagonales se cortan mutuamente en partes iguales”. (p.82)

Al analizar las definiciones presentadas, observamos que de acuerdo a De Villiers (1994), estamos frente a una clasificación tanto jerárquica como particional. Si bien en las figuras se presenta una representación para cada cuadrilátero definido, con propiedades específicas (dos pares de lados opuestos distintos en el rectángulo, solo un par de lados paralelos en los trapecios), en las definiciones no hay elementos para indicar que un paralelogramo no pueda ser considerado como trapecio, pues satisface las condiciones que se postulan para este. De igual modo, un cuadrado satisface las condiciones de rectángulo y de rombo. Dentro de la categoría de los trapecios, si encontramos una partición, pues un trapecio rectángulo no podrá ser isósceles, pues de serlo no cumple la condición de poseer dos lados no paralelos.

Por otra parte, observamos que se adopta al paralelismo de sus lados como característica principal para definir y clasificar los cuadriláteros combinándola con la igualdad de lados y ángulos.

A modo de síntesis

A partir del análisis realizado podemos enunciar, a modo de síntesis, algunas características comunes que presentan los libros que analizamos:

- Las definiciones son enunciadas por los autores de una única manera. Los textos no ofrecen al estudiante la posibilidad de cuestionarlas, analizarlas o construirlas por sí mismos, sino que en cambio son presentadas de forma acabada.
- El criterio principal con el que se clasifican los cuadriláteros en los libros es el paralelismo de los lados. En los tres casos, también se combinan con la igualdad de

lados y la cantidad de ángulos rectos. Un ejemplo de esto es el cuadrado, que se define como un paralelogramo con un ángulo recto y cuatro lados iguales. Se exceptúan al rombo y romboide, ya que son definidos solo a partir de la igualdad de lados.

- En los tres casos, las definiciones que los autores enuncian dan lugar a una clasificación tanto jerárquica como particional en términos de De Villiers (1994). No aparece una clasificación puramente jerárquica o puramente particional.

Las conclusiones a las que arribamos, reforzando y potenciando el objetivo que planteamos al comenzar la investigación, posibilitan realizar algunas preguntas que motivan el estudio: ¿Cómo influye la selección que realiza el docente de la bibliografía con la que trabaja en el tratamiento de definiciones y clasificaciones?, ¿cuáles son los criterios que el docente considera a la hora de seleccionar bibliografía para sus clases?, ¿en qué medida los libros para la formación docente guían y determinan el trabajo en el aula?, ¿qué posibilidad tienen los estudiantes de analizar y conocer distintas definiciones de cuadriláteros?

Estas preguntas y el análisis realizado sirven de guía y tienen relación con nuestro interés en la generación de propuestas de enseñanza que posibiliten a futuros profesores deconstruir concepciones acerca de la enseñanza de la geometría, problematizar la enunciación y construcción de definiciones, con el propósito de que posteriormente se conviertan en herramientas para la toma de decisiones; así como también que sean conscientes de que no hay una única forma de definir, ni un único criterio.

Bibliografía

- Calvo, Cecilia** (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* (tesis de doctorado). Universidad Autónoma de Barcelona.
- De Villiers, Michael** (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- De Villiers, Michael** (1998). To teach definitions in geometry or teach to define?. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *PME 22 Proceedings* (pp. 1-8). Stellenbosch. <https://dynamicmathematicslearning.com/define.pdf>
- Puig Adam, Pedro** (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Gomez Puig Ediciones.

Sanchez-Mármol, Lino y Perez-Beato, Manuel (1945). *Geometría Métrica, Proyectiva y Sistemas de Representación*. Tomo I. S.A.E.T.A.

Tirao, Juan (1979). *El plano*. Docencia.

Vidal, Roberto (2010). El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910-2010 (documento digital). https://cuadernosdeeducacion.uahurtado.cl/historial/cuaderno_educacion_27/pdf/articulo_adjunto_27.pdf

Winicki Landman, Greisy (2006). Las definiciones en Matemáticas y los procesos de su formulación: Algunas reflexiones. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 19 (pp. 538-543). CLAME.

Eje 4. Educación matemática en la formación docente

Reflexiones y experiencias para el aula

Objeto Digital de Aprendizaje: una estrategia de alfabetización para el desarrollo de Competencias Digitales en el profesorado en matemática

MARIO UBALDO AVILA

marioavila390@exa.unsa.edu.ar

LUIS FERNANDO CRESPO

luiscrespo111@gmail.com

BEATRIZ JOSEFINA SOLÍS MUNGUÍA

solis.beatriz@exa.unsa.edu.ar

MARÍA DE LAS MERCEDES MOYA

maritamoyaster@gmail.com

Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa)

Resumen

Asumiendo una posición crítica frente al rol de las tecnologías en el ámbito de la Educación Matemática, en este trabajo reflexionamos sobre una posible estrategia de alfabetización en Competencias Digitales Docente que puede abordarse desde la formación inicial de profesores en matemática.

Se describe cómo el proceso de producción de un Objeto Digital de Aprendizaje (ODA) para la enseñanza de la matemática, puede aportar a la alfabetización digital de los formadores de formadores. También, se destaca el correlato que este tipo de acciones podría tener en los estudiantes del profesorado, a la luz de las competencias digitales.

Basándonos en estas reflexiones, llegamos a la conclusión de que es factible combinar la formación disciplinaria con la alfabetización en competencias digitales en los planes de formación docente, con el objetivo de brindarles a nuestros futuros educadores en matemática, herramientas que les permitan participar en las escuelas de esta era de la cultura digital.

Palabras clave: formación del profesorado / competencia digital docente / alfabetización digital / objetos digitales de aprendizaje

Introducción

Asumiendo una posición crítica frente al rol de las tecnologías digitales en el ámbito educativo, entendemos que la irrupción de las mismas vino a cambiar de un modo radical la manera en que concebimos la escuela, su función y sus objetivos. Borba *et al.* (2016) afirman que “la irrupción de las tecnologías digitales está de-construyendo la noción de salón de clases, estirando su capacidad física y de algún modo, también su alcance e impacto, al punto de ya no reconocerlo como tal” (p. 17). Es necesario establecer criterios, que nos ayuden a trazar y ejecutar líneas de acción diversas, para modificar y adecuar la escuela al mundo de hoy, de modo que se pueda poner al nivel de su tiempo. Siguiendo esta línea de reflexión, Burbules (2020) se pregunta si ¿es posible pensar un escenario de innovación educativa sin tener en cuenta la formación del profesorado? Esto llama a la reflexión a las instituciones formadoras de formadores, pues se establece como premisa básica que la formación del profesorado debe seguir los principios de la escuela que queremos, entrando en sintonía con las competencias, demandas y habilidades de esta sociedad de la información.

La Competencia Digital (CD) se entiende como “el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de información y comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el tiempo libre, la inclusión y la participación en la sociedad” (INTEF, 2017). Según la UNESCO (2019), tiene un potencial para el logro, por parte de la ciudadanía, de algunos de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) que se enuncian en la Agenda 2030, y cuya meta principal es reducir la brecha digital, acelerando el progreso de una sociedad del conocimiento más inclusiva. Este organismo internacional, destaca que el desarrollo de Competencias Digitales Docentes (CDD) es fundamental a los fines de garantizar los principios de equidad y calidad que proponen los ODS en materia de TIC (UNESCO, 2019 y Sánchez Cruzado *et al.*, 2021).

Con una mirada en el contexto local de formación de profesores en Matemática, que se desarrolla en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta (FCE-UNSa), como formadores de formadores, debemos asumir que la Educación Matemática está inmersa en nuevos contextos complejos y de cambios vertiginosos, los cuales demandan de nuestros egresados habilidades y competencias profesionales que deben ser abordadas desde su formación inicial. A pesar de esto,

nos seguimos encontrando con programas y planes de estudios, que se siguen mostrando resistentes a los cambios de paradigmas que establece la tecnología y particularmente la tecnología digital. Este problema, trae aparejado el surgimiento de prácticas de enseñanza, que muchas veces se asemeja a lo que algunos investigadores han caracterizado como un proceso de domesticación de la tecnología (Villareal, 2012). Al decir de esta autora, este proceso de domesticación implica la incorporación de prácticas en entornos digitales, manteniendo inmutables objetivos, contenidos, metodología, estrategias de enseñanza y formas de evaluación, lo cual inhibe las ventajas formativas de las herramientas digitales.

Engelbrecht *et al.* (2020) afirman que “ampliar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas y de los formadores de profesores de matemáticas es una necesidad vinculada a la mejora de la enseñanza de las matemáticas” (p. 827), en tal sentido apostar por una alfabetización del profesorado en términos de CDD implicaría ir en busca de este objetivo. Así, ubicados en nuestra realidad curricular, nos proponemos brindar algunas reflexiones con relación al proceso de producción de un Objeto Digital de Aprendizaje (ODA) para la enseñanza de la matemática en un contexto de formación disciplinar del profesorado. A partir de esto, inferimos nuestras conclusiones en relación con la alfabetización en CDD de los formadores de formadores, y el impacto que este tipo de acciones, podría tener en los estudiantes del profesorado a la luz de las CD.

Marco Teórico

La alfabetización del profesorado en CDD, no implica dejar de lado la su formación disciplinar, para sustituirla por prácticas que tengan que ver con un saber hacer netamente técnico. Se refiere más bien a la necesidad de nutrir los momentos de formación con prácticas que apuesten a la alfabetización disciplinar, pedagógica y tecnológica, para lograr perfiles profesionales que estén en sintonía con los requerimientos de esta era de Digitalización de la Cultura (Novomisky, 2020). Al respecto, López Simó *et al.* (2020) reflexionan sobre la necesidad de ir más allá en la discusión del rol y la potencialidad de las herramientas digitales en el aula, afirmando que el objetivo debe estar puesto en mirar al docente y su formación. El docente es el responsable de la elección y gestión de los recursos, del diseño instruccional de

las prácticas que llevará a cabo, para mediar y evaluar los contenidos en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Un proceso de alfabetización del profesorado en CDD, permitirá al futuro educador y en particular a los que enseñan matemática, asumir un “posicionamiento reflexivo respecto a lo digital, que fomente un análisis crítico de cada herramienta y en particular del tipo de actividad cognitiva, social y discursiva que la misma permite y fomenta en el aula” (López Simó *et al.*, 2020, p. 19). Estos autores, caracterizan la CD como la capacidad de un sujeto para el acceso y el procesamiento de la información digital; la comunicación, interacción y colaboración en diversos entornos digitales; la creación de contenidos digitales en múltiples formatos, observando derechos intelectuales y preservando la seguridad digital; y finalmente como aquella que permite resolver problemas con recursos digitales (López Simó *et al.*, 2020, p.13). También afirman que en esta era de la información y la comunicación, se “requiere de futuros ciudadanos alfabetizados digitalmente, capaces de desarrollarse en un mundo digital de la mejor forma posible, sabiendo recoger e interpretar todo tipo de información digital, comunicándose adecuadamente, de forma crítica y segura, produciendo sus propios contenidos digitales” (López Simó *et al.*, 2020, p.15).

Existen diferentes marcos conceptuales que intentan brindar descriptores que permiten caracterizar la CDD, en diferentes áreas y niveles. En particular el Marco de Común de la Competencia Digital Docente 2017, formulado por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado (INTEF), perteneciente al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, describe 5 áreas de CDD, entre las que se identifican Información, Comunicación, Creación de Contenidos Digitales, Seguridad y Resolución de problemas (INTEF, 2017). En su versión más actualizada (Marco de Referencia de la Competencia Digital Docente 2022 del INTEF), estas cinco áreas competenciales, son identificadas como aquellas que un docente formador debe promover en sus estudiantes.

Muchas investigaciones han demostrado las implicancias educativas de los medios para la producción de conocimiento matemático. En particular, el constructo Humanos-con-Medios propuesto por Borba y Villarreal (2005) explica que el conocimiento es producido por la acción de actores humanos, como por la acción de los diferentes medios (escritura, software, documentos multimediales como un video, internet, entre otros), siendo este colectivo el que determina el significado de los conocimientos adquiridos y el cual puede cambiar a medida que los medios cam-

bian (Borba y Villarreal, 2005, citado en Borba *et al.*, 2018, p. 4). El colectivo Humanos-con-Medios, es la unidad mínima de análisis en una situación de aprendizaje, ya que “no hay producción de conocimiento humano sin la influencia de los medios, ni el desarrollo de los medios sin la influencia de los humanos” (Borba *et al.* 2018, p. 5). Tomamos de referencia este constructo teórico, porque entendemos que la producción, uso y aplicación de ODA (Medios) en actividades de formación de profesores en matemática (Humanos) impactará de manera positiva en el desarrollo de la CD de nuestros estudiantes, “no solo por las competencias técnicas-tecnológicas que en ella se desarrollan, sino por el valor agregado que otorga a su formación, al tener que pensar una práctica educativa mediada con materiales digitales” (Moya y Avila, 2020, p. 570).

Nos ubicamos frente a un paradigma superador para el rol docente, el cual pasa a ser un prosumidor (productor y consumidor) de contenidos digitales, los cuales se distribuyen bajo la modalidad de recursos educativos abiertos. Tomando en cuenta el rol de docentes prosumidores, González y Vallejos (2017) afirman que “la transformación del escenario respecto del rol docente, que pasa de docente-reproductor a docente-creador, tiene su correlato en el aspecto tecnológico, ya que la transformación lleva aparejada la manipulación tecnológica subyacente” (p. 4), y en nuestro caso esto promovería la alfabetización del profesorado en términos de CDD. Este contexto de apropiación tecnológica, requiere de espacios de formación del profesorado, que le permitan al docente evaluar los ODA seleccionados, adaptarlos o diseñar/producirlos para que sean acordes a los requerimientos y contextos de acción educativa (González y Vallejos, 2017).

Producción de ODA y la alfabetización en CD y CDD

Como se dijo, la creación de contenidos digitales es una de las aristas que caracteriza a la Competencia Digital de la ciudadanía del siglo XXI e implica no sólo la creación de contenidos en múltiples formatos, sino también la reutilización de contenidos ya existentes, su comunicación e implementación en múltiples espacios de aprendizaje y por lo tanto su mediación a través de proyectos de enseñanza-aprendizaje (INTEF, 2017, 2022)

Destacamos que trabajar desde la formación del profesorado, en la creación, producción y uso de contenidos digitales, en particular de ODA, implica abordar desde una visión holística la alfabetización del estudiante y de los formadores de formadores en términos de competencias digitales. Esto se infiere dado que diseñar, producir e implementar un ODA para sostener un proceso de enseñanza y aprendizaje, implica abordar aspectos relacionados con la gestión y el acceso a la información; aspectos de interacción y colaboración en entornos digitales; y la observación de derechos de autoría; los cuáles conforman las categorías competenciales definidas por López Simó *et al.* (2018) y el INTEF (2017,2022). En nuestro caso, ampliamos la mirada, proponiendo una visión pragmática y antropológica del uso de medios para la construcción, enseñanza y aprendizaje de la matemática en contextos educativos, como la define el constructo Humanos-con-Medios.

Para este trabajo, se toma de referencia la experiencia de producción de un ODA, haciendo uso de la herramienta eXeLearning, para el estudio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1er Orden (EDO), en el marco de una asignatura de formación disciplinar de profesores en matemática en la FCE-UNSa. Si bien existen diferentes aplicaciones y software para abordar la creación y producción de ODA, eXeLearning cuenta con un entorno de diseño y producción que es propicio para abordar la creación de ODA, sin la necesidad de contar con profundos conocimientos informáticos y de programación. En esta línea, González y Vallejos (2019) destacan la potencialidad de esta herramienta, para la capacitación del profesorado en la creación de contenidos digitales, con el objetivo de aportar a la alfabetización en CDD de los mismos. La base de esta decisión sigue siendo que, en la ejecución de estas acciones de alfabetización siga primando el aspecto de diseño didáctico-disciplinar, para que el mismo se complemente con su aspecto técnico-tecnológico.

El ODA diseñado propone una aproximación al estudio práctico del tema ecuaciones diferenciales ordinarias, de forma tal que se invita al lector autorregular su proceso de aprendizaje en compañía de los recursos incorporados. Se incluyen en los diferentes bloques recursos textuales e hipertextuales, en variados formatos, que invitan a plantear y resolver ecuaciones diferenciales de 1er orden y grado, interpretando gráficamente los resultados obtenidos; aplicando métodos analíticos y geométricos para la resolución de ecuaciones a variables separables, y explorando métodos analíticos y numéricos para la solución de problemas de valor inicial, comparando los tipos de soluciones encontrados.

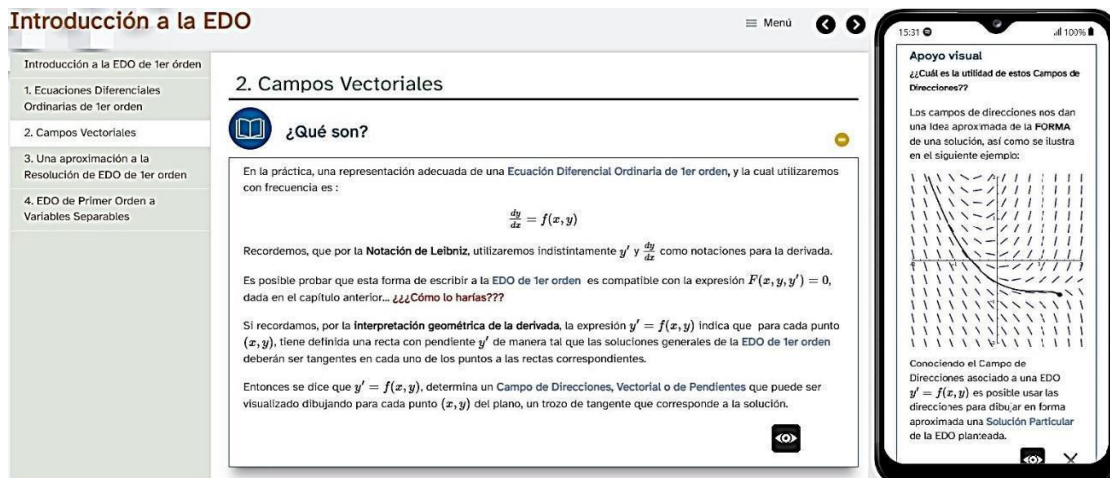


Imagen 1: Menú, bloque temático y vista en dispositivo móvil del ODA creado

En la Imagen 1 se puede apreciar el diseño general del ODA, en el que se integran los diferentes recursos siguiendo el modelo del diseño universal de aprendizaje que propone el software de creación. Con este tipo de diseño, es posible lograr que un recurso textual se pueda complementar mediante recursos de apoyo visual, auditivo, o de lectura comprensiva. Por ejemplo, accediendo mediante un botón de acción de apoyo visual, se da una interpretación de la aplicación de los campos de direcciones, como estrategia para aproximar la solución de una EDO de 1er orden. También se destaca la versatilidad del objeto digital creado para adecuarse a dispositivos diversos, como los dispositivos móviles.

Para la creación de este ODA, el docente ubicado en un rol de prosumidor de contenidos digitales, debe abordar estrategias de comunicación, pero no solo a los fines de dar definiciones, descripciones o sugerencias, sino también para comunicar matemática mediante recursos textuales y auditivos a través del objeto digital. Para ello, la selección y el procesamiento de la información, de los recursos complementarios y el diseño instruccional elaborado son determinantes. En tal caso, estamos apostando a un proceso de alfabetización digital, que impacta no solo en la creación de recursos, sino también en los objetivos de aprendizaje, la metodología de enseñanza, la concepción epistemológica de lo que significa hacer matemática y de la evaluación. Esto evidencia una vez más la tesis que concluye que, así como los humanos modelan y dan forma a los medios, el diseño de estos últimos también modela y reconfigura a los humanos y al conocimiento producido por este colectivo (Borba y Villarreal, 2005).

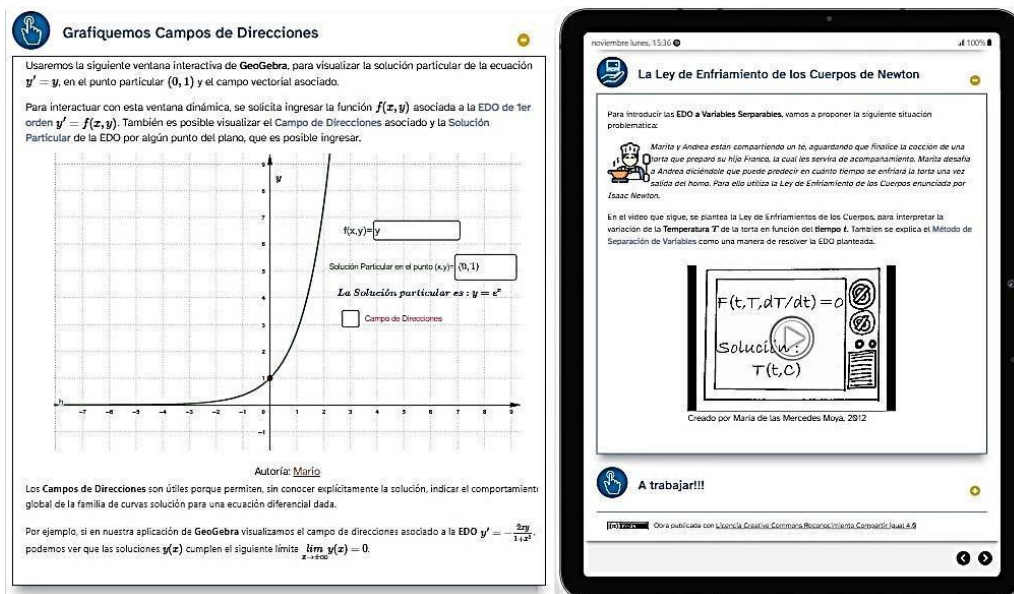


Imagen 2: Integración de contenido creado con GeoGebra y material audiovisual

La integración de los recursos en el ODA, se realiza mediante enlaces que preservan los derechos de autoría de los creadores de contenidos, a su vez el software compila el objeto digital mediante un tipo de licencia Creative Commons, cuya configuración queda a cargo del docente creador del contenido digital. Como se puede ver en la Imagen 2, se propone un abordaje interactivo y visual de los campos de direcciones asociados a EDO de la forma $y' = f(x, y)$, mediante una aplicación creada y disponible en GeoGebra, conservando en todo momento la referencia al autor del contenido integrado. De igual manera, es posible incrustar videos tomados de la web, como YouTube o Drive, los cuáles, de acuerdo a las licencias con las que fueron publicados en la fuente origen, pueden ser adecuados al contexto del ODA, mediante las opciones de edición de las que dispone eXeLearning, a los fines de organizar una tarea interactiva mediada con este recurso. Estamos mostrando que trabajar en la creación de este tipo de contenido digital, aborda algunos de los principios básicos de CD asociada al uso y reconocimiento de los derechos de autoría y de seguridad digital. Esto debería a su vez, impulsar prácticas que impacten en la creación de una ciudadanía del cuidado de los derechos de propiedad intelectual de las creaciones digitales y no digitales propias, como así también de terceros.

Destacamos la ventaja de la herramienta eXeLearning, como medio para la creación, integración y comunicación de los recursos digitales que muchas veces son gestados en el seno de prácticas educativas y que por ciertas limitaciones per-

manecen en el anonimato. Con esta herramienta, es posible, a través de un proceso colaborativo de curaduría de contenidos, adaptar los contenidos creados a los objetivos de un ODA que se puede distribuir en diversos entornos. En nuestro caso, el recurso creado pudo exportarse en formatos compatibles con páginas web y entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje (Moodle), con la posibilidad de adaptarlo a otros formatos como el de libros digitales o e-books, entre otros.

La alfabetización digital, como estrategia de capacitación de docentes formadores y de docentes en formación, versa sobre los principios educativos de la ubicuidad y el acceso al conocimiento, que deberían ser propios de la educación en general y de la Educación Matemática en particular. La implementación del ODA creado, favorece actividades de interacción de los estudiantes, la autorregulación y un acompañamiento digital de su proceso de aprendizaje. Esta práctica y la posterior alfabetización digital del estudiante, futuro profesor en matemática, puede significar una invitación a que pueda crear sus propios contenidos digitales, a fin de mediar los procesos de enseñanza en su futura práctica profesional docente.

Conclusiones

La alfabetización en competencias digitales del profesorado en matemática, debe tener un correlato institucional que se vislumbre no sólo en prácticas aisladas, sino también en una dimensión curricular. De cara a los desafíos de la Educación Matemática en esta era digital, entendemos que es necesario concebir una nueva identidad del profesorado, con “una visión holística de su ejercicio profesional que construya algo así como modos de comprender y accionar en el mundo digital y que permita el diálogo con los sujetos contemporáneos que asisten a las escuelas” (Lion, 2020, p. 93). Haciéndonos eco de este pensamiento, vemos a partir de la experiencia compartida, un ejemplo de que un cambio de paradigma en la formación del profesorado es posible.

El proceso de creación de objetos digitales de aprendizaje, como el compartido, aborda los principios básicos de la alfabetización en competencias digitales de estudiantes y docentes, lo cual impacta no sólo en los contenidos creados, sino también en el diseño de la clase de matemática. Esto a su vez, tiene un correlato tanto en la capacitación del futuro educador en matemática, como así también en la del cuerpo

docente de la institución formadora. Los aspectos que se destacaron en las reflexiones elaboradas sobre esta experiencia de creación y uso de un ODA en un contexto de formación disciplinar de alumnos del profesorado en matemática, se corresponden con algunas de las categorías de análisis que se dedican a evaluar el nivel de CDD de acuerdo a diferentes marcos internacionales.

Las experiencias vividas en los últimos años, nos han demostrado que ya no está en debate el tópico tecnologías si o tecnologías no. Ante esto, es necesario reflexionar si frente a estas realidades y sus constantes cambios, frente a una sociedad que desarrolla su vida atravesada por pantallas (humanos-con-medios), estamos formando a nuestros futuros profesores, con las habilidades y las herramientas adecuadas, de modo que estén a tiempo de adaptar la escuela al mundo de hoy.

Con este trabajo, pretendemos aportar ideas y reflexiones que puedan servir de referencia, para que la formación del profesorado, y en particular de profesores en matemática, involucre prácticas que resulten en beneficio de la alfabetización digital de los mismos. Así, estaríamos aportando a la reducción de la brecha digital y se estaría garantizando la igualdad de oportunidades, para que las nuevas generaciones, a través de un profesor tecnológicamente alfabetizado, tengan acceso al poder emancipador del conocimiento.

Bibliografía

- Borba, Marcelo y Villarreal, Mónica** (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Springer.
- Borba, Marcelo, Askar, Petek, Engelbrecht, Johann, Gadanidis, George, Llinares, Salvador y Sánchez Aguilar, Mario** (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 48, 589–610. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4>
- Borba, Marcelo, de Almeida, Helber y Chairi, Aparecida** (2018). Interactions in virtual learning environments: new roles. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 269–286. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9812-9>
- Engelbrecht, Johann, Llinares, Salvador y Borba, Marcelo** (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *Educación matemática ZDM*, 52, 825–841. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>

- González, Alejandro y Vallejo, Alcira** (2017). Formación de docentes universitarios para el desarrollo de recursos educativos abiertos con eXeLearning (conferencia). <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/81178>
- González, Alejandro y Vallejo, Alcira** (2019). Exelearning: potencialidades de una herramienta de autor concebida para la creación de REA (Resumen ponencia). <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/81176>
- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado [INTEF]** (2017). Marco común de competencia digital docente. https://aprende.intef.es/sites/default/files/2018-05/2017_1020_Marco-Com%C3%BAn-de-Competencia-Digital-Docente.pdf
- Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado [INTEF]** (2022). Marco de referencia de la competencia digital docente. https://intef.es/wp-content/uploads/2023/05/MRCDD_GTTA_2022.pdf
- Learning Team.** (16 de 07 de 2020). Encuentro virtual con Nicholas Burbules. Argentina. https://www.youtube.com/watch?v=Cqkz_tlmEIU
- Lion, Carina** (2020). Aprendizaje y tecnologías: Habilidades del presente, proyecciones de futuro. NOVEDADES EDUCA.
- López Simó, Víctor, Couso Lagarón, Digna y Simarro Rodríguez, Cristina** (2020). Educación STEM en y para el mundo digital: El papel de las herramientas digitales en el desempeño de prácticas científicas, ingenieriles y matemáticas. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, 20(62), 1-29. <https://doi.org/10.6018/red.410011>
- Moya, María de las Mercedes y Ávila, Mario** (2020). Acciones formativas en el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Salta. Educación Matemática en las Américas 2019, (566-573). Medellín. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/public/conferences/XV-CIAEM-2019-book/XV-CIAEM-2019-book-with-ISBN.pdf>
- Novomisky, Sebastián** (2020). *La marca de la convergencia. Medios, tecnologías y educación: Doce ensayos en busca de una narrativa*. Universidad Nacional de La Plata. <https://doi.org/10.35537/10915/120967>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO].** (2019). Marco de competencias de los docentes en materia de TIC UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000371024>
- Sánchez Cruzado, Cristina, Bonetti, Sandra, Sánchez Compañá, María Teresa y Santiago Campión, Raúl** (2021). Análisis de competencias digitales de docentes de la provincia de Misiones: el reto de la nueva alfabetización. *Revista Virtualidad, Educación y Ciencia*, 23(12), 8-32. <https://doi.org/10.60020/1853-6530.v12.n23.34459>

Villarreal, Mónica (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 3(5), 73-94.
<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/3014>

Reconstrucción de un Lillium con cónicas: un problema de modelación matemática

BEATRIZ JOSEFINA SOLÍS MUNGUÍA

solis.beatriz@exa.unsa.edu.ar

MARÍA DE LAS MERCEDES MOYA

maritamoyaster@gmail.com

MARIO UBALDO AVILA

marioavila390@exa.unsa.edu.ar

LUIS FERNANDO CRESPO

Luiscrespo111@gmail.com

Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa)

Resumen

En este trabajo, se aborda la metodología de modelación matemática, como un enfoque posible de ser aplicado para el estudio geométrico y algebraico de las secciones cónicas. Tomando como problema, la construcción de una maqueta para el Lillium, se recorren las etapas involucradas para la obtención del modelo matemático buscado, integrando saberes provenientes de la morfología vegetal y de la matemática, con habilidades técnico-tecnológicas.

Al aplicar esta metodología de trabajo, se destaca el rol de la tecnología y la tecnología informática en particular, como apoyo para la puesta en práctica de conocimientos matemáticos, con un enfoque interdisciplinar. Nuestras reflexiones sobre la tarea realizada nos motivan a plantear, para el futuro, experiencias de aula basadas en propuestas didácticas innovadoras, que favorezcan la alfabetización en competencias disciplinares y tecnológicas en la formación de docentes de matemática.

Palabras clave: modelación matemática / GeoGebra / cónicas / lillium

Introducción

En el ideario social, suele pensarse que los matemáticos trabajan con nociones y conceptos que parecen poco útiles, que solo lo hacen por diversión. No obstante, en la historia de la matemática se destacan investigaciones apasionadas, cuyos resultados se alcanzaron gracias a la labor de varios estudiosos a través de los siglos. Un ejemplo de ello son las secciones cónicas, que hoy cuentan con múltiples aplicaciones en distintas áreas del conocimiento.

Este trabajo, inspirado en la riqueza de las cónicas, plantea una nueva aplicación de ellas en la naturaleza a través de la modelación matemática, como lo es la reconstrucción de una planta mediante una maqueta que se aproxime lo mejor posible a sus formas y tamaños. De esta manera, se presenta un problema cuya resolución implica integrar saberes provenientes de la morfología vegetal y de la matemática, con habilidades técnico-tecnológicas. Esto permitiría diseñar estrategias educativas motivadoras con las cuales se puedan interpelar a nuestros estudiantes, futuros profesores de matemática, como sujetos configurados en esta nueva cultura tecno-mediática (Novomisky, 2020).

La modelación matemática, raíz de casi todas las creaciones humanas, se presenta no sólo como método de investigación, sino también como método de enseñanza (Hein y Biembengut, 2006). En el actual contexto de Educación Matemática, donde las tecnologías están creciendo constantemente, el docente cambia su rol de acuerdo a las circunstancias, ya que “además de la función vinculada al contenido, han de desarrollar competencias para guiar, asesorar y crear espacios y oportunidades para que el alumnado pueda articular sus aprendizajes con los desafíos que van marcando los escenarios culturales y digitales” (Lion, 2020, p. 94). Por ello, es importante que desde la formación docente se desarrollen habilidades y posturas críticas frente a la incorporación de la tecnología informática viendo en ella, una aliada que podrían coadyuvar a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Se expone en forma pragmática el diseño de una posible aplicación de este modelo metodológico, con la intención de mostrar que puede ser llevado a cabo desde la formación inicial de profesores, por los distintos grados de complejidad y rigurosidad matemática que atraviesa la resolución del problema planteado, en un contexto de aula enriquecida por la incorporación de recursos tecnológicos. El análisis

de las etapas de implementación y evaluación del impacto de este diseño, será objeto de futuras comunicaciones.

Marco Teórico

La modelación matemática como método de investigación científica, consiste en el arte de traducir un fenómeno o un problema de la realidad en un lenguaje matemático (Hein y Biembengut, 2006). Así, existe una gran variedad de situaciones reales que para ser entendidas de mejor manera, son traducidas en un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas denominado modelo matemático.

Según Biembengut y Hein (1997), el proceso de elaboración de un modelo se define también como modelaje matemático, e involucra una serie de procedimientos que pueden organizarse en tres etapas con sus respectivas instancias, que interactúan en un proceso de retroalimentación como se muestra en la Imagen 1.

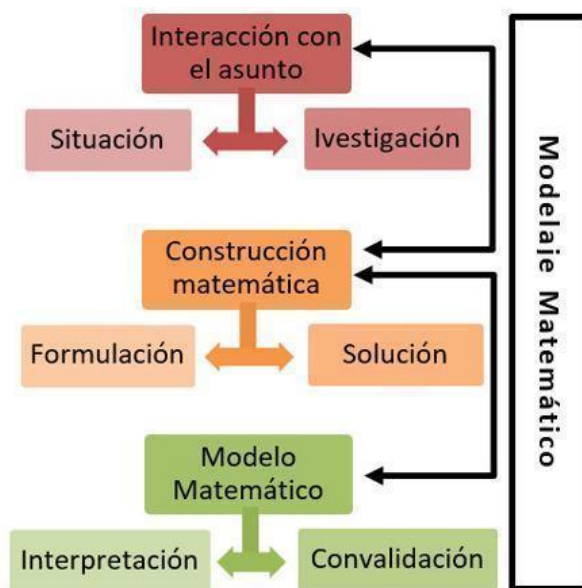


Imagen 1: Etapas del proceso de elaboración de un modelo (adaptado de Biembengut y Hein, 1997)

En la interacción con el asunto, tiene lugar el reconocimiento de la situación o problema y la familiarización con el mismo. Es decir, aquí se delimita el objeto de estudio y se lo investiga recurriendo a tratamientos indirectos (libros y revistas especializadas) y directos (datos experimentales obtenidos por especialistas del área).

La construcción matemática es la etapa más compleja y desafiante, puesto que implica traducir la situación – problema al lenguaje matemático. Para esta formulación, es necesario clasificar la información relevante, plantear hipótesis, generalizar y seleccionar variables relevantes, símbolos apropiados para dichas variables y describir las relaciones que se establecen en términos matemáticos. Aquí, cobran relevancia las fórmulas, expresiones algebraicas, software, entre otros recursos. Es importante destacar que la solución del problema que se obtiene es en términos del modelo, es decir, tiene sentido dentro del dominio matemático trabajado, siendo tarea del investigador su interpretación en el contexto real del problema.

En la formulación del modelo matemático, tiene lugar la interpretación de la solución o convalidación. Consiste en efectuar una revisión crítica que conduce a la interpretación del modelo, para comprobar en qué nivel éste se aproxima a la situación – problema, para utilizarla y convalidarla. Es importante reflexionar acerca de la solución hallada, y si ésta se corresponde con la realidad, puesto que un modelo nunca será exacto y lejos de que esto sea visto como error matemático, reafirma el hecho de que la realidad no puede ser absolutamente modelada.

Los modelos matemáticos dependiendo de las intenciones de su uso, cambian y se redefinen demandando en esta tarea la mixtura entre destrezas matemáticas, intuición – creatividad, y sentido lúdico para jugar con las variables involucradas (Biembengut y Hein, 1997).

Como método de enseñanza, la modelación matemática recorre el camino de la investigación científica, ya que a partir de una situación real intenta explicarla en base a las preguntas ¿qué?, ¿por qué?, ¿cómo?, ¿cuánto? y ¿para qué? (Hein y Biembengut, 2006).

Asumiendo una posición crítica sobre el rol de las TIC en educación, es necesario reflexionar sobre su impacto en la innovación de la institución escolar, redefiniendo sus funciones, métodos y objetivos, a los fines de articularla con el fenómeno que Novomisky (2020) ha caracterizado como la digitalización de la cultura. En este sentido, Burbules (2020) llama a la reflexión sobre la imposibilidad de pensar en este escenario de innovación educativa, desatendiendo la formación del profesorado. Particularmente en la enseñanza de la matemática, Gómez-Chacón (2011) señala que el impacto que las herramientas tecnológicas podrían tener, no se ve reflejado en nuevas formas de interacciones didácticas.

Gómez-Chacón (2011) a través de sus proyectos de investigación en la formación del profesorado en matemática, considera que es importante centrar la atención en las dificultades frente al conocimiento matemático, a las habilidades tecnológicas, y a la experticia técnica en la modelación. En su programa formativo reconoce el aporte del software GeoGebra en la construcción del conocimiento matemático, dado que la geometría dinámica que ofrece permite un cambio de contexto para aplicar nociones o propiedades. El uso de esta herramienta, no sólo constituye un elemento clave para la construcción técnica o procedimental, sino también para las transiciones entre las distintas fases de la modelación presentadas en la Imagen 1.

Etapas del proceso de elaboración de un modelo de Lilium

En esta sección se describe un posible recorrido del proceso de modelización, a modo de anticipación de posibles resoluciones por parte de futuros profesores de matemática. La resolución presentada permite mostrar la riqueza de la actividad propuesta en la formación inicial de profesores.

La situación o problema planteado, consiste en la construcción de una maqueta de Lilium.

Etapas 1: Interacción con el asunto. Se recurre a saberes provenientes de la morfología vegetal, que suministra los conocimientos básicos para interpretar las estructuras vegetales del Lilium, a fin de favorecer el uso de vocabulario específico. Por ejemplo, aquellas partes de la flor que comúnmente se reconocen como pétalos, en realidad se definen como tépalos y son las piezas que envuelven los órganos sexuales de la flor (Font Quer, 2001).

Según Özen *et al.* (2012), las flores de Lilium se caracterizan por tener forma de cono y poseer simetría radial (actinomorfa). Los tépalos se disponen en dos anillos de 3 tépalos exteriores y 3 interiores, los cuales son designados con los números 1 – 2 – 3 y I – II – III respectivamente (Imagen 2). Sus hojas son lanceoladas (forma de lanza) y se vuelven más pequeñas a medida que se aproximan a la flor.



Imagen 2: Tépalos y hojas de Lilium

Se analizan recursos didácticos, técnicos y tecnológicos para el proceso de enseñanza – aprendizaje, según esta metodología. Esto permite definir las variables para la construcción del modelo deseado. Surgen preguntas que determinan la complejidad y la finalidad del modelo. Por ejemplo, si el interés es saber cuántos Lilium ocupan determinada área, alcanza con obtener un modelo de la silueta de la flor en el plano que la contiene (podría ser una fotografía en escala 1:1), que permita calcular el área de la misma. En cambio, si el interés está en realizar una maqueta de la flor de Lilium, el modelo buscado deberá aproximarse lo mejor posible en forma y tamaño a cada uno de sus tépalos y hojas, respetando disposiciones y simetrías. Las siguientes instancias se abordarán según esta última finalidad.

Etapla 2: Construcción matemática. A los fines de obtener el molde que permita la elaboración de la maqueta, se aproximará la forma de los tépalos y hojas con distintas cónicas. Esta decisión metodológica, se basa en el análisis morfológico realizado en la etapa 1. Para ello, se desarma un Lilium en dos hojas (una superior y una inferior) y seis tépalos (3 interiores y 3 exteriores). Estos últimos son seccionados longitudinalmente de modo que un plano pueda contener sus partes. Se adhieren las piezas en papel milimetrado y cada resultado es escaneado como imagen en un formato editable, que es ingresado a GeoGebra. El uso del papel milimetrado permite ajustar en la vista gráfica del software, el tamaño de la imagen a las dimensiones reales en escala 1:1, y ubicarla convenientemente para que el sistema rectangular de coordenadas sea el marco de referencia (Imagen 3).

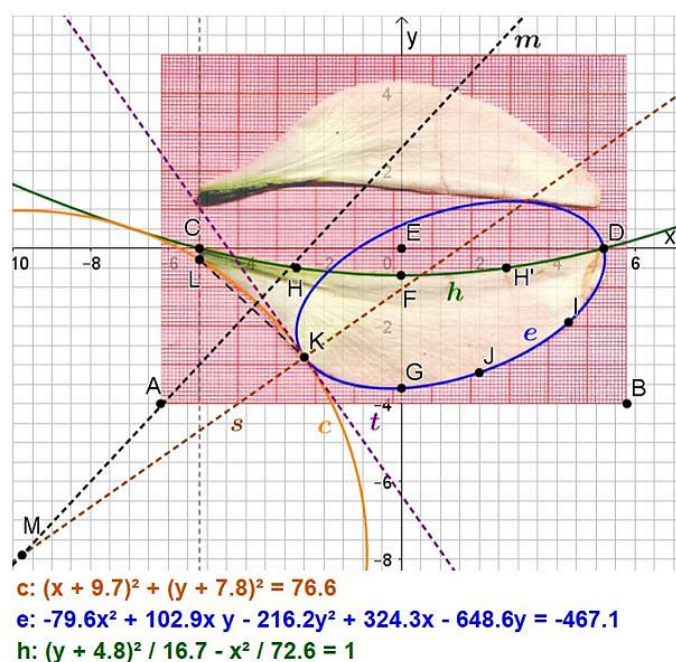


Imagen 3: Tépalos interior I en GeoGebra

A continuación, como modo de ejemplo se explicará el proceso para contornear el tépalos interior I, como muestra la Imagen 3. Suponiendo la simetría del tépalos, se delimita la forma de la sección de bordes más definidos, trazando los puntos C y D del eje x como extremos longitudinales. Para determinar la curva que contornea el borde superior, se dibuja el punto F como la intersección de éste con el eje y . Luego, se elige H arbitrariamente sobre este borde y se traza H' su simétrico respecto de y , de manera que con la herramienta “Cónica por cinco puntos” se obtiene la rama de hipérbola h que pasa por C, H, F, H' y D , que se ajusta al contorno del borde superior.

Visualizando un cambio en la curvatura en la silueta del borde superior, el mismo puede delimitarse con cónicas tangenciales, trazando arbitrariamente los puntos I, J, G (sobre el eje y) y K (indicador del cambio de curvatura). Así, se dibuja la elipse e que pasa por K, G, J, I y D y se mueven los puntos convenientemente para conseguir un mejor ajuste a la silueta del tépalos. Teniendo en cuenta propiedades de cónicas tangenciales, se traza la circunferencia c , tangente a la elipse en K .

Dado que la forma de los tépalos exteriores es distinta a la de los interiores, se puede delimitar la forma de los primeros siguiendo un proceso similar para el trazado de puntos y cónicas, teniendo en cuenta algunas variaciones importantes. Por ejemplo, en los tépalos exteriores la circunferencia c se degenera a una recta tangente a la elipse e , en el punto K .

Siguiendo procedimientos similares para contornear los tépalos, las hojas superior e inferior se delimitan con distintas elipses. Particularmente para el caso de la hoja inferior, el proceso para contornearla se simplifica por su simetría.

Esta construcción matemática acompaña la decisión metodológica tomada, al anticipar que la silueta de las hojas y secciones de tépalos, están formadas por arcos de cónicas que conforman el modelo matemático. Estas constituyen los moldes necesarios para armar la maqueta de Lilium.

Etapla 3: Modelo matemático. Para lograr una aproximación más precisa a los moldes que permitirán construir la maqueta de Lilium, en esta instancia se parametrizan las curvas.

El álgebra lineal, nos dice que si la ecuación de una cónica, contiene términos rectangulares (con factor $x.y$) o lineales (con factores x o y), estas se pueden transformar en otras por la aplicación de traslaciones y rotaciones, de manera que las ecuaciones resultantes sean canónicas. La Imagen 4 muestra los pasos para transformar la elipse e del tépalo interior I en otras, con el fin de conseguir la parametrización de curvas.

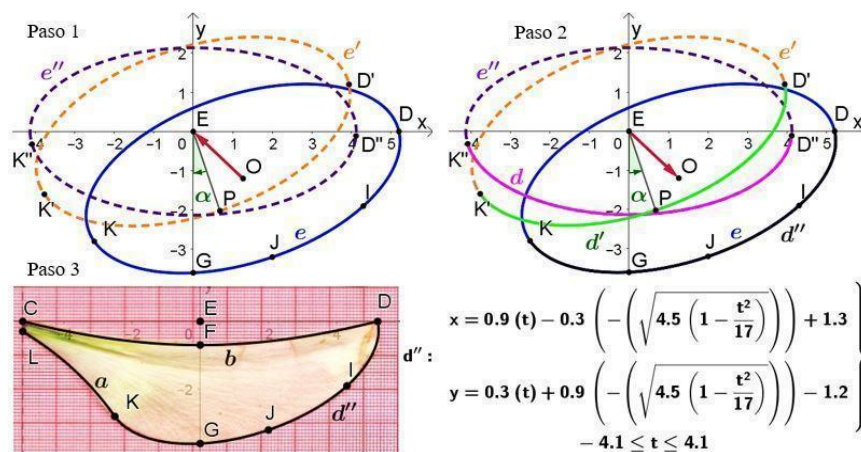


Imagen 4: Parametrización del tépalo exterior I

Análogamente, se obtienen las parametrizaciones de las curvas que se ajustan a la forma y dimensiones del tépalo interior II, tépalos exteriores 1, 2 y 3, y de la hoja inferior. Para el tépalo interior III y la hoja superior, resulta conveniente recurrir a las coordenadas polares, lo que representa otro grado de dificultad. Vale la pena mencionar que, si bien se pierde precisión en la longitud de los arcos buscados, la forma se preserva.

De esta manera, se logra la construcción del modelo para la flor de Lilium, a partir del cual se pueden obtener los moldes para construir la maqueta. Para ello, se ocultan todos los puntos y etiquetas de la construcción realizada en el Paso 3, y mediante exportación de imagen se imprimen los moldes en escala 1:1. La Imagen 5 muestra de manera esquemática los moldes y una foto de la maqueta de Lilium.

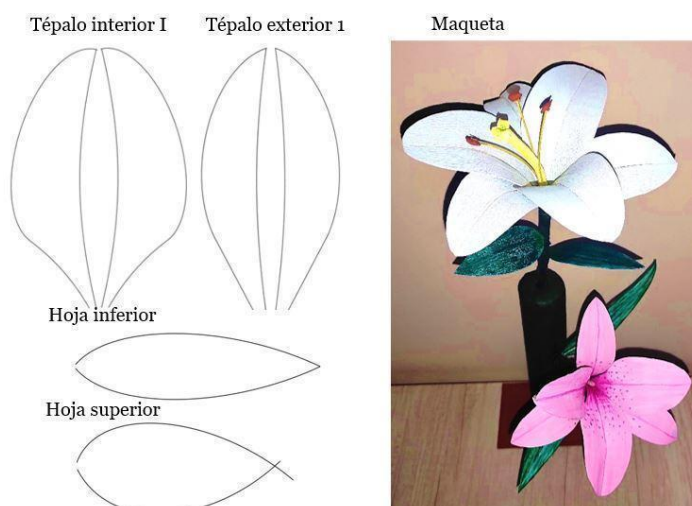


Imagen 5: Moldes y maqueta de Lilium

Resultados

En la tarea de reconstruir un Lilium matemáticamente, fue necesario realizar pruebas de ensayo y error, con la finalidad de arribar a un mejor resultado sobre la aproximación a las formas y tamaños presentes en la planta. En esta labor, se destaca el empleo de diferentes recursos tecnológicos como apoyo para la puesta en práctica de conocimientos matemáticos.

El modelo logrado, posibilita verificar simetrías, identificar cambios de curvatura con curvas tangenciales, y plantear un método de medición como puede apreciarse en la Imagen 6. Así, se pudo comprobar que en los tépalos interiores el cambio de curvatura en su silueta se produce a 2.7 cm respecto de su base. También, al medir el largo y el ancho de los tépalos, pudo apreciarse que el ancho de su superficie alcanza un máximo en el punto medio de su longitud.

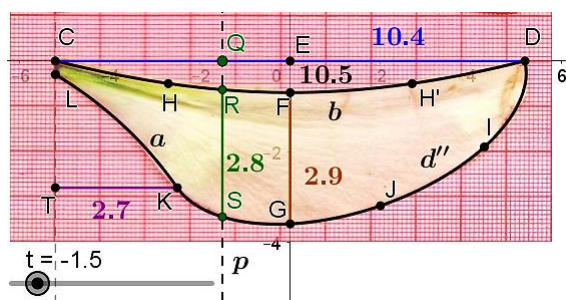


Imagen 6: Ejemplo de medición de un tépalo interior

Nuevas reformulaciones en el modelo, posibilitarían predecir más resultados y con un mayor grado de aproximación, que contemple las variaciones de formas y tamaños entre distintos Lilium, con vías a optimizar la recolección de datos biométricos como el área de flores y hojas. Es por ello que el modelo se encuentra sujeto a modificaciones, que aporten a la convalidación del mismo.

Desde el punto de vista educativo, en la resolución de este problema de modelación matemática se visibiliza un enfoque diferente para el estudio geométrico y algebraico de las cónicas. La obtención de un modelo para un objeto cotidiano, como lo es la flor de Lilium, motiva el aprendizaje y despierta el interés y la curiosidad sobre la presencia de la matemática en otros ámbitos del conocimiento.

Conclusiones

Dada la presencia de las tecnologías en la producción de conocimiento científico, tiene sentido plantear una enseñanza – aprendizaje de las ciencias en general, y de la matemática en particular, donde las tecnologías adquieran un rol estratégico (Villarreal, 2018). En este sentido, la modelación matemática se presenta como una metodología que favorece el diseño de secuencias didácticas en las que se integren matemática, otras áreas del conocimiento, creatividad y habilidades para trabajar con diferentes recursos tecnológicos.

En la resolución del problema planteado, pudo apreciarse los diferentes grados de complejidad y rigurosidad matemática alcanzados en el diseño de un modelo de Lilium, desde un enfoque interdisciplinario. Este hecho, despierta el interés por diseñar y ejecutar, en el futuro, acciones de formación docente a los fines de involucrarlos en el uso creativo de la tecnología para la enseñanza de la matemática. Así

mismo, aportaría en investigaciones que indaguen sobre los niveles de alfabetización en competencias digitales de docentes y estudiantes. Tal como se mencionó en la introducción, la puesta en práctica, evaluación y análisis sobre la implementación de esta experiencia, se abordarán en futuras comunicaciones.

Bibliografía

- Biembengut, María Salet y Hein, Nelson** (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. *Epsilon*, 38, 209-222. https://unamat.files.wordpress.com/2012/11/modelacion_mate23.pdf
- Font Quer, Pío** (2001). *Diccionario de botánica*. Ediciones Península.
- Gómez-Chacón, Inés María** (2011). Modelización matemática en contextos tecnológicos (documento digital). <http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/modelizaciones/modelizacion-1.pdf>
- Hein, Nelson y Biembengut, Maria Salet** (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas (documento digital). <http://funes.uniandes.edu.co/16622/1/Hein2006Modelaje.pdf>
- Learning Team** (2020, 9 noviembre). Burbules: enseñar y aprender en el nuevo escenario educativo (Vídeo de YouTube). <https://www.youtube.com/watch?v=Ko47fTWKr3E>
- Lion, Carina** (2020). *Aprendizaje y tecnologías: Habilidades del presente, proyecciones de futuro*. NOVEDADES EDUCA.
- Novomisky, Sebastián** (2020). La marca de la convergencia. Medios, tecnologías y educación: Doce ensayos en busca de una narrativa. Universidad Nacional de La Plata <https://doi.org/10.35537/10915/120967>
- Özen, Fazil, Temeltaş, Haci y Aksoy, Özlem** (2012). The anatomy and morphology of the medicinal plant, *Lilium candidum* L. (Liliaceae), distributed in Marmara region of Turkey. *Pak. J. Bot.*, 44(4), 1185 – 1192.
- Villarreal, Mónica** (2018). Pensar-con-tecnologías y...educar-con-tecnologías. En M. Occelli, L. García Romano, N. Valeiras y M. Quintanilla (Eds.) *Las tecnologías de la información y la comunicación como herramientas mediadoras de los procesos educativos. Volumen I: Fundamentos y Reflexiones* (pp.56-71). Editorial Bellaterra Ltda.

Innovar en la formación docente: Integración de contenidos estadísticos y geofísicos a través del enfoque STEAM

AGUSTINA CASCO ALBERINO

agustina.casco@uns.edu.ar

BEATRIZ SUSANA MARRÓN

beatriz.marron@uns.edu.ar

SANDRA ANALÍA HERNÁNDEZ

sandra.hernandez@uns.edu.ar

Universidad Nacional del Sur (UNS)

Resumen

La propuesta innovadora y el análisis respectivo presentados en esta comunicación forman parte del trabajo realizado por una estudiante avanzada del Profesorado en Matemática, en el marco de una beca de estímulo a las vocaciones científicas EVC-CIN, en la cual aborda el tema: *Estudios de ondas sísmicas desde un enfoque STEAM*. La intervención pedagógica se realizó en la asignatura Probabilidad, variable aleatoria y estadística dictada para estudiantes universitarios, de segundo año, de las carreras Ingeniería Electrónica y Licenciatura en Geofísica en la que se promueve la alfabetización estadística para la ciudadanía. Comprender y analizar la incertidumbre y los datos estadísticos son esenciales a la hora de tomar decisiones responsables tanto en el entorno sociocultural como medioambiental.

Palabras clave: ideas estadísticas fundamentales / profesores de matemática / innovación educativa / enfoque STEAM / ondas sísmicas

Introducción

En el contexto educativo actual, innovar, contextualizar y motivar al estudiantado representan desafíos no solo para docentes en ejercicio sino también en formación, independientemente del área temática o del nivel académico.

Carvajal et al (2024) consideran que:

El punto de partida para el desarrollo y evaluación de una competencia profesional para profesores de matemáticas debe considerar tareas que producen la percepción de un problema profesional que se quiere resolver (Seckel y Font, 2015). En esta situación, el futuro profesor debe movilizar habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica (o acción) que intente dar solución al problema. (p.41).

La estadística desempeña un papel fundamental en la formación inicial de los estudiantes de ingeniería y geociencias. Sin embargo, muchas veces el alumnado la percibe como una disciplina compleja, abstracta y distante de su futura práctica profesional. Esta percepción genera una falta de motivación para su estudio, exacerbada por la escasa integración que suele existir entre la estadística y otras materias dentro del plan de estudios.

Al respecto, Zapata-Cardona (2018) expone que:

La tradición en la enseñanza de la estadística ha privilegiado el uso de tareas en contextos hipotéticos con datos artificiales —no auténticos— que tienen muy poca relación con el mundo del estudiante y con fenómenos críticos de la sociedad. (p.31).

Atendiendo a esta problemática, se presenta la intervención pedagógica realizada en la asignatura *Probabilidad, variable aleatoria y estadística* dictada para estudiantes universitarios, de segundo año, de las carreras Ingeniería Electrónica y Licenciatura en Geofísica. La propuesta innovadora y el análisis respectivo presentados en esta comunicación forman parte del trabajo realizado por una estudiante avanzada del Profesorado en Matemática, en el marco de una beca de estímulo a las vocaciones científicas EVC-CIN 2022, en la cual aborda el tema: *Estudios de ondas sísmicas desde un enfoque STEAM*. La selección de esta temática, se fundamenta en su importancia en el contexto social, educativo y ambiental. En particular, se analizan los Objetivos del Desarrollo Sostenible (ODS) y sus metas desde la óptica

de la educación ambiental, poniendo especial énfasis en el ODS 13 (acción por el clima). Puntualmente, la meta 13.3 establece mejorar la educación, la sensibilización y la capacidad humana e institucional respecto de la mitigación del cambio climático, la adaptación a él, la reducción de sus efectos y la alerta temprana. (ODS 13, 2015).

Se aborda el estudio de la sismología desde aspectos vinculados a la ciencia, la tecnología, la ingeniería, el arte y la matemática (STEAM), con el propósito de posicionar el saber sobre las ondas sísmicas como contenido científico de interés social y ambiental y aportar a su implementación en distintas áreas y diferentes niveles educativos.

Fuertes-Camacho *et al.* (2019) pone de manifiesto la importancia de la alfabetización estocástica como componente fundamental de la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS). Comprender y analizar la incertidumbre y los datos estadísticos son esenciales a la hora de tomar decisiones responsables tanto en el entorno sociocultural como medioambiental.

Este estudio presenta un enfoque innovador en la enseñanza de estadística descriptiva y pruebas de hipótesis mediante la integración de datos reales sobre sismos. En tal sentido, la propuesta se dirige en particular a estudiantes de Ingeniería Electrónica y de Licenciatura en Geofísica, con el propósito de fortalecer su comprensión y habilidades en aspectos fundamentales de la estadística en el contexto de las ciencias de la tierra y la ingeniería.

Este escrito se estructura en cuatro apartados. En primer lugar, se realiza un recorrido por las teorías que contribuyen a fundamentar la propuesta. En segundo lugar, se aborda la metodología de trabajo empleada y las herramientas utilizadas para recopilar y analizar datos. El tercer apartado, refiere a la discusión de los resultados obtenidos a partir de la implementación de la propuesta. Y, por último, se realizan reflexiones didácticas que permiten analizar el impacto de la innovación en la formación de los futuros profesionales.

Marco teórico

Dado que el estudio de las ondas sísmicas requiere de un abordaje interdisciplinar donde confluyen aspectos fisicoquímicos, geofísicos y matemáticos, se traba-

ja desde el enfoque STEAM, acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics (en castellano CTIAM: Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemática). Este enfoque interdisciplinar y aplicado, que pone en consideración los puntos en común de cada una de estas áreas del conocimiento, promueve el desarrollo de habilidades requeridas en la sociedad actual (Zamorano-Escalona, García-Cartagena y Reyes-González, 2018; García-Cartagena, Reyes-González y Burgos Oviedo, 2017), poniendo en práctica el pensamiento crítico, la autonomía, el trabajo colaborativo y la capacidad de afrontar situaciones nuevas (López-Simó, Couso-Lagarón, y Simarro-Rodríguez, 2020).

Respecto de la importancia de considerar el enfoque STEAM, Oliveros-Ruiz, Vargas-Osuna, Cabrera-Cordoba y Garcia Angel, (2018) postulan que:

A diferencia de los modelos tradicionales de enseñanza, los educadores que utilizan el marco de STEAM unen las disciplinas, aprovechando la sinergia dinámica entre el proceso de modelado y el contenido de matemáticas y ciencias para borrar las fronteras entre las técnicas de modelado y el pensamiento científico/matemático.

Este enfoque holístico, en el que convergen diversas disciplinas, necesita de docentes que se sientan capacitados ante el desafío de contribuir a la formación de ciudadanos conscientes, de la importancia de la acción por el clima, sus alcances y posibles vías de prevención, y que posea los conocimientos, actitudes, motivaciones y competencias necesarias para aportar tanto en forma individual como colectiva a la resolución de las problemáticas actuales y/o a la prevención de otras que podrían sobrevenir.

Acerca de la naturaleza didáctica del movimiento STEAM, Perales-Palacios y Aguilera (2020) expresan que el rol docente involucra la selección y el diseño de situaciones problemáticas reales, considerando los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) de las disciplinas STEAM útiles para su resolución.

A raíz de la necesidad de conocer sobre los efectos del cambio climático para lograr mitigar su impacto, sentido que compete al Objetivo de Desarrollo Sostenible 13: Acción por el Clima, se realizó un estudio relacionado a las ondas sísmicas en vínculo directo con este desafío global. Según Robledo *et al.* (2015), los movimientos sísmicos pueden provocar la emisión de gases y material magmático, lo que tiene repercusiones en el equilibrio ambiental.

Por su carácter imprevisible, los sismos son una de las principales causas de desastres y catástrofes en el mundo. Si bien en las últimas décadas se han realizado muchos avances en sismología, la falta de predicción del suceso, así como de la magnitud de sus consecuencias, muestran la necesidad de alfabetizar científicamente al respecto (Robledo *et al.*, 2015). En tal sentido, la estadística juega un rol fundamental en la interpretación de los datos recogidos que puedan advertir a la población. Así, la estadística descriptiva resume la información contenida en los datos recogidos y la estadística inferencial demuestra asociaciones y permite hacer comparaciones entre características observadas (Walpole, Myers & Myers, 2013).

En el marco de la cátedra *Probabilidad, variable aleatoria y estadística* en donde se realizó la intervención educativa, se enfatiza la importancia de abordar la estadística más allá de la temática exigida por el currículo, es decir, se promueve la concientización de la necesidad de una *alfabetización estadística para la ciudadanía*.

La *alfabetización estadística*, también llamada *cultura estadística*, es un término amplio, tal como establecen Contreras y Molina-Portillo (2019) en su estudio, remite al papel de la estadística en la educación general básica que cualquier ciudadano debe poseer.

En particular, adherimos a la idea de Gould (2017), quien expresa que todos los estudiantes deben ser educados para realizar la doble función de productor y consumidor de estadísticas. Aboga por una definición de alfabetización estadística que incluya:

- comprender quién recopila los datos, por qué y cómo se recogen;
- saber analizar e interpretar datos de muestras tanto aleatorias como no aleatorias;
- comprender las cuestiones de privacidad y propiedad de los datos;
- saber crear representaciones descriptivas básicas de los datos para responder a las preguntas sobre procesos de la vida real;
- comprender la importancia de la procedencia de los datos; entender cómo se almacenan los datos;
- comprender cómo pueden variar las representaciones en las computadoras y por qué los datos a veces se alteran antes del análisis;
- y por último comprender algunos aspectos del modelado predictivo.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), en los estándares presentados para el nivel secundario (2020) respecto a *Conceptos esenciales en Estadística y Probabilidad* (inciso 1d) requiere asegurar una enseñanza y un aprendizaje tal que:

Los candidatos demuestran y aplican su comprensión del pensamiento estadístico y los principales conceptos, procedimientos, conocimientos y aplicaciones de la estadística y la probabilidad, incluido cómo la resolución de problemas estadísticos y la toma de decisiones dependen de la comprensión, explicación y cuantificación de la variabilidad en un conjunto de datos para tomar decisiones. Entienden el papel de la aleatorización y el azar en la determinación de la probabilidad de eventos. Los conceptos esenciales en estadística y probabilidad incluyen alfabetización cuantitativa, visualización y resumen de datos, inferencia estadística, probabilidad y problemas aplicados. (NCTM Standards, 2020, p.56)

En la educación universitaria, la estadística dota a los futuros profesionales de herramientas invaluable para modelar fenómenos, analizar datos y tomar decisiones acertadas en entornos de incertidumbre. La formación en esta disciplina exige una visión dinámica de los contenidos, donde el conocimiento estadístico se erige como base sólida y progresiva para desarrollar el pensamiento complejo. Esto permite optimizar procesos, comprender el comportamiento de las variables y predecir su evolución futura con mayor exactitud. En este contexto, la enseñanza de la estadística para estudiantes de ingeniería y de geofísica debe enfatizar la estrecha relación entre la estadística descriptiva y la inferencial. Fomentar esta sinergia, brinda a los estudiantes las habilidades esenciales, no sólo para comprender y caracterizar datos, sino también para extraer conclusiones relevantes y tomar decisiones informadas, respaldadas por evidencia empírica. Este enfoque integral robustece su capacidad para enfrentar los desafíos de la ingeniería con rigor y precisión.

Metodología de trabajo

La intervención pedagógica se realizó en la asignatura *Probabilidad, variable aleatoria y estadística* dictada para estudiantes universitarios, de segundo año, de las carreras Ingeniería Electrónica y Licenciatura en Geofísica.

La propuesta se estructuró en cuatro etapas ordenadas cronológicamente de la siguiente manera:

□ **Primera etapa:** En primer lugar, se realizó una exposición dialogada en la que se presentaron conceptos pertinentes a las ondas sísmicas, sus características y los tipos de ondas que brindan información sobre los terremotos. Se hizo hincapié en la importancia social y ambiental de estos fenómenos como así también en la importancia de abordar la problemática desde diferentes áreas del conocimiento. En ese momento, la clase se mostró predispuesta a atender, intervenir y realizar consultas referidas a la temática.

□ **Segunda etapa:** Una vez transitados los conceptos introductorios necesarios, se presentaron, a modo de ejemplo, algunos datos sobre un sismo ocurrido en la frontera de Argentina con Chile, tomados desde tres estaciones sismográficas distintas ubicadas en Jujuy, Salta y la frontera con Chile. Asimismo, se mostró cómo fueron obtenidos los datos, su dispersión espacial, y la profundidad del epicentro registrado en cada uno de ellos. Se generó un espacio de intercambio con los estudiantes, donde realizaron aportes, dieron a conocer sus inquietudes y sumaron contribuciones sobre los conocimientos con los que contaban.

Los datos del sismo, tomado como ejemplo, fueron recopilados de la plataforma del IRIS (Incorporated Research Institutions for Seismology) brindando las variables latitud, longitud, profundidad y magnitud.

La aplicación IRIS Station Monitor, disponible tanto en App Store como en Google Play, proporciona acceso continuo a movimientos telúricos en tiempo real desde cientos de ubicaciones en todo el mundo. Estos datos, recopilados por sismógrafos, miden el movimiento generado por terremotos, erupciones volcánicas y otras fuentes sísmicas. Al ver los registros de varias estaciones, se puede explorar cómo cambia el movimiento del suelo en varios lugares en relación con el terremoto.

Las variables fueron analizadas con distintas herramientas como los programas InfoStat (Di Rienzo et al, 2020) y Microsoft Excel.

□ **Tercera etapa:** Se solicitó que, teniendo en cuenta el análisis de los datos brindados y atendiendo a lo abordado en la asignatura *Probabilidad, variable aleatoria y estadística*, realicen un trabajo práctico integrador, que constaba de dos puntos.

En el primer punto se les solicitó analizar y describir las características de las diferentes estaciones sismográficas ubicadas en Jujuy, Salta y la frontera con Chile, utilizando herramientas gráficas que permitieran su comparación. Además, debían responder a las siguientes tres preguntas: ¿Podrías decir que las tres estaciones tienen mediciones similares?, ¿Hay datos que pueden ser considerados anómalos?, ¿Y sobre la distribución de las variables, se podría suponer que tienen distribución gaussiana?

En el segundo punto se les planteaba la siguiente situación: *“Un adecuado sistema de detección y alerta temprana de sismos contribuye a la protección de la población y sus bienes, reduciendo el impacto de estos eventos naturales y promoviendo la resiliencia frente a ellos. En la ciudad de Salta se instaló uno de estos sistemas que, si la profundidad es estadísticamente menor a 230 kilómetros, comienzan protocolos de contención ante el peligro que los movimientos telúricos afecten un dique de la región. Analizando los datos de esta muestra, ¿tomarías la decisión de iniciar el protocolo de contención?”*

Como modalidad de trabajo, se propuso que la propuesta educativa debía realizarse en forma asincrónica, individual o de a pares.

Para la acreditación, cada estudiante o par de estudiantes (de acuerdo a lo que hubieran optado), debía cumplir con los siguientes requisitos:

- 1) Elaborar un documento que contenga las respuestas de los puntos planteados en la consigna, el cual debía subirse a plataforma Moodle en la Tarea: *Trabajo Final Integrador de Estadística*, especificada para tal fin, con fecha y hora límite de entrega.

- 2) Desarrollar un video explicativo, usando alguna de las aplicaciones disponibles para su creación (PowerPoint, Canva, Genial.ly, otras), para comunicar los resultados y conclusiones obtenidas. El video, de una duración de entre 3 y 5 minutos, debía ser compartido en el Foro: *Conclusiones y Análisis Estadístico de Datos*, creado para tal fin en la plataforma Moodle.

□ **Cuarta etapa:** Por último, se les pidió que completaran una encuesta de opinión anónima respecto a sus apreciaciones personales en relación a la propuesta, a la intervención pedagógica y al manejo de los datos. También se les consultó acerca de las herramientas utilizadas para el desarrollo del trabajo y de cuáles fueron las dificultades que se les presentaron a la hora de elaborar el informe.

La encuesta se constituyó en cuestionarios ad hoc, con preguntas abiertas y cerradas, distribuidas vía Moodle.

Discusión de resultados

Se presentaron siete trabajos, de los cuales 4 fueron realizados de a pares y tres en forma individual.

En cuanto a los temas específicos de Estadística, la mayoría de los trabajos presentaron gráficos de dispersión para realizar un análisis exploratorio de los datos, histogramas para evaluar los supuestos de normalidad, y Box-Plots para identificar datos anómalos. En un caso particular, se empleó un gráfico de dispersión conjunto para comparar variables por regiones, así como un gráfico que relaciona la profundidad con la magnitud para analizar posibles relaciones entre ambas. En todos los casos, los estudiantes respondieron a la pregunta planteada mediante pruebas de hipótesis. Para poder tomar una decisión, los estudiantes discernieron qué variables tenían una distribución Normal o gaussiana mediante la prueba de Shapiro-Wilk.

A modo de ejemplo se presentan las conclusiones expuestas por uno de los grupos que trabajó de a par:

En este informe, nos sumergimos en la comprensión de los terremotos desde una perspectiva probabilística, explorando las variables que caracterizan estos fenómenos tanto gráfica como analíticamente. La predicción precisa de terremotos, basada en datos limitados y no replicables, emerge como una herramienta crucial para potencialmente salvar vidas humanas.

A través del método científico, abordamos la prueba de hipótesis, destacando la importancia de la hipótesis nula (H_0) y alternativa (H_1) en la toma de decisiones. El análisis se centró en el parámetro estadístico de la media (μ), utilizando herramientas como la distribución normal y la prueba de hipótesis para inferir conclusiones significativas.

El caso de estudio específico abordó la amenaza sísmica en Chile, Jujuy y Salta, empleando datos de sismógrafos para analizar variables como latitud, longitud, profundidad y magnitud. La exploración gráfica reveló similitudes y diferen-

cias entre las regiones, mientras que el análisis de datos anómalos proporcionó insights valiosos.

Los resultados visuales, desde gráficos de torta hasta diagramas de caja y bigotes, destacaron la diversidad en la distribución de las variables estudiadas. Los histogramas y gráficos de barras proporcionaron una visión detallada de la frecuencia relativa de la profundidad y magnitud, permitiendo caracterizar la naturaleza de los sismos en cada región (Imágenes 1).

En resumen, este informe presenta un enfoque integral para abordar la amenaza sísmica, utilizando herramientas probabilísticas y estadísticas para comprender la complejidad de los terremotos. Los métodos aplicados brindan una base sólida para futuras investigaciones y medidas de prevención en regiones propensas a la actividad sísmica.

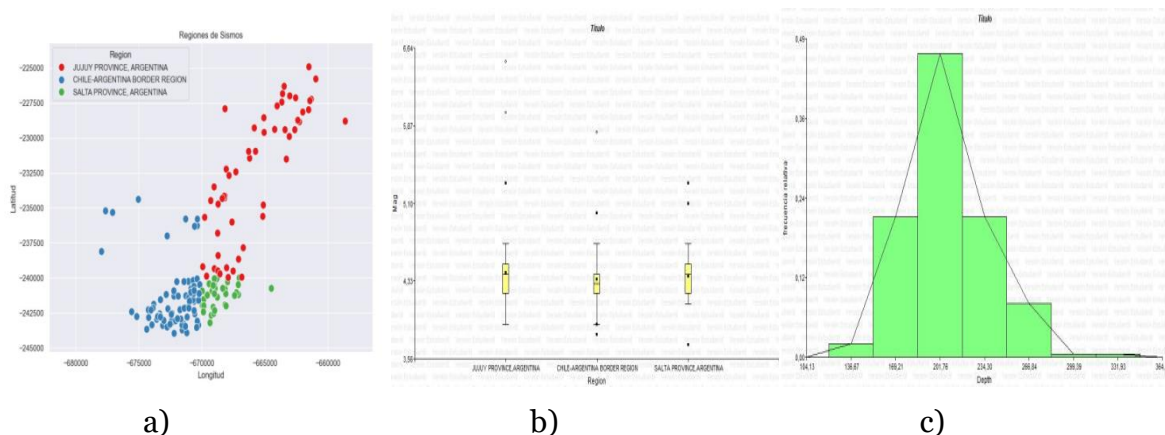


Imagen 1. a) Gráfico de dispersión por regiones. **b)** Diagramas de cajas. **c)** histograma de la profundidad

Los resultados de la encuesta realizada en la cuarta etapa de la propuesta evidenciaron una apreciación positiva por parte de los estudiantes tanto hacia la propuesta innovadora implementada, como hacia la participación de la docente de matemática en formación.

Respecto a las dificultades encontradas en la realización del trabajo integrador, el 50% de los estudiantes (4 cuatro) expresaron que hacer el video les resultó difícil debido a distintas justificaciones tales como falta de tiempo, poco conocimiento o poca experiencia sobre producciones audiovisuales.

Dos estudiantes dijeron haber tenido dificultades al inicio con el manejo del In-foStat por considerarlo a veces poco intuitivo.

Un estudiante manifestó que su mayor dificultad la tuvo en el análisis gráfico de los datos, ya que al momento de realizar el informe *“sentí que esos conocimientos estaban muy lejanos en el tiempo”*.

Por último, una estudiante declaró que le resultó sencilla la parte de determinar los puntos anómalos, al igual que identificar las distribuciones, la prueba de hipótesis, aclarando que: *“Considero que esto fue así porque en las clases, estos conceptos fueron muy bien explicados y puede plasmar el trabajo integrador todo lo visto en clase. Además de poder terminar de entender bien los conceptos vistos. También facilitó la realización del trabajo utilizar la aplicación InfoStat”*.

Reflexiones didácticas

A través de la innovación propuesta por la estudiante avanzada de Profesorado en Matemática en el marco de su beca y de la intervención pedagógica realizada junto a la docente universitaria, se lograron integrar contenidos estadísticos y geofísicos abordados desde el enfoque STEAM. Los estudiantes pudieron comprender la importancia de la alfabetización estadística, entendiendo la relevancia de los conceptos de estadística descriptiva e inferencial y su integración en el estudio de las ondas sísmicas. Se pudo evidenciar cómo estos temas de Estadística, aprendidos en la asignatura, son fundamentales para comprender y analizar datos sísmicos de manera efectiva. En definitiva, los estudiantes fueron capaces de comprender que la relación entre la estadística descriptiva e inferencial es crucial, ya que la primera permite entender y resumir los datos, mientras que la segunda brinda las herramientas necesarias para hacer predicciones, tomar decisiones y sacar conclusiones significativas a partir de esos datos. Por último, se logró poner de manifiesto la importancia de la alfabetización estocástica como componente fundamental de la Educación para el Desarrollo Sostenible.

Agradecimientos

Las autoras agradecen al Consejo Interuniversitario Nacional (CIN) el financiamiento de la Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas (Beca EVC-CIN) otorgada a la estudiante del Profesorado en Matemática coautora de este trabajo. Asi-

mismo, se agradece la financiación del PGI-24/Q113 en el marco del cual se realiza la beca.

Bibliografía

- Carvajal, Silvina, Giménez, Joaquín, Font, Vicenç y Sánchez, Alicia** (2024). Assessing Preservice Teachers' Digital Creativity in Mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, 13(1), 38-58.
- Contreras-García, José y Molina-Portillo, Elena** (2019). Alfabetización estadística. 25 años de la evolución de un término. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 100, 35-38.
- Di Rienzo, Julio, Casanoves, Fernando, Balzarini, Mónica, Gonzalez, Laura, Tablada, Elena y Robledo, Carlos** (2020). InfoStat (software estadístico). <http://www.infostat.com.ar>
- Fuertes-Camacho, María, Graell-Martín, Mariona, Fuentes-Loss, Mariana y Balaguer-Fàbregas, María** (2019). Integrating Sustainability into Higher Education Curricula through the Project Method, a Global Learning Strategy. *Sustainability*, 11, 767.
- García-Cartagena, Yonnhatan, Reyes-González, David y Burgos Oviedo, Fabián** (2017). Actividades STEM en la formación inicial de profesores: nuevos enfoques didácticos para los desafíos del siglo XXI. *Diálogos educativos*, 18(33), 35-46.
- Gould, Robert** (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22-25.
- IRIS** (Incorporated Research Institutions for Seismology). <http://ds.iris.edu/>
- López-Simó, Víctor, Couso-Lagarón, Digna y Simarro-Rodríguez, Cristina** (2020). Educación STEM en y para el mundo digital. *Revista De Educación a Distancia (RED)*, 20(62).
- National Council of Teachers of Mathematics - NCTM Standards** (2020). Secondary. Standards for the Preparation of Secondary Mathematics Teachers.
- ONU (2015)**. Objetivos de Desarrollo Sostenible. ODS. <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>
- Oliveros-Ruiz, María, Vargas-Osuna, Lidia, Cabrera-Cordoba, Eduardo y Garcia-Angel, Virginia** (2018). Experiencia de una feria de Ciencia y su impacto en la enseñanza de estudiantes de Ingeniería. *Revista de Sistemas y Gestión Educativa*, 5(16), 1-5.

- Perales-Palacios, Francisco y Aguilera, David** (2020). Ciencia-Tecnología-Sociedad vs. STEM: ¿evolución, revolución o disyunción? *Ápice. Revista de Educación Científica*, 4(1), 1-15.
- Seckel, José y Font, Vicenç.** (2015). Competencia de análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemática de Chile. En P. Scott & A. Ruíz (Eds.) *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 1: Formación Inicial para Primaria* (pp. 10-18). Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Robledo, Silvia, Alessandro, Moira, Bianco, Franco, Brega, Virginia, Espinosa, Diego, Grasso, Carmen, Oliveira, Mónica, Pucciarelli, Natalia, Charrón, Jonathan, Alegre, Federico y Lo Vecchio, Andrés** (2015). *Manual de educación sobre riesgos ambientales*. Ediciones Biblioteca Digital UNCuyo.
- Walpole, Ronald, Myers Raymond y Myers Sharon** (2013). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Pearson Educación.
- Zamorano-Escalona, Tomás, García-Cartagena, Yonnhatan y Reyes-González, David** (2018). Educación para el sujeto del siglo XXI: principales características del enfoque STEAM desde la mirada educacional. *Contextos: Estudios De Humanidades y Ciencias Sociales*, (41).
- Zapata-Cardona, Lucía** (2018). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana*, (10), 30-41.

Análisis ontosemiótico de una tarea de divisibilidad

FLORENCIA CANALE

fcanale@dc.exa.unrc.edu.ar

CLAUDINA CANTER

ccanter@exa.unrc.edu.ar

MARIANELA SOSA

msosa@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto - UNRC.

Resumen

Este trabajo gira en torno al abordaje de uno de los grandes desafíos que enfrentan los futuros docentes en matemática al diseñar las tareas que proponen a sus estudiantes en el aula; realizar un análisis a priori desentrañando la complejidad ontosemiótica de las tareas propuestas. En este caso, se analizó una tarea relacionada a la escritura de los múltiplos de un número utilizando herramientas teórico – metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se identificaron objetos primarios, procesos duales y sus potenciales conflictos semióticos asociados. Este análisis proporciona a los docentes, particularmente en formación, herramientas para pensar y mejorar las planificaciones de las clases y la toma de decisiones en el aula, específicamente, en la planificación de “buenas” intervenciones docentes.

Palabras clave: análisis ontosemiótico / divisibilidad / formación docente / conflictos semióticos

Introducción

Las prácticas docentes que se realizan en el último año de la carrera enfrentan a los futuros profesores en matemática a diversos desafíos entre los cuales se encuentra la necesidad de conocer la complejidad de las tareas matemáticas que van a ser abordadas por los estudiantes. Tal como lo expresan Giacomone y Godino (2016) el análisis a priori de cada una de las tareas implementadas durante la formación docente, les permite a los practicantes tomar consciencia de las relaciones complejas entre los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, prever conflictos cognitivos y gestionar las dificultades efectivas en el aula.

La problemática que se abordará en este trabajo gira en torno a desentrañar la complejidad ontosemiótica de una de las tareas propuestas, ligada a la escritura de los múltiplos de un número, por una practicante del Profesorado en Matemática que se dicta en la Universidad Nacional de Río Cuarto. Para realizar el análisis se utilizaron herramientas teórico – metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

A continuación, se describe el marco teórico – metodológico utilizado para realizar el análisis ontosemiótico de una tarea donde se identifica los objetos primarios intervinientes y emergentes, procesos duales por los cuales se transita y potenciales conflictos semióticos ligados a dichos procesos. Finalmente, se plantea una reflexión acerca de las implicancias de este trabajo en la formación docente inicial.

Marco teórico

El EOS ha desarrollado un constructo teórico que permite la identificación de los objetos que intervienen y que emergen en una práctica matemática, los procesos que están implicados en ella, las relaciones que se ponen en juego, etc. Este trabajo se realiza en el marco de un enfoque cualitativo donde se utiliza una metodología de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas (Godino, 2002). La herramienta utilizada es la configuración epistémica y/o cognitiva ya que permite un nivel de análisis microscópico y sistemático de la actividad matemática. Ahora bien, ¿cómo se arma una configuración epistémica y/o cognitiva? Para ello Godino *et al.* (2007, p. 4) proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones)
- Propositiones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...)

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje¹ en que participan, pueden ser considerados desde diferentes facetas o dimensiones duales (personal-institucional, ostensivo-no ostensivo, expresión-contenido, extensivo-intensivo, unitario-sistémico). Estas dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos: institucionalización - personalización; generalización - particularización; descomposición - reificación; materialización/concreción - idealización/abstracción; representación - significación. Godino *et al.* (2007) postulan que este análisis centrado en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas, permite desvelar la complejidad ontosemiótica de las mismas como factor explicativo de potenciales conflictos semióticos y de los que se producen en su realización.

Análisis ontosemiótico de una tarea

En la imagen 1 se muestra la situación – problema analizada, la misma fue seleccionada de una secuencia propuesta por la practicante, dicha situación pertenece a un conjunto de tareas que favorece la construcción del concepto de múltiplo.

1 Consideramos la noción de juego de lenguaje como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. (Wittgenstein, 1953)

Tarea 9: Resuelve las siguientes consignas

- a) Si es posible, asigne cuatro valores a b para que $3.b$ sea múltiplo de 3.
- b) ¿Qué otros valores podrías asignarle a b para que $3.b$ sea múltiplo de 3?
- c) Si es posible, asigne cuatro valores a c para que $3.c$ sea múltiplo de 5.
- d) ¿Qué otros valores podrías asignarle a c para que $3.c$ sea múltiplo de 5?

Imagen 1: Tarea analizada

Cabe destacar que el objetivo específico de la discusión y reflexión sobre el inciso b) es avanzar en la construcción de una representación algebraica de la noción de múltiplo de un número y, respecto al debate del inciso d), poner a funcionar el nuevo significado de múltiplo -los múltiplos positivos de 3 se escriben como $3.b$ donde b toma como valor todos los números naturales- construido, supuestamente, a partir de la discusión anterior.

Para el estudio realizado por la practicante, junto a las docentes, la tarea fue dividida en cuatro unidades de análisis cada una de ellas secuencias de prácticas elementales, en la tabla 1 pueden observarse dichas secuencias con el uso y la intencionalidad que se le otorga en la práctica:

<i>Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea</i>	<i>Uso e intencionalidad de las prácticas</i>
1) $b = 1 \rightarrow 3.1$; $b = 2 \rightarrow 3.2$; $b = 3 \rightarrow 3.3$; $b = 4 \rightarrow 3.4$ Son múltiplos de 3 porque el 3 es uno de los factores de cada una de las multiplicaciones.	Determinar cuatro valores de b que cumplan que 3 por cada uno de esos valores sea múltiplo de 3.
2) Podría asignarle a " b " cualquier número natural ya que al ser el 3 un factor de dicha multiplicación, para cualquier valor natural que se le asigne a b , esa expresión va a ser múltiplo de 3.	Determinar para qué valores de b se cumple que $3.b$ es múltiplo de 3.
3) $c=5 \rightarrow 3.5$; $c=10 \rightarrow 3.10$; $c=15 \rightarrow 3.15$; $c=20 \rightarrow 3.20$ Son múltiplos de 5 porque uno de los factores de cada una de las multiplicaciones es múltiplo de 5.	Determinar cuatro valores de c que cumplan que 3 por cada uno de esos valores sea múltiplo de 5.
4) Podríamos asignarle a c cualquier número que sea múltiplo de 5 pues para que la expresión resulte múltiplo de 5, un factor de esa multiplicación tiene que ser múltiplo de 5.	Determinar para qué valores de c se cumple que $3.c$ es múltiplo de 5.

Tabla 1: Secuencias de prácticas elementales de la tarea y sus usos

A continuación, se presenta (a modo de ejemplo) mediante una tabla, el análisis ontosemiótico realizado a dos secuencias de la tarea: la secuencia 2 y 3 planteadas anteriormente. Cabe aclarar que, el sistema de prácticas correspondiente a la reso-

lución de la tarea en el cual se basa el análisis, pertenece a una resolución pretendida, donde la misma intenta dar solución poniendo a funcionar los conocimientos mínimos y necesarios disponibles.

La tabla 2, donde se presenta la configuración ontosemiótica de las prácticas 2 y 3, está organizada de la siguiente manera: en la primera columna se detallan los objetos primarios (disponibles y emergentes) puestos en juego en las prácticas realizadas; en la segunda columna se identifican los procesos duales por los cuales se transitan y, en la tercera columna se identifican potenciales conflictos semióticos asociados a los procesos por los cuales se transita. Sabiendo que tanto los procesos duales identificados como sus conflictos semióticos asociados guardan una relación directa planteamos una disposición en la escritura de la tabla que intenta reflejar esa correspondencia.

<i>Objetos referidos en las prácticas</i>	<i>Procesos duales por los que se transita</i>	<i>Conflictos semióticos asociados a los procesos duales</i>
Conceptos/ definiciones: <i>Disponibles:</i> - Número natural. - Multiplicación de números naturales. - Descomposición multiplicativa de números naturales. - Noción de múltiplo de un número, en particular la de múltiplo de 3, entendido como: Un número es múltiplo de 3 si al dividirlo por 3 se obtiene resto 0. Esta tarea habilita a poner a funcionar la noción de múltiplo de 3 entendida como "un número es múltiplo de 3 si el 3 aparece como factor en la descomposición multiplicativa de dicho número". - Noción de variable entendida como una letra que representa números que van variando. Emergentes: - La tarea habilita a la emergencia de una caracterización de los múltiplos de 3: los múltiplos positivos de 3 se escriben como $3.b$ donde b toma como valor cualquier número natural. Proposiciones/ propiedad-	<i>Representación- Significación:</i> - Este proceso está presente por ejemplo, cuando a la expresión "¿qué otros valores podrías asignarle a b..." se le otorga como contenido "cuáles son todos los posibles valores que se le puede asignar a b para que..." Particularización- Generalización: - Se transita por este proceso ya que a partir de considerar valores particulares que puede tomar b se generaliza afirmando que b puede tomar como valor cualquier número natural.	<i>Representación- Significación:</i> - Podría ocurrir que los estudiantes signifiquen a esta expresión como "nombrar algunos valores más que se le puede asignar a b para que $3.b$ sea múltiplo de 3", ya que el significado de todos para los estudiantes podría estar asociado a todos los números que ellos eligen para dar respuesta al ítem. Este significado condiciona el tránsito por el proceso de particularización - generalización que se pretende enfatizar. Particularización- Generalización: - Un posible conflicto puede darse a partir de generalizar los casos particulares tomados, por ejemplo, si los casos considerados son múltiplos de 3, podrían concluir que b puede tomar como valor cualquier múltiplo de 3 y esto los llevaría a dejar fuera posibles valores de b que verifican que $3.b$ resulta múltiplo de 3. - Otro posible conflicto es

des: <i>Emergentes:</i> - Para cualquier valor natural que se le asigne a b, $3.b$ resulta múltiplo de 3. Argumentos: <i>Emergentes:</i> - La tarea habilita a utilizar como argumento la noción de múltiplo de 3 entendida como, un número es múltiplo de 3 si el 3 aparece como factor en la descomposición multiplicativa de dicho número.	<i>Representación- Significación:</i> - Puede identificarse este proceso cuando a la expresión $3.b$ se la significa como "múltiplo de 3". - A la expresión "múltiplo de 3" se la significa como un número en el que está el 3 como factor en su descomposición multiplicativa. <i>Materialización- Idealización:</i> El ostensivo b materializa la idea de "variable" entendida como una letra que representa números que va variando.	que generalicen a partir de algunos casos particulares sin que haya una validación correspondiente de por qué para cualquier valor de b, $3.b$ resulta múltiplo de 3.
Conceptos/ definiciones: <i>Disponibles:</i> - Número natural. - Multiplicación de números naturales. -Descomposición multiplicativa de números naturales. -Noción de múltiplo de 5 en términos del criterio de divisibilidad del 5; noción de múltiplo de 5 entendido como un número que al dividirlo por 5 se obtiene resto cero; noción de múltiplo de 5 entendido como "un número es múltiplo de 5 si el 5 aparece como factor en la descomposición multiplicativa de dicho número". - Noción de variable entendida como una letra que representa números que van variando. Procedimientos <i>Disponibles:</i> - Multiplicación de dos números: - Reemplazar a c por cada valor considerado. - Multiplicar a cada valor de c tomado por 5. Argumentos: <i>Disponibles:</i>	<i>Representación- Significación:</i> - Se puede identificar este proceso cuando a la expresión "múltiplo de 5" se la significa como "un número que se puede escribir como 5 por algo" o como "un número en el que aparece el 5 como factor en su descomposición multiplicativa". <i>Particularización- Generalización:</i> - Se transita por un proceso de generalización - particularización ya que la tarea plantea que se le asignen cuatro valores a c, aquí c está funcionando como un general pero, al asignarle esos cuatro valores concretos (por ej: 5, 10, 15 y 20), cada uno de los valores considerados funcionan como particulares.	<i>Representación- Significación:</i> - Un posible conflicto asociado a este proceso puede ser que los estudiantes no le otorguen este significado a la expresión "múltiplo de 5" y la signifiquen en términos del criterio de divisibilidad de 5 o, sigan apegados a realizar el cálculo y obtener el resultado o, dividir el resultado de dicho producto por 5 y analizar el resto. Esta forma de entender la expresión $5.b$ se alejarían del significado de múltiplo que se pretende construir.

- El criterio de divisibilidad del 5 puede ser utilizado para argumentar que el resultado de cada una de las multiplicaciones es múltiplo de 5 porque termina en 0 o en 5. La noción de múltiplo de 5 mencionada anteriormente puede funcionar como argumento, es decir, dichas expresiones son múltiplos de 5 porque al dividir el resultado de cada una de las multiplicaciones por 5 se obtiene resto cero. La noción de múltiplo de 5 entendida como "Un número es múltiplo de 5 si el 5 aparece como factor en la descomposición multiplicativa de dicho número" también funciona como un argumento disponible.	Materialización- Idealización: - La idea de asignarle cuatro valores particulares a c se la materializa mediante los ostensivos $c = 5 \rightarrow 3.5$ $c = 10 \rightarrow 3.10$ $c = 15 \rightarrow 3.15$ $c = 20 \rightarrow 3.20$	Materialización- Idealización: - Un posible conflicto puede tener que ver con el tipo de materialización realizada al escribir la respuesta, por ejemplo, si sólo se quedaran en decir los posibles valores de c y respondieran "5, 10, 15 y 20", podría obstaculizar la argumentación de por qué, para esos valores de c, $3.c$ resulta múltiplo de 5. Por otra parte, si para dar respuesta se agregara el signo igual y el resultado de la multiplicación, por ejemplo: $c = 15 \rightarrow 3.15 = 45$, probablemente se corra el riesgo de poner la mirada en el resultado "45" y no en la expresión "3.15". Con este tipo de materialización entra un nuevo <i>juego de lenguaje</i> que podría condicionar el significado pretendido de múltiplo que se intenta construir.

Tabla 2: Análisis ontosemiótico de las prácticas elementales 2 y 3

Por último, cabe mencionar que al abordar el inciso d, este proceso de estudio se enriquece cognitiva y epistémicamente con el necesario tránsito por el proceso de Descomposición-reificación, ya que resulta necesario para su resolución descomponer la expresión $3.c$ para poder analizar la condición reificada de los valores que puede asumir la variable c para que dicha expresión resulte múltiplo de 5. También es necesario significar a la expresión $3.c$ como un todo (unificar/reificar) para asegurar que, para esos valores de c determinados, la expresión $3.c$ resulta múltiplo de 5.

A modo de síntesis

El análisis ontosemiótico realizado permite tomar consciencia de lo que la tarea exige y lo que habilita a hacer, ya que, por ejemplo, a partir del análisis se puede evidenciar que el par de incisos a) y b) no obligan a la emergencia de la representación de los múltiplos positivos de 3, pues la consigna exige sólo nombrar otros posibles valores de b para que la expresión $3.b$ resulte múltiplo de 3. Este hecho se

constituye en un conflicto semiótico asociado al proceso de particularización - generalización, el cual es indispensable transitar debido a que es a partir del mismo que emerge la relación de que asignándole cualquier valor natural a la variable b la expresión $3 \cdot b$ resulta múltiplo de 3 y, la producción de esta relación, habilita a problematizar por qué con esa expresión y con esos valores de la variable se obtienen todos los múltiplos positivos de 3. La construcción de estos conocimientos son indispensables para lograr el significado de múltiplo pretendido, si bien la tarea no exige la emergencia de este significado, sí habilita a ello.

Además, los análisis realizados brindan la posibilidad de reflexionar sobre la gestión de la clase vinculada al conflicto semiótico ligado al significado de “múltiplos de 5” cuando se pretende determinar la representación de ellos. Cabe destacar que los conocimientos de los estudiantes en torno a los múltiplos de 5 generalmente están muy ligados al criterio de divisibilidad del mismo y estos pueden ser generadores de conflictos por lo que reconocer con claridad a qué tipo de problemas permiten dar respuesta los criterios de divisibilidad (reconocer si determinado número es múltiplo de otro) y la diferencia con el tipo de problema que se estaba abordando (determinar cómo se pueden representar todos los múltiplos de determinado número), permite pensar cómo tensionar esa diferencia, es decir, problematizar si el criterio de divisibilidad del 5 permite responder a lo planteado.

Reflexiones finales

El análisis ontosemiótico realizado le brindó a la practicante la posibilidad de poner al descubierto la red de objetos y procesos que pueden intervenir en la resolución de esta tarea, permitiéndole identificar potenciales conflictos semióticos y ser consciente de lo que la tarea exige y lo que habilita a hacer. Tomar consciencia de ello permite pensar mejor las intervenciones docentes para lograr construir ese puente entre lo que la tarea obliga y lo que realizan los estudiantes con lo que la tarea habilita y lo que se pretende institucionalizar. En otras palabras, las preguntas que circularán en la clase, las interacciones que se promueven, las nuevas tareas que se proponen, la manera en que se tensionan las producciones personales de los estudiantes para lograr una evolución y aproximación al saber, y, justamente, las

interacciones que se den en este proceso (teniendo en cuenta este tipo de análisis a priori) permiten enfrentar los efectivos conflictos semióticos de tipo interaccional.

Bibliografía

- Giacomone, Belén y Godino, Juan (2016).** Experiencia formativa para desarrollar una competencia didáctico-matemática de futuros profesores. En F. España Pérez (Ed.), *Actas del XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas, ni más ni menos* (pp. 46-55). CEAM.
- Godino, Juan (2002).** Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, Juan, Batanero, Carmen y Font, Vicenç (2007).** The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Wittgenstein, Ludwig (1953).** *Investigaciones filosóficas*. Crítica.

Eje 5. Educación matemática en carreras no matemáticas

Reportes de investigación

La evaluación en matemática a partir de la implementación de un REI en la formación de profesores en Biología

GRETEL FERNÁNDEZ VON METZEN

gretel.fernandez@fceqyn.unam.edu.ar

Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

VERÓNICA PARRA

vparra@niem.exa.unicen.edu.ar

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET-UNICEN). NIEM

JONATHAN SCHUSTER

jonathanmschuster@gmail.com

Universidad Nacional de Misiones (UNaM). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

CLAUDIA ZANG

claudia.zang@fceqyn.unam.edu.ar

Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

Resumen

Este trabajo describe la evaluación realizada en la implementación de un Recorrido de estudio e investigación (REI) en el primer año de la formación para profesores universitarios en Biología. El REI se desarrolló en un curso regular de Matemática entre los meses de agosto y diciembre de 2023, y contó con un total de 28 sesiones de clases. Una enseñanza por REI se aleja de las concepciones tradicionales y la evaluación dentro de este dispositivo es una temática poco indagada. Se describen los instrumentos de evaluación asociados a las producciones finales de los estudiantes, presentadas en el último encuentro del cursado de la asignatura. Se concluyó en la diversidad de instrumentos, diferentes al parcial tradicional, entre los que se encuentran presentaciones multimedia de video, presentación con diapositivas e incluso, el uso de inteligencia artificial para el primer caso, y en la potencialidad de los mismos al momento de evaluar dentro de un REI.

Palabras clave: evaluación / recorrido de estudio e investigación / matemática / profesorado universitario en biología

Introducción

Una de las componentes clave de la práctica docente es el proceso de evaluación de las propuestas de enseñanza que diseña e implementa a diario en las asignaturas en las que se desempeña. Esta componente se constituye en una especie de brújula dado que le aporta información sobre el impacto de las acciones realizadas, y es una herramienta que le permite tomar decisiones acerca de las próximas acciones a emprender en sus prácticas de enseñanza.

Por otro lado, a través de este proceso no sólo se obtiene información sobre sus prácticas de enseñanza sino también indicadores de los procesos de estudio de los destinatarios de sus propuestas. De acuerdo a Santos Guerra (1993), la evaluación es un proceso que le permite al profesor interrogarse acerca de las propias concepciones sobre la enseñanza, por lo que la evaluación de los estudiantes envuelve una metaevaluación de su actividad como docente.

En particular, en este trabajo se analizará, por un lado, cómo se llevó a cabo una parte de la evaluación de los estudiantes en la asignatura Matemática en torno a la implementación de un (REI) en la formación para profesores universitarios en Biología. Y, por otro lado, se discutirá cómo los resultados obtenidos en esa parte de la evaluación de los estudiantes contribuyen hacia una evaluación de la propuesta diseñada e implementada por el docente.

El diseño de la propuesta de enseñanza (el REI) se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2017, 2022) y su implementación se realizó en la asignatura Matemática del Profesorado Universitario en Biología (PUB). Esta forma de enseñar se contrapone fuertemente a lo que habitualmente se suele considerar desde el paradigma tradicional de enseñanza de la matemática. Desde la TAD (Chevallard, 1999, 2007, 2017, 2022) se interpela el lugar que ocupa la matemática en las aulas de los diferentes niveles escolares y la forma en que se accede a ella, puesto que diversas investigaciones en Didáctica de la Matemática manifiestan que la enseñanza de la matemática se suele reducir al estudio de temas carentes de sentido, sin razones de ser y desconectados entre sí y con otras disciplinas (Chevallard *et al.*, 1997; Chevallard, 2017). No obstante, se recobran algunas ideas de Santos Guerra (1993), Palou de Maté (1998) y Celman (1998) sobre la evaluación en el sistema educativo, de modo que estas constituyan un soporte com-

plementario a lo propuesto desde la TAD para el análisis de la evaluación realizada en el marco de la implementación de un REI.

En concordancia con la propuesta de enseñanza, como grupo de investigadores, emerge el interrogante de cómo llevar adelante la evaluación de los procesos de estudio de los estudiantes a partir de la implementación de un REI, y que a su vez esta evaluación se constituya en una herramienta más que le permita al docente obtener información acerca de la pertinencia de su propuesta de enseñanza.

Marco teórico

Ante el interrogante *¿Cómo se evalúa en un REI?*, emergen en simultáneo otras preguntas acerca de la evaluación, entre ellas, qué se entiende por evaluación en general y, en particular, cómo se la entiende desde la TAD. Una de las primeras cuestiones que emerge cuando se habla de evaluación es lograr distinguir con claridad, en la práctica misma, lo que implica acreditación de saberes con la evaluación de estos. Para Palou de Maté (1998), la evaluación en el ámbito educativo comúnmente suele homologarse a la idea de acreditación. Asimismo, al igual que Chevallard (2012), sostiene que la evaluación no sólo se realiza en el ámbito académico sino en la vida misma. Chevallard sostiene que evaluar consiste en señalar el valor de algo, y que cuando se afirma que una persona o institución evalúa algo, significa que esta le atribuye un cierto valor a un objeto (ya sea este objeto material o inmaterial) y esta asignación de valor está asociado a un tipo de tarea que no necesariamente se circunscribe a lo escolar.

Al respecto, Susana Celman (1998), plantea que la evaluación debe ser tomada como una herramienta que no sólo les permita a los docentes recabar información sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos, sino que también posibilite dar cuenta si las acciones que se han llevado a cabo en la enseñanza han sido apropiadas y merecen ser ajustadas para futuras prácticas.

Si el docente logra centrar más su atención en tratar de comprender qué y cómo están aprendiendo sus alumnos, en lugar de concentrarse en lo que él les enseña, se abre la posibilidad de que la evaluación deje de ser un modo de constatar el grado en que los estudiantes han captado la enseñanza, para pasar a ser una herramienta que permita comprender y aportar a un proceso (Celman, 1998, p. 22).

Por su parte, Santos Guerra (1993), propone pensar a la evaluación como una actividad conjunta del docente y los alumnos, con la posibilidad de reflexionar sobre los aprendizajes que han logrado durante todo el período de estudio, analizando el punto de partida y el de llegada, pero sin olvidar los procesos realizados en el camino. De este modo, la evaluación deja de ser considerada como un elemento de control y permite que sea factible otra visión, quizá un poco más alejada con la concepción exitista.

En este sentido, pensar en la enseñanza de la matemática por REI encuentra los cimientos acordes para emprender la reflexión que menciona el autor. Un REI se caracteriza por hacer vivir la modelización matemática en los sistemas de enseñanza, donde la construcción y reconstrucción del saber matemático (y no matemático) emerge como respuesta a una pregunta en sentido fuerte, denominada *pregunta generatriz*. Esta pregunta, en este caso vinculada fuertemente a la biología, tiene la particularidad que su respuesta no se limita a la simple búsqueda de información en un libro, en Internet o acudiendo al profesor, sino que requiere la generación de otras sub-preguntas (denominadas *preguntas derivadas*) y la construcción de modelos que pongan en juego, de forma colectiva, saberes matemáticos y no matemáticos. Así, un REI debe partir de una pregunta generatriz capaz de generar numerosas preguntas derivadas abogando hacia una gran arborescencia de preguntas y respuestas. Respuestas que van a materializarse en la inquietud de indagar qué saberes matemáticos, biológicos, químicos, físicos y ecológicos, entre otros, pueden ser modelizados a través del estudio de esa pregunta generatriz y sus derivadas. La dinámica que envuelve la construcción de la respuesta a la pregunta generatriz y sus derivadas posibilita de alguna manera, el análisis del punto de partida y del proceso realizado para arribar al punto de llegada que propone el autor. Por su parte Chevallard (1999) plantea que el ejercicio de la evaluación es también interrogarse cuánto vale la organización matemática que se ha construido para ese dominio, lo que implica que, en el proceso de construcción y reconstrucción de los saberes, tanto los estudiantes como el docente, pueden asignar un valor relativo a las respuestas que construyen en vías de responder a la pregunta generatriz.

Por otra parte, Santos Guerra (1993) afirma que la práctica continua de la reflexión crítica en los docentes es un elemento necesario e indispensable, generador de cambios positivos en las formas de enseñanza y en las estrategias de aprendizaje. La dificultad

reside en provocar situaciones donde el pensamiento crítico tenga lugar y comience a ser utilizado no sólo en el contexto educativo sino también como forma de vida.

Antecedentes

Para establecer cómo se llevaría a cabo la evaluación en la asignatura Matemática, mediada por la implementación del REI, se indagó acerca de cómo se había realizado la evaluación en otras implementaciones de REI en el nivel universitario. Si bien hay diversas investigaciones que realizan implementaciones de REI en la Universidad, la revisión bibliográfica respecto a cómo evaluar con este dispositivo constató una escasa disponibilidad de literatura pertinente, lo que destaca la necesidad de una mayor investigación y desarrollo en esta temática. Concretamente se identificaron dos tesis, la de Costa (2013) y Serrano Martínez (2013). En la primera, se propone una enseñanza por REI para un curso regular de Matemática con estudiantes de primer año en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina). En tanto que, en la segunda, se analiza la implementación de un REI para estudiantes de economía y ciencias empresariales de primer año de universidad en España. En cuanto a la evaluación, de la tesis de Costa se retoma la idea de las exposiciones finales de grupo mediante un medio visual que sintetizara lo estudiado en las 9 clases que duró la implementación. De la tesis de Serrano Martínez se recupera la idea de implementar un cuestionario final con escala de valoración de modo que los estudiantes puedan expresar los aspectos positivos y negativos vinculados a la organización y puesta en práctica del REI.

Aspectos metodológicos

En este trabajo se emplea una metodología cualitativa y descriptiva para caracterizar parte de la evaluación en un curso de Matemáticas de primer año en una universidad del Nordeste de Argentina. Se centra en la primera implementación de un REI en el año 2023, que se llevó a cabo entre agosto y diciembre, con un total de 28 sesiones de clases. Las clases se realizaron dos veces por semana, con una dura-

ción de una hora y media cada una. Participaron 23 estudiantes distribuidos en diferentes grupos.

El equipo docente incluye un profesor titular y un docente auxiliar, ambos de profesores de Matemáticas. El docente auxiliar es quien llevó adelante la implementación del REI y es coautor del trabajo. Además, se contó con la colaboración de un Licenciado en Genética, quien aportó al estudio de los saberes biológicos emergentes. Se recopilaron las producciones de cada grupo en todas las clases, con observaciones participantes y no participantes prolongadas para obtener información sobre el desarrollo del REI. Las clases fueron registradas en video con el consentimiento de todos los participantes.

Al inicio del REI se estableció el contrato pedagógico con el grupo de estudiantes, y se acordó la forma de trabajo a lo largo de los diferentes encuentros, los instrumentos y criterios de evaluación, además de lo correspondiente a la acreditación de la asignatura. Los instrumentos que permitieron recabar información sobre el proceso de estudio e investigación de los estudiantes corresponden a: 1) Entregas parciales correspondientes a la realización de una bitácora grupal. En ella los estudiantes debían plasmar todo el recorrido realizado por ellos para responder la pregunta generatriz. 2) Presentaciones multimedia llevadas a cabo en forma oral y grupal en diferentes momentos del desarrollo del REI. Estas hacían referencia sobre los avances realizados por los grupos acerca de las diferentes preguntas derivadas emergidas en la construcción de la respuesta a la pregunta generatriz. 3) Bitácora individual realizada mediante plataforma Moodle al finalizar cada encuentro. Esta consistió de cuatro preguntas fijas y tenían como objetivo la autoevaluación del estudiante en cuanto a sus avances en el proceso de estudio. 4) Las diferentes participaciones individuales en las clases. 5) Una presentación final multimedia que describiera el recorrido realizado por el grupo para responder la pregunta generatriz. 6) Un cuestionario final anónimo con escala de valoración Likert.

En este trabajo se discuten los resultados parciales del análisis de las producciones finales de los estudiantes, presentadas en el último encuentro del cursado.

Análisis y discusión de los resultados: presentación final multimedia

Dentro de los acuerdos establecidos en el contrato pedagógico se pactó que para la última clase debían armar y presentar un trabajo final de no más de diez minutos que mostrará todo el recorrido realizado por ellos para responder la pregunta generatriz, y a su vez, que compartieran con los demás miembros de la clase la respuesta que habían construido como grupo de trabajo.

Se consideró que esta solicitud envolvía grandes desafíos para los estudiantes puesto que, a lo largo del recorrido, habían estudiado diferentes saberes matemáticos y no matemáticos, fruto de su investigación y emergentes de las preguntas derivadas, lo que implicaba tomar decisiones como grupo de trabajo acerca de qué selecciones harían, cómo lo presentarían y qué vínculos establecerían entre ellos.

Cinco grupos de trabajo realizaron la presentación final, utilizando diversos formatos. Tres de ellas, lo hicieron mediante presentación multimedia de video y dos en presentación con diapositivas. Cabe resaltar que una de las presentaciones de video, se destacó de manera notoria en relación con los demás videos, puesto que para su elaboración utilizaron inteligencia artificial, y además incorporaron breves videos dentro del video presentación. En general, todas las presentaciones lograron el objetivo de realizar una síntesis sobre el recorrido realizado por ellos para responder la pregunta generatriz, y pudieron realizar como grupo una evaluación de los diferentes modelos matemáticos que emergieron a lo largo del REI.

En este punto, se observa lo que plantea Chevallard (1999,2012) acerca de la evaluación necesaria que surge al cuestionarse qué valor tiene ese saber que se está estudiando, en este caso para responder la pregunta generatriz. En particular, se detectó que los estudiantes lograron realizar un análisis sobre los alcances de cada modelo matemático estudiado (modelo de crecimiento exponencial, modelo de crecimiento logístico y el modelo de la demanda bioquímica de oxígeno) para dar respuestas a la pregunta generatriz y a las preguntas derivadas. Esto se observa, por ejemplo, cuando en sus presentaciones manifiestan cuáles son las limitaciones del modelo exponencial para explicar determinados comportamientos de una población, y los lleva a investigar sobre el modelo logístico.

En este trabajo por razones de espacio se presentan determinados fragmentos de las presentaciones finales de los grupos 2 y 4. La primera corresponde a una presentación multimedia de video y la otra a una presentación con diapositivas.

En la imagen 1 los estudiantes detallan de manera secuenciada las preguntas que emergieron durante el desarrollo del REI, así como los saberes matemáticos y no matemáticos que estudiaron para responder esas preguntas, una vez formulada la pregunta generatriz.

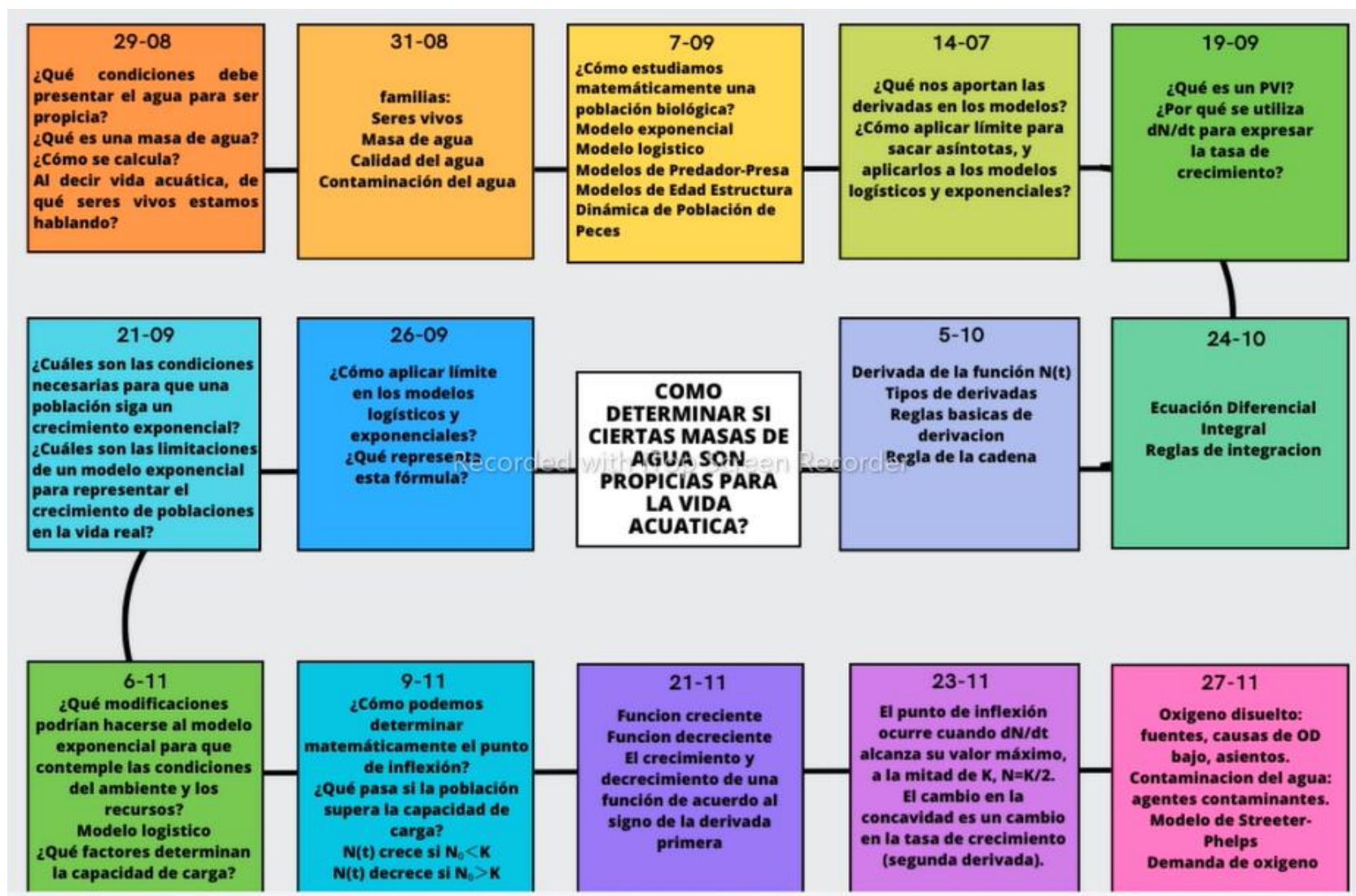


Imagen 1: Fragmento de la presentación multimedia de video del grupo 2

El grupo 4 por su parte decidió armar un esquema colocando la pregunta generatriz en el centro, y a partir de ella emanan diversas flechas que indican las primeras preguntas derivadas que surgieron de ella, tal como se muestra en la imagen 2.

En la imagen 3, se observa que los estudiantes centran su estudio en el modelo logístico a partir de realizar modificaciones en el modelo exponencial. También señalan que el estudio de la primera derivada y segunda derivada se realiza en términos de la función población, y de lo que le aporta a su estudio. Un aspecto que resulta llamativo es la distinción que efectúa con flechas distintas acerca de $\frac{K}{2}$ y el punto de inflexión como si se tratara de saberes diferentes. Si bien la flecha correspondiente a $\frac{K}{2}$ podría derivarse de la flecha del punto de inflexión, se entiende que la finalidad de la distinción es para resaltar, por un lado, el significado particular que alcanza el punto de inflexión en el modelo logístico, y por otro, la de indicar el significado que alcanza el punto de inflexión como un punto donde cambia la concavidad de la función, independientemente de la función población.



Imagen 2: Fragmento de la presentación multimedia con diapositivas del grupo 4

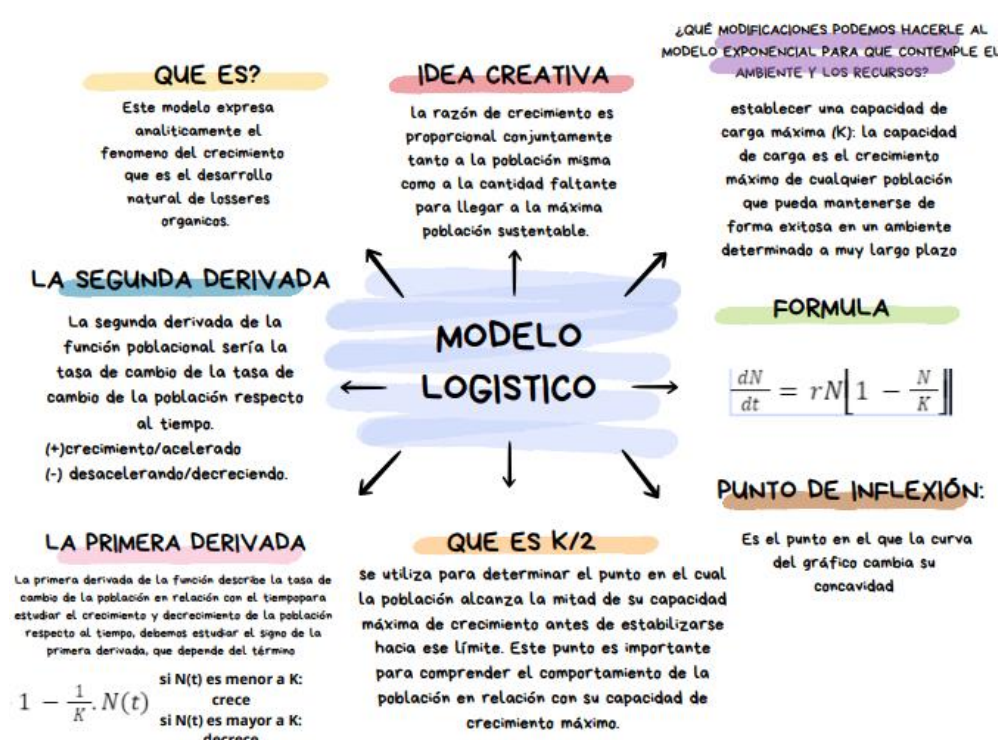


Imagen 3: Fragmento de la presentación del grupo 4 que muestra los saberes que emergieron con el modelo logístico

El grupo 2, como se muestra en la imagen 4, exploró la relación entre contaminación y crecimiento poblacional, considerando el oxígeno disuelto y la capacidad de carga del modelo logístico. Se cuestionaron cómo una función logística podría tener en cuenta estos factores y encontraron un modelo matemático para predecir la concentración de oxígeno disuelto en función de la contaminación del agua con materia orgánica.

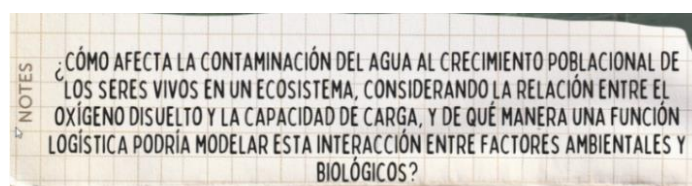


Imagen 4: Fragmento de la presentación del grupo 2 en donde se interrogan acerca de la relación entre la contaminación del agua y el crecimiento poblacional

En general, en las presentaciones elaboradas por los estudiantes se observa la continua evaluación acerca de los saberes que se van estudiando tal como plantea Chevallard (2012) sobre cuestionar acerca del valor relativo de las preguntas y las respuestas que se construyen para responder la pregunta generatriz. Durante las

exposiciones orales todos los grupos pudieron dar cuenta de lo que les permitía estudiar cada modelo, de los alcances y limitaciones; sin embargo, hubo grupos en los que preponderó la descripción coloquial del modelo en detrimento de la representación simbólica, y se prescindió de describir los saberes matemáticos estudiados a partir de ese modelo. Al respecto el grupo 2 señaló que, habían tenido que acordar “cuánta matemática poner en el video porque sentían que faltaba poner más matemática”. Esta aclaración la hicieron porque si bien en el esquema de su recorrido señalan que estudiaron reglas de derivación y de integración (imagen 1), en el posterior desarrollo del video, no las presentan.

Previo a la presentación final de los estudiantes algunos interrogantes referidos a la evaluación emergieron en el profesor a cargo de la implementación del REI, lo cual suscitó el debate entre los miembros del equipo de investigación para acordar la forma en que se realizaría la evaluación, por ejemplo: ¿qué tan relevante es que un estudiante del PUB pueda mostrar de manera individual que puede hacer un cálculo utilizando derivadas e integrales?, ¿cómo determinar si el estudiante aprendió matemática a partir de la implementación del REI?, la asignación de la nota numérica para la aprobación de la asignatura ¿debe ser la misma para todos los integrantes del grupo?. Aquí jugó un rol fundamental el estudio epistemológico-praxeológico realizado por el equipo de investigación acerca de la pregunta generatriz, como modelo de contraste, para determinar cuáles saberes son construidos y reconstruidos por los estudiantes para responder la pregunta generatriz. También se consideró como elemento clave que los estudiantes, durante su exposición, logran explicitar los alcances y limitaciones de cada modelo, así como establecer los argumentos de por qué se estudió determinado saber matemático o no matemático en cada modelo y qué les aportaba en su investigación.

Conclusiones

Tal como plantea Celman (1998), en esta implementación del REI, la evaluación se constituyó en una herramienta de reflexión conjunta entre estudiantes y docente a cargo de la implementación y se alejó ampliamente de la simple idea de acreditación. Los estudiantes lograron señalar los alcances y limitaciones de cada modelo matemático para el estudio de la pregunta generatriz plasmando su trabajo

y resultados en presentaciones finales que requieren un gran dominio, no solo de los conocimientos involucrados sino también de organización, síntesis y comunicación. Además de las técnicas audiovisuales e incluso de inteligencia artificial para los grupos que crearon un vídeo. Para el docente significó interpelar, por un lado, la forma habitual de evaluación mediante examen parcial individual y, por otro lado, el lugar que ocupa el cálculo de derivadas e integrales mediante la aplicación de técnicas para resolver ejercicios de matemática en la formación de estudiantes de PUB. Como parte de los próximos pasos a seguir, se realizará una segunda implementación del REI, de modo que permita recabar más información referida al proceso de evaluación y se pueda completar este incipiente estudio.

Bibliografía

- Celman, Susana** (1998). ¿Es posible mejorar la evaluación y transformarla en herramienta de conocimiento? En A. Camilloni, S. Celman, E. Litwin y M. Palou de Maté (Comps.), *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo* (pp.35-66). Paidós.
- Chevallard, Yves, Bosch, Mariana y Gascón, Josep** (1997). *Estudiar Matemática: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Ice Horsori.
- Chevallard, Yves** (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Yves** (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Éd.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.
- Chevallard, Yves** (2012). ¿Cuál puede ser el valor de evaluar ? Notas para desprenderse de la evaluación « como capricho y miniatura ». En G. Fioriti y C. Cuesta (Comp.), *La evaluación como problema. Aproximaciones desde las didácticas específicas*. UNSAM.
- Chevallard, Yves** (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, (1), 159-169.
- Chevallard, Yves** (2022). What is questioning the world? Towards an epistemological and curricular break. 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD 7). Centre de Recerca Matemàtica.

- Costa, Viviana** (2013). *Recorridos de Estudio e Investigación Codisciplinar en la Universidad para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería*. (Tesis doctoral). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Palou de Maté, María del Carmen** (1998). La evaluación de las prácticas docentes y la autoevaluación. En A. Camilloni, S. Celman, E. Litwin y M.C. Palou de Maté, M., *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo* (pp.93-129). Paidós.
- Santos Guerra, Miguel** (1993). *La evaluación: un proceso de diálogo, comprensión y mejora*. Ediciones Aljibe.
- Serrano Martínez, Lidia** (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. (Tesis doctoral). Universitat Ramon Llull.

Diferentes aspectos para el abordaje de la argumentación en la clase de matemática según una revisión bibliográfica. Una encuesta sobre concepciones y experiencias de estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería

ALEJANDRA INÉS GAGLIARDO

alejandragagliardo@gmail.com

FABIANA MONTENEGRO

montenegrofg@gmail.com

ANALÍA RAQUEL DEMARCHI

demarchi.analia@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral (UNL)

Resumen

Se abordan las concepciones y experiencias áulicas respecto de la argumentación matemática que manifiestan estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería. El objetivo es identificar ciertas prácticas comunes, que sirvan de insumo para revisar y potenciar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas asociados a la argumentación y la comunicación. Para ello, se realiza un análisis descriptivo a través de una encuesta en torno a tres ejes: sistemas de representación, competencias y comprensión lectora. Los resultados muestran coincidencias en cuanto al uso de representaciones para argumentar, el papel destacado de la comunicación en actividades que requieren la argumentación y el auto reconocimiento de dificultades para comprender enunciados matemáticos.

Palabras clave: argumentación matemática / revisión bibliográfica / encuesta / estudiantes de ingeniería

Introducción

Este trabajo constituye una continuación de una etapa investigativa previa en el marco del proyecto interdisciplinario “Estrategias de explicación y argumentación en el discurso de la matemática. Recursos lingüísticos de la oralidad y la escritura empleados para la enseñanza y el aprendizaje en los primeros años de carreras de ingeniería”. El mismo se desarrolla en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), y es llevado a cabo por docentes de las áreas de Matemáticas y Comunicación Oral y Escrita, correspondientes al primer año de cursado de todas las carreras.

El Proyecto general impulsa el desarrollo de estudios con el objetivo final de elaborar propuestas de enseñanza para implementar dentro de cada asignatura (Comunicación Oral y Escrita y las distintas cátedras de Matemáticas), que favorezcan el desempeño de los estudiantes.

En esta oportunidad, se analizan las concepciones y experiencias áulicas respecto de la argumentación en matemática que manifiestan estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería de la FICH. El objetivo es identificar ciertas prácticas comunes que sirvan de insumo para revisar y potenciar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas asociados a la argumentación y la comunicación. Para ello, se presentarán, en esta ponencia, los resultados de una encuesta realizada a los alumnos efectuada a finales del año 2023.

Previamente, es importante aclarar que, en una etapa anterior a este trabajo, se llevó a cabo una revisión sistemática de investigaciones sobre la argumentación en matemática vinculadas al lenguaje natural, aplicando la metodología PRISMA 2020 (Blanco *et al.*, 2020; Page, *et al.*, 2021), con el fin de recopilar estudios significativos en torno al abordaje de temas de enseñanza específicos en matemáticas, como lo es la elaboración de justificaciones o argumentaciones, a partir de un abordaje lingüístico (Montenegro *et al.*, 2022).

A partir de esta revisión bibliográfica, se clasificaron los antecedentes en tres grupos principales: los vinculados con los sistemas de representación, con las competencias y con la comprensión lectora. Debido a la relevancia de estos ejes en las investigaciones recopiladas, la encuesta que a continuación se presenta se estructuró a partir de ellos.

Seguidamente, se presenta el marco teórico para dichas categorías.

Marco conceptual

Aunque es innegable la importancia que tienen las actividades de argumentación en la educación matemática, existe una diversificación terminológica con respecto a términos que podrían vincularse, dependiendo de su perspectiva de abordaje; por ejemplo: “argumentación”, “justificación”, “demostración”, entre otros.

Aunque investigadores como Ríos-Cuesta (2021) sostiene que el estudiante debe tomar una posición determinada de lo que concibe como argumentación, particularmente, consideramos todas las acepciones posibles sobre la noción de argumentar, puesto que el foco del presente trabajo está puesto en indagar en prácticas de enseñanza.

Sistemas de representación

El concepto “representación” se refiere a la capacidad simbólica mediante la cual es posible representar la realidad para comprenderla y transformarla (Salazar-Torres *et al.*, 2022). En el contexto de lo matemático, el uso y la interpretación de signos con carga de significados es lo que permite consolidar conceptos fundamentales. Aunque la noción de representación admite diferentes acepciones (Castro y Castro, 1997; Duval, 1998; Godino, 2003), en educación matemática es consensuado que, debido al carácter inobservable de los objetos matemáticos como entidades mentales, son imprescindibles las representaciones externas de las mismas. Ejemplo de representaciones son los enunciados en lenguaje natural, las expresiones algebraicas, figuras geométricas, gráficas, tablas numéricas. A través de ellas se interactúa con el conocimiento matemático, se lo registra y se lo comunica.

En el ámbito de las representaciones semióticas, según Duval (1998), se llama semiosis a la aprehensión o producción de una representación semiótica. Las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la semiosis son tres: la formación, el tratamiento y la conversión. La formación es la representación de un objeto matemático dentro de un registro dado. Como por ejemplo la enunciación

de una frase, el dibujo de una figura geométrica o la escritura de una fórmula. El tratamiento es la transformación de la representación en el registro mismo donde ha sido formada, es decir, es una transformación interna a un registro. Finalmente, la conversión es la transformación de una representación en una de otro registro, esto es, es una transformación externa al registro de partida.

Competencias

La noción de “competencias” se refiere a destrezas y conocimientos generales como la resolución de problemas, el uso del lenguaje matemático y el diseño matemático. Los antecedentes de este grupo consideran los marcos teóricos del Programa Internacional de Evaluación de los alumnos (PISA, 2000) y el proyecto danés de educación de Niss (1999).

Algunos expertos identifican, entre las competencias para mejorar el razonamiento lógico, la de argumentar y comunicar (Niss, 1999; Llanos, 2007; Jiménez, 2013; Arreguín Rodríguez, 2009). La primera consiste en realizar pruebas matemáticas para comprobar situaciones, emplear heurística, crear y expresar argumentos matemáticos; y la segunda, en enunciar o leer expresiones matemáticas, entender expresiones, transmitir ideas matemáticas (Pantoja Padilla, 2017).

En Argentina, en el año 2006, el CONFEDI (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina) publicó el "Primer Acuerdo sobre Competencias Genéricas", un enfoque de la educación por competencias centrada en el estudiante, partiendo de la premisa de que la formación de grado se propone desarrollar aquellas competencias que debería poseer el recién graduado y en el nivel de desarrollo adecuado al inicio de su trayecto profesional (Cukiermart y Recabarren, 2018). Este organismo divide a las competencias entre “genéricas” y “específicas”. Las primeras refieren a las competencias de egreso genéricas comunes a todas las carreras de ingeniería y necesarias para asegurar el perfil de egreso. Dentro de éstas, se incluye la competencia para comunicarse con efectividad, cuyo fin es que el estudiante sea capaz de seleccionar las estrategias de comunicación. Las segundas están destinadas a las actividades reservadas de cada carrera (p.21).

Comprensión lectora

En cuanto a la “comprensión lectora”, se la concibe como una de las habilidades que más influye en el correcto proceso de aprendizaje de los niños y jóvenes, ya que poseerla es vital para el desarrollo de todas las áreas y materias de conocimiento en las distintas etapas educativas (Ahmed, 2011).

Para Gordillo Alfonso y Restrepo Becerra (2012), la comprensión de enunciados matemáticos es un complejo proceso en el que intervienen tanto la dimensión textual (su forma y contenido), que transmite conceptos, operaciones, propiedades y símbolos como la dimensión cognitiva, que implica el conocimiento del mundo del lector y la representación mental del contenido.

Por otra parte, Klein (1998) menciona que las dificultades de comprensión de los textos expositivos —como lo matemáticos— están relacionadas, en general, con dos orígenes: con su estructura y con la falta de conocimientos acerca del tema que se aborda en el texto. Acerca del primer origen, los textos expositivos pueden carecer de una estructura directiva que ordene y jerarquice la información y queda, por lo tanto, a cargo del lector realizar estas acciones. Y, en relación con el segundo origen, es útil que el texto active los saberes previos para que la información nueva que provea tenga posibilidades de ser ligada con esos conocimientos anteriores del lector.

Metodología

Para la recolección de datos se empleó la técnica de encuesta auto administrada, puesto que se le entregó el cuestionario en mano a cada estudiante y fue completado de manera autónoma y anónima. La encuesta se confeccionó a partir de los tres grupos temáticos identificados en la revisión sistemática llevada a cabo en la primera etapa de investigación, descrita en la Introducción, de modo que (ver Tabla 1):

- Las preguntas 1 y 2 se enfocan en el uso de representaciones y su relación con la argumentación.
- Las preguntas 3 y 4 se orientan hacia las competencias argumentativas.
- Las preguntas 5, 6, 7 y 8 se centran en la comprensión lectora.

En cuanto al tipo de preguntas, predominan las preguntas cerradas, la mayoría con opciones dadas (2, 3, 5 y 6) y, en ciertos casos, con la posibilidad de agregar

otra/s alternativa/s no mencionada/s (1, 7 y 8). También hay dos preguntas dicotómicas (1 y 2). Dos preguntas incluyen, además, preguntas abiertas en las que se solicita una explicación o justificación de la opción elegida (2 y 5).

Las preguntas se orientan hacia la obtención de dos tipos de información de parte de los estudiantes, con respecto a sus experiencias áulicas vinculadas a la argumentación en matemática:

➤ por un lado, sus concepciones a través de consignas como: “¿cuáles representaciones te ayudan...?”, “¿consideras que...”, “¿crees que...?”, “¿a qué razón/es consideras que se debe...?”;

➤ por el otro, sus prácticas adquiridas a través de consignas como: “¿usas...?”, “¿buscas...?”, “¿te cuesta...?”, “¿qué utilizas...?”

Para la obtención de la muestra o subgrupo representativo de la población (Hernández-Sampieri y Mendoza Torres, 2020), se seleccionó a estudiantes que, en su momento, habían cursado Álgebra I de la carrera Ingeniería en Inteligencia Artificial y las asignaturas Matemática Básica y Álgebra Lineal de las carreras Ingeniería en Informática, Ingeniería en Recursos Hídricos, Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Agrimensura.

La encuesta fue realizada en diciembre de 2023 y respondida por 42 alumnos.

1. ¿Usas diferentes representaciones de un objeto matemático (gráficas, expresiones simbólicas, tablas, entre otras)? SÍ..... NO..... Si la respuesta es sí, ¿cuáles?..... 2. ¿Cuál de las representaciones vinculadas con las funciones te ayudan más para argumentar? Gráficas..... Expresión simbólica..... Tabla de valores..... ¿Por qué? 3. ¿Consideras que en las clases y en los exámenes de matemática se permite al estudiante que construya y comunique argumentos matemáticos? En las clases: Sí, casi siempre..... Sí, a veces..... NO..... En los exámenes: Sí, casi siempre..... Sí, a veces..... NO..... 4. Cuándo se te pide argumentar o justificar, ¿buscas definiciones, procedimientos y propiedades que conoces y que puedan ayudarte? SÍ.....NO..... 5. ¿Crees que la práctica de leer y comprender textos no matemáticos constituye un medio útil para el aprendizaje de la matemática? Sí, es muy importante..... Sí, relativamente o en algunos casos.....

No tiene relación alguna.....

Justifica brevemente tu respuesta anterior

6. Frente a la resolución de actividades o problemas matemáticos, ¿te cuesta comprender qué es lo que debes hacer o lo que se solicita en las consignas y/o enunciados matemáticos?

Sí, casi siempre..... A veces..... Nunca.....

7. Cuando te enfrentas a dificultades para comprender y/o resolver una actividad de matemática, ¿a qué razón/es consideras que se debe?

Desconocimiento del significado de palabras específicas.....

Desconocimiento de operaciones o fórmulas.....

No identificación de variables involucradas.....

Dificultad para relacionar diferentes objetos matemáticos.....

Otras.....

¿Cuáles?

8. ¿Qué estrategias de comprensión utilizas cuando lees un texto de matemática?

Subrayado o resaltado de palabras importantes.....

Preguntas para identificar ideas principales y secundarias.....

Paráfrasis.....

Anotaciones en el margen del texto.....

Resumen o Síntesis.....

Preguntas al texto.....

Subtitulación de párrafos.....

Comentarios al margen.....

Mapas conceptuales.....

Cuadros sinópticos.....

Otros esquemas.....

Relectura.....

Reorganización de las ideas.....

Fichas.....

Relación con conocimientos previos.....

Observación sobre el contenido.....

Observación sobre la forma de expresión.....

Identificación de conexión entre palabras.....

Otras.....

Tabla 1: Encuesta dada a los estudiantes

Resultados

Respuestas relacionadas con los sistemas de representación

En cuanto a la **pregunta 1**, referida al uso de diferentes representaciones de un objeto matemático cualquiera, se obtuvo que 79 % de los estudiantes afirma que usa diversas representaciones, 19% contestó que no utiliza representaciones y 2% no contestó la pregunta.

Con respecto a las respuestas afirmativas, 72% respondió el uso de gráficas, 45% el uso de expresiones simbólicas, 42% el uso de tablas y 6% no precisó ninguna representación.

Con respecto a la **pregunta 2**, en la que se indaga sobre cuáles de las posibles representaciones de las funciones lo ayudan a argumentar y por qué, 90 % de los alumnos encuestados respondió a dicha pregunta, aunque sólo el 85 % justificó la respuesta.

En cuanto al tipo de representaciones que los estudiantes eligieron, 33% escogió las representaciones gráficas, 26% las simbólicas y 7% las tablas de valores. Rescatamos que, aproximadamente, 23% de los estudiantes seleccionó dos de las tres representaciones antes mencionadas.

Las justificaciones de quienes eligieron las representaciones gráficas como aquellas que los ayudan a encontrar argumentos relacionados con las funciones, tienen que ver con que la visualización de la gráfica de una función es más fácil de recordar y facilita la comprensión de 'lo que está pasando' con la función: su dominio, discontinuidades, etc. También las expresiones simbólicas fueron elegidas porque ayudan a comprender la función, pero además porque permiten obtener fundamentación 'teórica' y 'por costumbre'. Las elecciones de las tablas de valores se vinculan a que permiten graficar y son cómodas de manejar. Finalmente, quienes optaron por dos representaciones lo justifican porque esta asociación (gráficas-tablas de valores, gráficas-expresiones simbólicas, expresiones simbólicas-tabla de valores) les hace más fácil la tarea de encontrar argumentos y los ayuda a comprender las propiedades y el comportamiento de la función.

Respuestas relacionadas con las competencias

Las respuestas a la **pregunta 3**, con respecto a si los estudiantes consideran que, en las clases y en los exámenes de matemática, se favorece la construcción y comunicación de argumentos matemáticos, arrojaron los siguientes resultados:

	Casi siempre	A veces	Nunca	No contesta
En las clases	69 %	29 %	2 %	-
En los exámenes	64 %	21 %	5 %	10 %

Tabla 2. Respuestas dadas por los alumnos

Con respecto a la **pregunta 4**, referida a que si al momento de argumentar o justificar, los estudiantes emplean definiciones, procedimientos y propiedades conocidos, se obtuvo que el 98 % de los encuestados respondió afirmativamente.

Respuestas relacionadas con la comprensión lectora

En cuanto a la **pregunta 5**, referida a la creencia de los estudiantes sobre si la práctica de leer y comprender textos no matemáticos constituye un medio útil para el aprendizaje de la matemática, los resultados se reflejan en el siguiente gráfico:

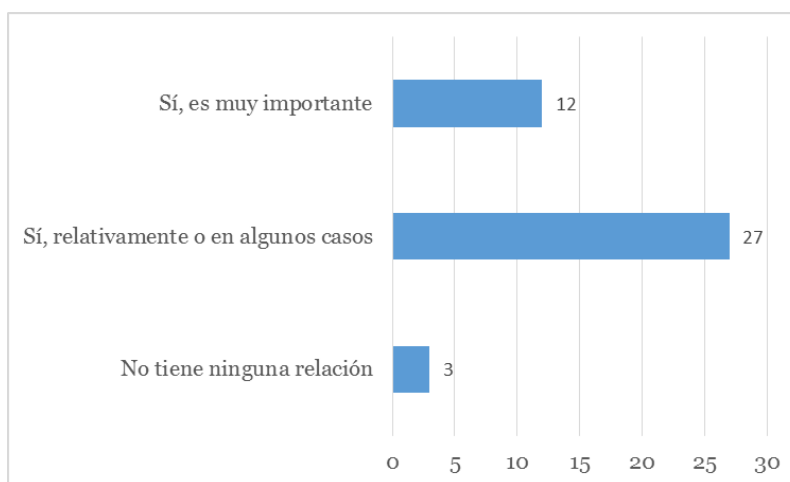


Imagen 1: Respuestas a la pregunta 5

Entre las justificaciones de los estudiantes que opinan, en la pregunta anterior, que el aprendizaje de la matemática se ve favorecido por la lectura de textos no matemáticos, se mencionan: porque es importante la comprensión lectora, porque les permite encontrar relaciones entre términos matemáticos y porque los ayuda a razonar. Y las argumentaciones de quienes sostienen que no existe relación alguna entre los textos no matemáticos y el aprendizaje de esta disciplina, refieren a que el lenguaje de la matemática es difícil y no es aplicable a la vida cotidiana, a que en matemática ayuda más hacer ejercicios que leer la teoría y a que los textos matemáticos son más difíciles de entender que los no matemáticos.

En la **pregunta 6**, la cual hace referencia a que si dado un problema matemático le cuesta comprender qué es lo que debe hacer, vimos que la mayoría de los estudiantes han contestado la opción “A veces”, como podemos observar en el siguiente gráfico:

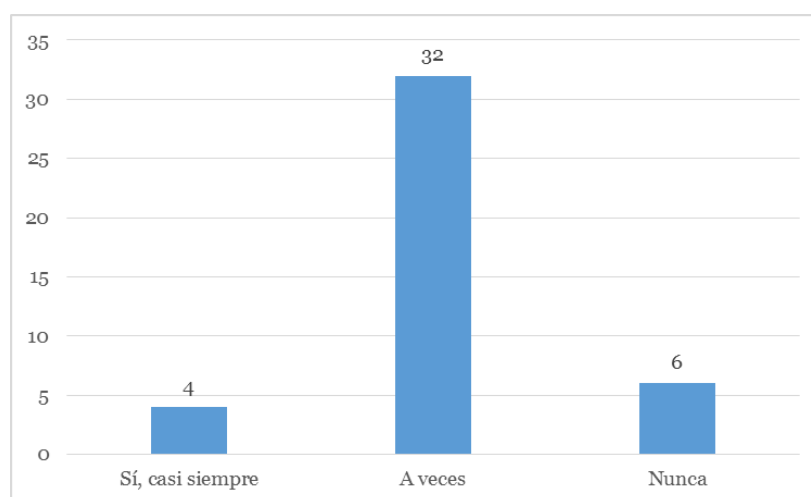


Imagen 2: Respuestas a la pregunta 6

Con respecto a la **pregunta 7**, la razón principal por la cual el alumno se enfrenta a problemas para comprender y/o resolver una actividad matemática es la dificultad para relacionar diferentes objetos matemáticos. En menor medida, otras razones fueron: desconocimiento de operaciones o fórmulas, la no identificación de variables involucradas y desconocimiento del significado de palabras específicas.

Por otra parte, algunos alumnos expresaron razones particulares, como por ejemplo: distracción, expresiones simbólicas relacionadas con demostraciones, falta de estudio y de práctica de ejercicios, no entender bien el tema.

En la **pregunta 8**, las estrategias de comprensión más utilizadas por los alumnos cuando leen un texto matemático fueron relectura y relación con los conocimientos previos. En segundo lugar, fueron elegidas anotaciones en el margen y resumen o síntesis y en tercer lugar subrayado o resaltado de palabras importantes.

Conclusiones

Parecería acertado que uno de los grupos que conformamos a partir de PRISMA sea el de las representaciones semióticas ya que, como se deriva de la pregunta 1, son los mismos estudiantes quienes reconocen el empleo simultáneo de las diversas representaciones semióticas que tienen los objetos matemáticos, en particular el de las gráficas.

En la pregunta 2 los resultados muestran que la diferencia entre el porcentaje de estudiantes que afirman usar las representaciones gráficas y los que usan las simbólicas no es tan marcada como en la pregunta 1, aunque sigue siendo notablemente inferior el porcentaje de quienes usan tablas de valores. Llama, también, la atención que aproximadamente un cuarto de los alumnos señala el uso de dos de las tres representaciones, reflejando, así, que emplean no sólo la formación y el tratamiento de representaciones semióticas sino también la conversión de ellas. Sin pretensión de establecer una clasificación exhaustiva, los fundamentos que brindan los alumnos a la hora de elegir qué representación/es emplean tienen que ver con la visualización, la comprensión y la comodidad.

En lo que respecta a las cuestiones relacionadas con las competencias destacamos que, aproximadamente, el 65% de los estudiantes contestaron que, frecuentemente, tanto en los exámenes como en las clases, se propicia la construcción y la comunicación de argumentos matemáticos. Empero, aproximadamente la cuarta parte de los encuestados afirma que esto sólo ocurre a veces. Además, casi el 100 % de los estudiantes reconoce que emplean definiciones, procedimientos y propiedades conocidas al momento de argumentar o justificar. Podríamos, entonces, concluir que en las asignaturas que estos estudiantes han cursado se atiende al desarrollo de la competencia de comunicarse con efectividad. Probablemente, esta comunicación estará, en su mayor parte, en función de los objetivos de las cátedras, de los interlocutores involucrados y de acordar significados en torno a los conteni-

dos matemáticos específicos que conforman la currícula de las asignaturas. Además, es destacable que los estudiantes reconozcan que la argumentación debe estar fundamentada en conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos.

En cuanto a las respuestas vinculadas con la comprensión lectora:

- La mayoría de los estudiantes opina que la lectura y comprensión de textos no matemáticos es relativamente útil para el aprendizaje de la matemática. Reconocemos, entre las respuestas de quienes no vinculan los textos no matemáticos y el aprendizaje de esta disciplina, creencias muy frecuentes en relación con la matemática: que el lenguaje de la matemática es difícil y no adaptable a la vida cotidiana, que matemática se aprende resolviendo ejercicios y que comprender los textos matemáticos cuesta más que hacerlo con los no matemáticos.

- Más del 76% de los encuestados afirma tener dificultades para comprender las consignas o enunciados en algunas ocasiones. El origen de estos inconvenientes lo vinculan, principalmente, con la dificultad de relacionar diferentes objetos matemáticos y con el desconocimiento de algoritmos y términos específicos.

- Las estrategias de comprensión que utilizan con mayor frecuencia los estudiantes cuando leen un texto matemático son la relectura y la búsqueda de relaciones con conocimientos previos. En segundo lugar, aparecen las anotaciones en el margen del texto y los resúmenes o síntesis.

Reconocemos las dificultades de comprensión de textos expositivos que considera Klein (1998) en estas respuestas. Y que las estrategias que emplean para la comprensión del material de estudio son las que ayudan a ordenar y jerarquizar la información del mismo. Conjeturamos que una actividad de lectura y comprensión lectora de un contenido nuevo en una clase podría contribuir a los estudiantes a realizar estas acciones.

Consideramos que el análisis de los resultados de esta encuesta nos brinda insumos para un mayor conocimiento de los estudiantes actuales y para seguir pensando acciones concretas en las cuales el lenguaje natural favorezca las estrategias de explicación y argumentación que se consideran en la matemática.

Tal como sostiene Ríos-Cuesta (2021), resulta fundamental que nuestros estudiantes se involucren activamente en las prácticas argumentativas, a fin de desarrollar una visión crítica frente al conocimiento y que, al mismo tiempo, favorezca su desenvolvimiento social. Por tal motivo, consideramos relevante el desarrollo de proyectos de investigación interdisciplinarios al mismo tiempo que los profesores

desarrollemos estrategias de enseñanza que promuevan la interpretación y elaboración de procesos argumentativos por parte de los estudiantes en el aula de matemática.

Bibliografía

- Ahmed, Mariem Dris** (2011). Importancia de la lectura en infantil y primaria. *Revista digital innovación y experiencias educativas*, 38, 1-9.
- Arreguín Rodríguez, Luz Elena** (2009). *Competencias matemáticas usando la técnica de Aprendizaje Orientado en Proyectos* (Tesis doctoral). Escuela de Graduados en Educación.
- Blanco, David, Rubio, Eva María, Marín, Marta María y De Agustina, Beatriz** (2020). Propuesta metodológica para revisión sistemática en el ámbito de la ingeniería basada en PRISMA. XXIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. Universidad de Jaén. <https://www.researchgate.net/publication/348705198>
- Castro, Encarnación y Castro, Enrique** (1997). Representaciones y modelización. L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza matemática* (pp. 95-124). Horsori.
- Consejo Federal de Decanos de Ingeniería – CONFEDI. Giordano Lerena, Roberto; Cirimelo, Sandra** (Editores). (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de Ingeniería en la República Argentina*. Libro Rojo. Universidad FASTA.
- Cukiermart, Uriel y Recabarren, Pablo** (2018). Educación en la era de la 4ta Revolución Industrial: Competencias para un mundo donde lo único constante es el cambio. *Revista Argentina de Ingeniería. Consejo Federal de decanos de ingeniería de la República Argentina*, 6 (11), 83-86.
- Duval, Raymond** (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). Grupo Editorial Iberoamericana.
- Godino, Juan** (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de la Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Gordillo Alfonso, Adriana y Restrepo Becerra, Joaquín** (2012). Comprensión lectora y concepciones de estudiantes universitarios sobre enunciados matemáticos. *Zona próxima: revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación*, 17, 2-23.

- Hernández-Sampieri, Roberto y Mendoza Torres, Christian Paulina** (2020). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. MCGRAW-HILL.
- Jimenez, Alfonso** (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Grupo de Investigación PIRAMITE.
- Klein, Irene** (1998). *Propuestas de escritura*. A-Z editora.
- Llanos, Viviana** (2007) *Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media*. NYECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As.. CONICET.
- Montenegro, Fabiana, Gagliardo, Alejandra y Demarchi, Analía** (2022). Revisión sistemática de investigaciones sobre la argumentación en matemática vinculadas al lenguaje natural, aplicando el método PRISMA. XXIII Encuentro Nacional y XV Encuentro Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI). UNER.
- Niss, Mogens** (1999). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *3rd. Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124). Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.
- Page, Matthew, McKenzie, Joanne, Bossuyt, Patrick, Boutron, Isabelle et al.** (2021). Declaración PRISMA 2020: una guía actualizada para la publicación de revisiones sistemáticas. *Revista Española de Cardiología*, 74(9), 790–799. <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>
- Pantoja Padilla, Richard Javier** (2017). *Estrategias metodológicas para promover el razonamiento lógico en el área de matemáticas en educación básica superior* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Ecuador.
- PRISMA** (2022). *Transparent Reporting of Systematic Reviews and Meta-Analyses*. <http://www.prisma-statement.org/PRISMAStatement/FlowDiagram>.
- Proyecto PISA** (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación*. Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos, OCDE. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
- Ríos-Cuesta, Wilmer** (2021). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Revista Amazonia Investiga*, 10(41), 96-105.
- Salazar-Torres, Juan Pablo, Contreras-Santander, Yudith Liliana, y Jaimes-Mora, Sandra Susana** (2022). Semiótica: Un recurso fundamental en los procesos

de argumentación matemática escrita. *Eco Matemático*, 7 (1), 20–32.
<https://doi.org/10.22463/17948231.1016>.

GeoGebra en el análisis geométrico de obras de arquitectura

MARÍA GRACIELA IMBACH

graciela.imbach@gmail.com

MARÍA VICTORIA VUIZOT

mavi_548@hotmail.com

Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo - UNL, Santa Fe, Argentina.

Resumen

En el presente trabajo, que se enmarca en el proyecto de investigación CAI+D2020 “Procesos proyectuales en la producción arquitectónica reciente en América Latina, en clave multidisciplinar desde un pensar técnico”, se presenta el análisis geométrico, utilizando el software GeoGebra, de los casos de estudio de la casa de retiros espirituales “El Jacaranda” del arquitecto Claudio Caveri, de la “Casa Áurea” de los arquitectos Javier Corvalan y José Cubilla y de la iglesia “Cristo Obrero” del ingeniero Eladio Dieste. El proyecto de investigación propone abordar el análisis en torno a los roles de los sistemas estructurales, la matemática, la materialidad y la técnica, en los procesos proyectuales y de producción material. Desde la geometría se propone el análisis de la generación de la forma inspiradas en la planimetría y las imágenes de la obra finalizada, intentando reflejar el interés de los arquitectos por la ideación y desarrollo desde la matemática. La metodología es de enfoque cualitativo y se utiliza el estudio de casos como técnica de investigación.

Palabras clave: geogebra / matemática / arquitectura/proyecto

Introducción

El estudio de las estructuras resistentes, materialidad, estrategias proyectuales y técnicas adoptadas en relación con la definición del espacio conforman los ejes del proyecto de investigación CAI+D2020 “Procesos proyectuales en la producción arquitectónica reciente en América Latina, en clave multidisciplinar desde un pensar técnico”. Se busca por una parte comprender los procesos proyectuales y la forma en que la articulación entre la arquitectura y los sistemas estructurales se hace presente en proyectos y obras de arquitectura; y por otra, aportar a un pensamiento complejo, recursos disciplinares desde la matemática.

Se podría afirmar desde una visión estructuralista (relación de partes con un todo, siendo este, más que la suma de las partes), que la interdependencia de los elementos arquitectónicos que componen y definen el espacio se constituyen en un manifiesto orden arquitectónico, donde se evidencia el equilibrio y armonía de las distintas partes y sus relaciones. Se trata entonces, de un proceso complejo en el que intervienen múltiples variables, en su ideación y desarrollo siempre se han utilizado herramientas de la Matemática y particularmente de la Geometría: orden, proporción, sistemas de coordenadas, simetrías, configuraciones espaciales.

La Geometría es una rama fundamental de la Matemática cuyo objetivo primordial es el conocimiento y la creatividad en el espacio tridimensional. Es, a la vez, un instrumento capaz de dar formas geométricas, dar métodos de diseño y representación, aportar medidas y proporciones y suministrar transformaciones con las que establecer simetría, modularidad o repetición, etc. (Alsina, 2005).

En la actualidad, las posibilidades y la disponibilidad de múltiples herramientas para el estudio de la Geometría, han revivido la valoración de la misma como elemento de generación, ordenamiento y construcción del espacio y la forma.

La forma arquitectónica se percibe como resultado de un pensamiento dinámico y crítico, y no como acciones superfluas sin sustento reflexivo, resultando una expresión de las exigencias del proyecto, de su significado, de sus valoraciones estructurales y matemáticas, y de su formulación técnica.

Proyectar es construir, señala Piñon (2007) y agrega: “la construcción espacial de un edificio debe incorporar, como condición de posibilidad, la construcción material del mismo” (p. 87). En este sentido, pensar en términos técnicos, implica es-

tablecer un compromiso con la materia, en palabras del Arq. Justo Solsona (2007): “...yo ubico a la arquitectura dentro de la esfera de la técnica, que es su camino hacia la forma; y partiendo de la funcionalidad la geometría es la herramienta que permite llegar a la creatividad” (p. 89).

Y esta técnica, técnica de pensamiento puesta en evidencia como matriz constructiva del proyecto, adquiere relevancia también como la adquisición de recursos y saberes al servicio de la creación del proyecto arquitectónico. Saberes que se incorporan cuando se realiza un abordaje reflexivo de los contenidos en las disciplinas más duras en la formación de un Arquitecto, como Matemática y Sistemas Estructurales, y van construyendo técnicas de pensamiento que desde un pensar técnico señalan, constituyen y forjan el acto de proyectar y sostienen de una manera racional la construcción del proyecto.

La noción de multidisciplinariedad se concibe como la búsqueda del conocimiento, interés o desarrollo de habilidades en múltiples disciplinas, noción que adquiere un gran valor en el terreno del conocimiento y la investigación cuando se logran conectar los saberes y valores de diferentes campos convirtiéndose con ello en un elemento clave para la creatividad y la innovación.

La metodología es de enfoque cualitativo y se utiliza el estudio de casos como técnica de investigación. El estudio de casos permite comprender las lógicas subyacentes en la generación del proyecto y los sustentos teóricos que lo determinan.

Dentro del proyecto de investigación, los proyectos y obras que son seleccionados como estudio de casos, surgen en base a un conjunto de categorías que permiten comprender y conocer los procesos de diseño implícitos y los criterios operantes en los procesos de ejecución. Los casos seleccionados para el estudio deben estar comprendidos en la arquitectura proyectada y/o construida en América Latina.

En este trabajo se presentan tres casos de estudios: la casa de retiros espirituales “El Jacarandá” ubicada en la zona rural de la ciudad santafesina de Reconquista del arquitecto Claudio Caveri, la casa de familia “Casa Áurea” situada en un área urbana de la ciudad de Asunción en Paraguay de los arquitectos Javier Corvalan y José Cubilla, y la iglesia parroquial “Cristo Obrero”, cerca de Atlántida, Uruguay, que fue encomendada al ingeniero Eladio Dieste. En los mismos se analizan los bosquejos, planimetría, secciones y cortes de las obras desde la geometría empleando como herramienta de estudio el software Geogebra, software gratuito de matemática que ofrece la posibilidad de asociar objetos geométricos y algebraicos para

resolver problemas complejos, relacionando ambas áreas de conocimiento. Se examina cómo las simetrías, las razones, las proporciones, las figuras y curvas geométricas son base de las ideas que dan forma a estas obras arquitectónicas.

Desarrollo

Caso “El Jacarandá”



Imagen 1: Casa de retiros espirituales “El Jacaranda”

El Jacarandá es un ejemplo paradigmático de las exploraciones proyectuales que se desarrollaron en Argentina durante la década del sesenta del siglo XX. Esta obra de Claudio Caveri reúne varios de los desafíos en los que se enmarcaban las búsquedas de la arquitectura de aquellos años. Examinando de manera general el proyecto, de acuerdo a lo explicitado por el arquitecto Javier Mendiando (2015), se observa que Caveri plantea una concepción abierta y plural, que posibilite a los elementos constituirse, de acuerdo con su propia función y significación. Desdibuja los límites entre cubierta y cerramientos generando una estructura única e integradora. Basa su materialidad en ladrillos y ferrocemento; y busca representar una

innovación tipológica desde lo organizativo y su consecuencia ambiental que configura una fluida secuencia de espacios interconectados, interesantes de estudiar.

El planteo adquiere total originalidad desde la formulación de la planta. Una serie de patios de planta circular organizan en su conjunto un sistema complejo, que en algunos sectores se abre hacia el paisaje de la llanura y en otros se cierra hacia una interioridad monacal. El patio central que vincula los cuatros cuerpos principales se conecta con dos patios que organizan a su vez, el sector de las habitaciones.

En el estudio del bosquejo original de la planta, imagen 2, se evidencia como la geometría forma parte de la ideación y distribución de los sectores de la casa de retiros a través de círculos, polígonos y secciones de los mismos.

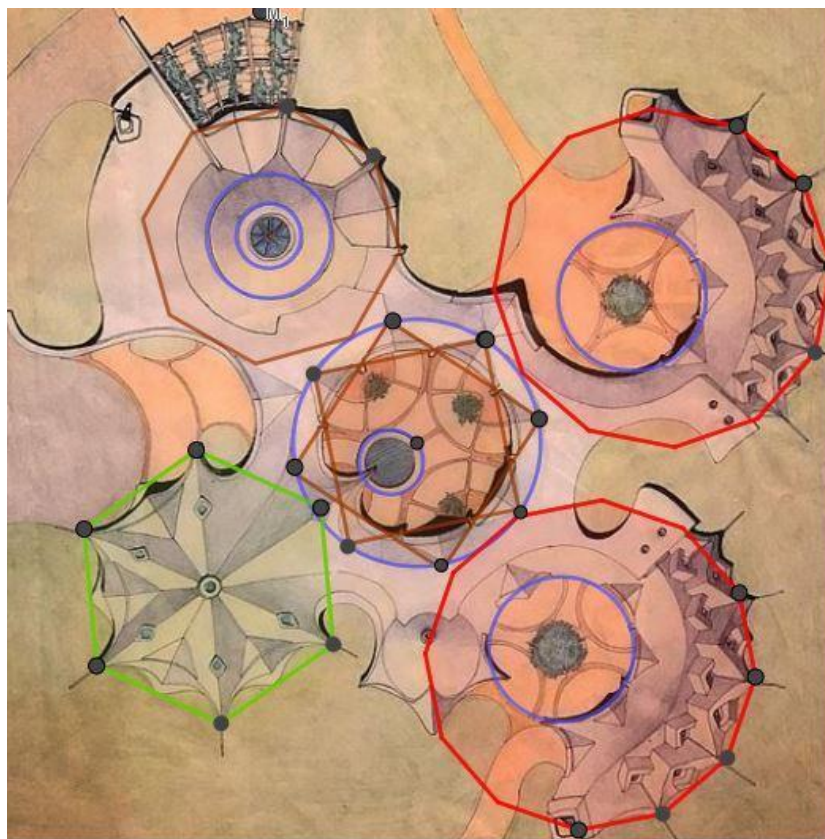


Imagen 2: Análisis geométrico de la Planta de "El Jacarandá" sobre dibujo original de Claudio Caveri, expuesto en el MoMA Nueva York, 2015

En el plano de los sectores destinados a dormitorios, imagen 3, se puede corroborar que se corresponden con coronas circulares y cada uno de los dormitorios con trapecios circulares.

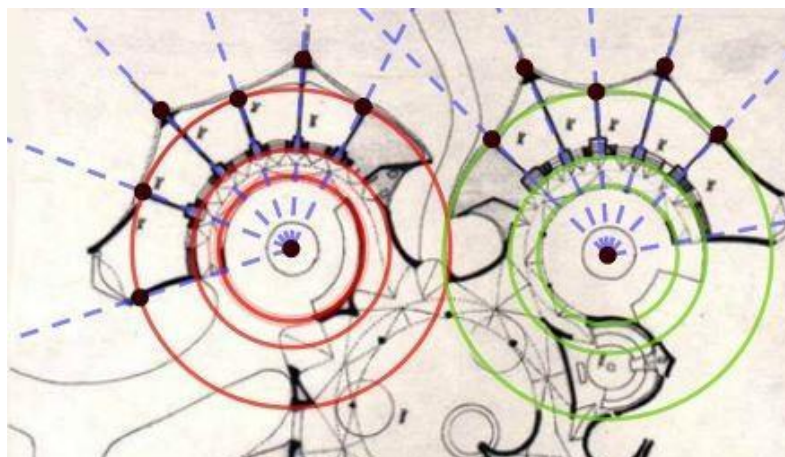


Imagen 3: Sectores de dormitorios

Se pudo comprobar que los arcos exteriores de la galería son arcos ojivales rebajados. Considerando la definición de arco ojival rebajado se realizó el análisis en la imagen de uno de ellos, como se muestra en la imagen 4, donde se puede observar que está formado por los arcos de circunferencia cuyos centros están situados en la línea de arranque, en el interior de la luz. Estos centros se obtienen trazando las mediatrices de los segmentos de rectas EF y GF, que cortan la línea de arranque en los puntos H e I, correspondientes a los centros.

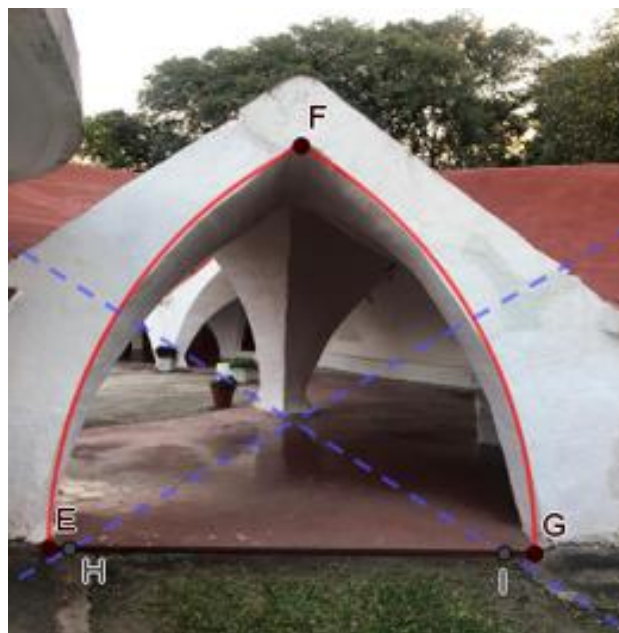


Imagen 4: Arco ojival exterior

Otro elemento estudiado son las ventanas que, en todos los casos, tienen dos caras triangulares formando un ángulo diedro obtuso como se detalla en la imagen 5.

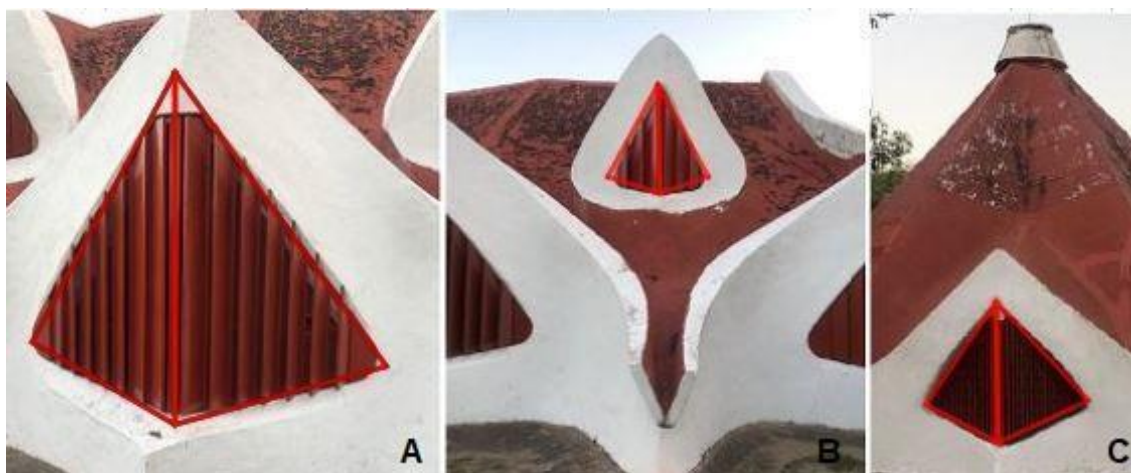


Imagen 5: A: dormitorios inferiores. B: dormitorios superiores. C: capilla

Caso “Casa Áurea”



Imagen 6: Casa de familia “Casa Áurea”

El nombre de la casa refiere al orden geométrico con el cual la casa fue articulada a pedido del cliente. Son varias ideas que se funden en este proyecto, la relación con el agua y la estructura portante/espacial, aunque se subordinan a la geometría de proporciones áureas no dejan de ser menos importantes. La casa se implanta en un terreno con cierto desnivel y mucha agua, en un área urbana donde a la vez es cuenca de un arroyo caudaloso y muy característico de la ciudad de Asunción, el arroyo Mburicao. (Laboratorio de Arquitectura, 2019)

El espacio de la vivienda se inscribe debajo de la gran cubierta con forma de espiral áurea que descansa en un único apoyo ubicado en el “punto áureo” de la geometría (el punto áureo es el punto fuerte desde el que parte la espiral: este punto suele marcar dónde se puede centrar la atención en una pintura, fotografía o diseño). Este gran soporte, de forma cilíndrica, además de ser soporte estructural es soporte geométrico, es el centro que estructura toda la organización concéntrica

que se observa en la planimetría. La estructura concéntrica define las distintas espacialidades abriéndose al exterior de acuerdo al programa y permitiendo que cada espacio tenga una visual y una orientación distinta dentro de los 360° . El tipo de estructura definido permite una planta baja libre, aprovechada para el ingreso a la vivienda y para cocheras.

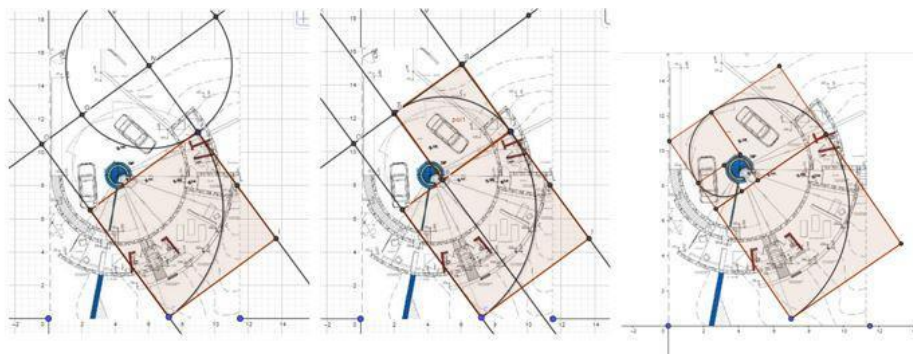


Imagen 7: Generación de la espiral áurea que modeliza la cubierta de la Casa

El ingreso a la planta alta, donde se desarrolla la vivienda, al igual que su circulación interna, se da de manera centrífuga a través de una gran rampa que acompaña el exterior del cilindro, la escalera espiralada dentro del tubo principal y una escalera lineal para acceder desde el arroyo.

La planta baja se compone de un basamento sólido con forma de corona circular que contiene los servicios (estudio, dormitorio de servicio, quincho, etc), mientras que en planta alta se desarrollan las funciones sociales e íntimas propias de la vivienda. En el resultado se puede inferir que las demandas de cada tipo de espacio (dimensiones, iluminación, ventilación, visuales, privacidad) están resueltas con diferentes recursos que potencian las ventajas de la geometría dominante.

La definición de los espacios interiores, de la planta alta, se estructura de manera concéntrica a partir del soporte cilíndrico circular de la cubierta ubicado en el punto áureo. Los muros se plantean como arcos de circunferencia de diferentes radios acompañando las dimensiones que va tomando la espiral áurea que contiene los locales, como se muestra en la imagen 8.

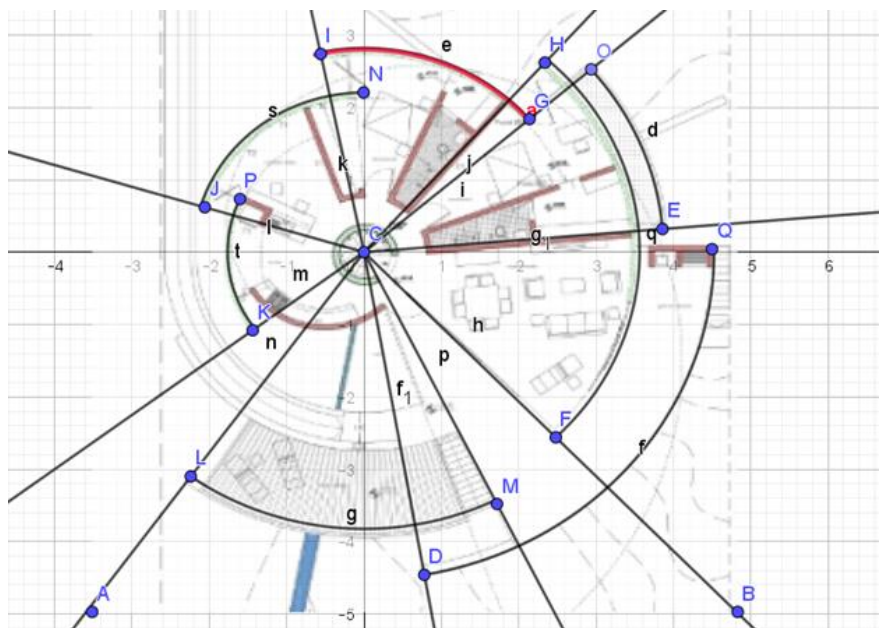


Imagen 8: Arcos de circunferencia en planta alta de la casa áurea

La proporción áurea también se puede observar en la fachada, imagen 9, a partir de la identificación de dos rectángulos áureos contiguos. La unión de dos rectángulos áureos como se dispone en el análisis forma un rectángulo de proporción $1+\sqrt{5}$, esto significa que el cociente entre su lado mayor y su lado menor da como resultado dicho número.

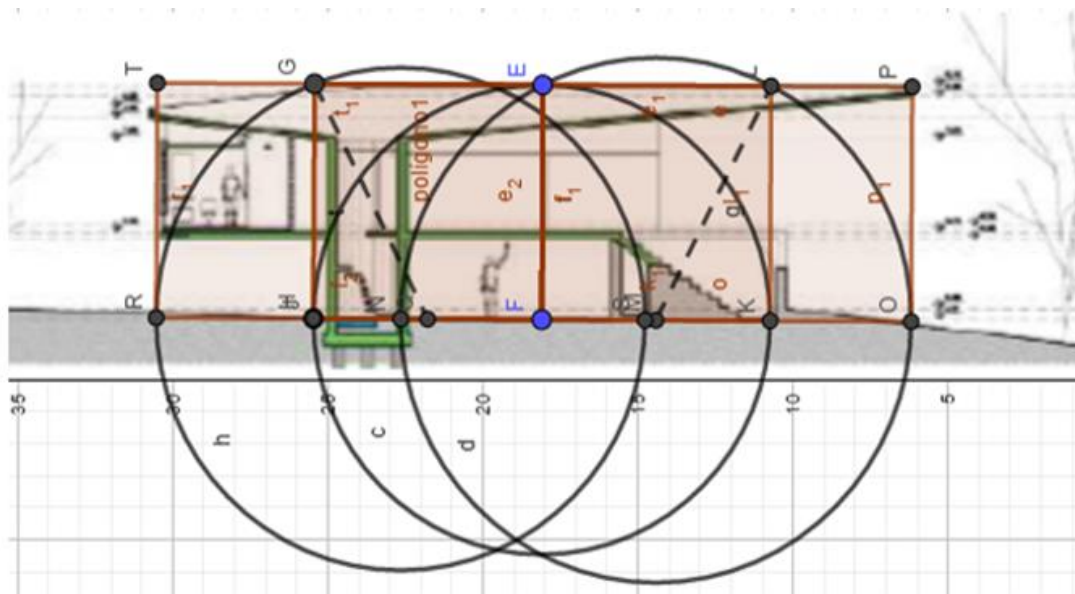


Imagen 9: Rectángulos áureos que generan un rectángulo en proporción $1+\sqrt{5}$ en la fachada de la Casa Áurea

Caso “Cristo Obrero”



Imagen 10: Iglesia parroquial “Cristo Obrero”

La iglesia parroquial Cristo Obrero, o también conocida como iglesia de Atlántida, fue encomendada al ingeniero Eladio Dieste. El mismo tenía el desafío de proyectar un templo en un pueblo cercano a la ciudad balnearia uruguaya de Atlántida, con un costo equivalente al de un galpón.

Dieste construyó una compleja obra arquitectónica íntegramente de ladrillo, elemento organizador de la estructura, que trabaja con total liviandad en la creación de superficies laminares, como describe Isabel Crespo (2005) en su tesis doctoral. De esta manera juega con la definición de los distintos espacios a partir de superficies curvas optimizando los costos.

La iglesia de 7 metros de altura es una nave simétrica rectangular de 16 por 30 metros en planta, presenta una cubierta ondulada y paredes de forma conoidal.

La cubierta es una superficie ondulada de ladrillos, bóveda gausa, construida con andamios y encofrados que se reutilizaban para mantener la repetición de las ondas. Definida así, por una sucesión de curvas catenarias de distinta luz y flecha que se unen por las parábolas de los muros y la cumbrera. Su especial curvatura posibilita una acústica única que permite que se escuche la voz natural en todos los rincones.

Por otro lado, la construcción de los muros estuvo determinada por dos directrices: una línea recta en el suelo y, a 7 metros de altura, una curva ondulada que se forma por arcos de parábolas en distintos sentidos. Entre ambas se pusieron hilos generatrices como guía de edificación de los muros.

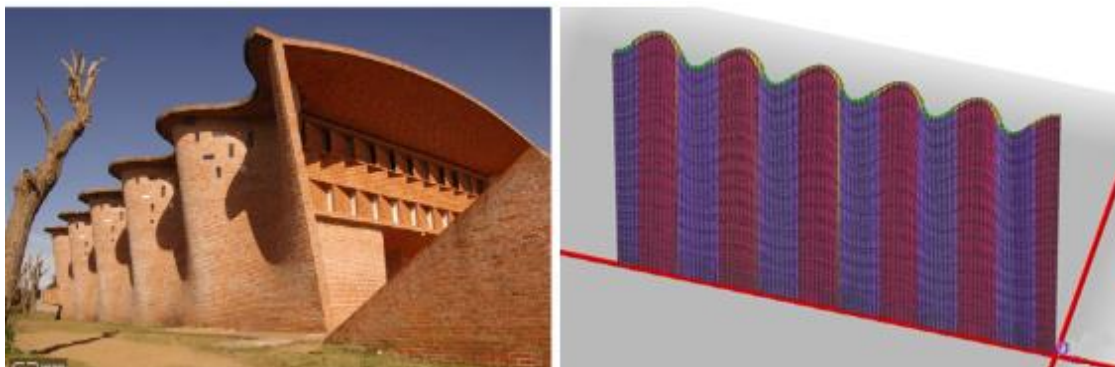


Imagen 11: Muro lateral de la iglesia junto con la recreación del mismo en Geogebra

En el plano de la planta de la iglesia, imagen 12, se puede observar cuatro arcos de parábolas diferentes marcados con distintos colores (verde, lila, fucsia y amarillo) que se trasladan siguiendo el largo de la nave.

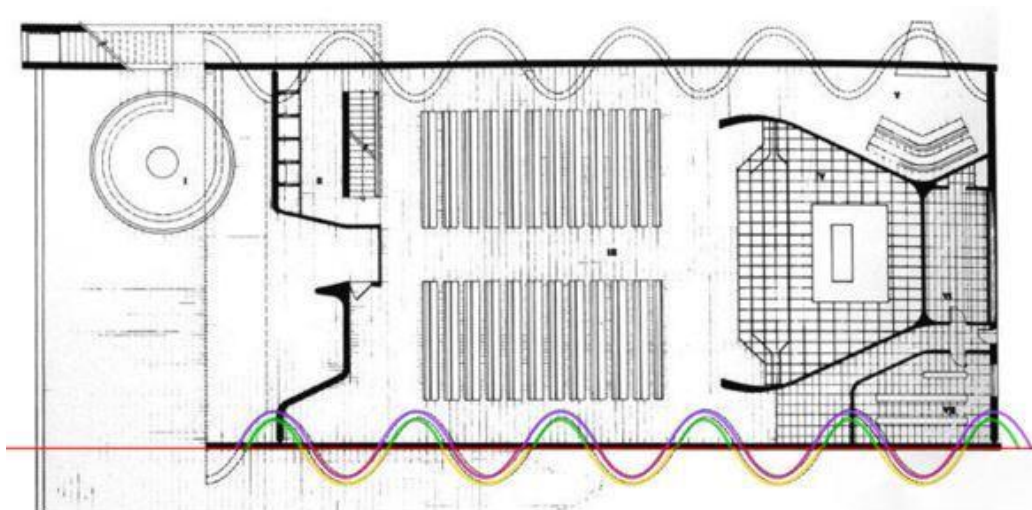


Imagen 12: Parábolas que definen la curva ondulada de los muros laterales

Conclusiones

El estudio de casos con un enfoque multidisciplinar permite indagar en las relaciones de las manifestaciones formales y las herramientas proyectuales subyacentes. Cuando se realiza un abordaje reflexivo de los contenidos en las disciplinas más duras en la formación de un arquitecto, se van construyendo técnicas de pensamiento que utilizan recursos y saberes que se ponen al servicio de la creación del proyecto arquitectónico.

En tal sentido, los casos particulares analizados “El Jacarandá”, la “Casa Áurea” y la Iglesia “Cristo Obrero” reflejan la interconexión entre los sistemas estructurales, la matemática, la materialidad y la técnica, que confluyen en los procesos proyectuales de los arquitectos.

En estas obras se puede observar algunos objetos de estudio de la geometría que, desde los bosquejos de las obras hasta la materialización de las mismas, cimentan la ideación de los arquitectos y otorgan forma a los proyectos que se funde con la materialidad, la estructura y el medio en el cual se encuentran.

El uso de simetrías, razones, proporciones, figuras geométricas, rectas y curvas permiten crear espacios, dotando a estas obras arquitectónicas de formas exclusivas que, además de aprovechar las posibilidades del lugar en el cual se establecen, resaltan por su belleza. Se evidencia así como la geometría es para los arquitectos la base y el medio disciplinar para dominar la forma y componer espacios.

Bibliografía

- Alsina, Claudi** (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura. Módulo 3. Curso Interuniversitario *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas*. <https://imarrero.webs.ull.es/setmo5/modulo3lp/3/calsina.pdf>
- Construction, Architecture 1955-1980** (2015). Museum of Modern Art. Nueva York.
- Crespo Cabillo, Isabel** (2005). *Control gráfico de formas y superficies de transición*. (Tesis doctoral). Universitat Politècnica de Catalunya. Departament d'Expressió Gràfica Arquitectònica I. <http://hdl.handle.net/10803/6559>
- Laboratorio de Arquitectura** (2019). Laboratorio de Arquitectura, sitio web. <https://www.laboratoriodearquitectura.com.py>
- Mendiondo, Javier** (2015). El Jacarandá, un viaje al vientre de la arquitectura. *Revista 041*, 6, 70-77. https://issuu.com/af-estudio/docs/041_6
- Piñon, Helio** (2007). Proyectar es construir. Observación elemental sobre el construir. *SCA Revista de Arquitectura*, 225, 86-91.
- Solsona, Justo** (2007): *Hacer y decir*. Ediciones Infinito.

Aprender matemática por proyectos. Un análisis del trabajo en las aulas de las carreras de diseño

PABLO COLL

pcoll@unm.edu.ar

ERNESTO LÓPEZ

elopez@docentes.unm.edu.ar

LAURA REYNOSO

lreynoso@docentes.unm.edu.ar

Universidad Nacional de Moreno (UNM)

Resumen

Abordaremos un análisis del aula de la materia Matemática para las carreras de Diseño de la Universidad Nacional de Moreno; dichas carreras se dictan por primera vez en la universidad. Enmarcamos el diseño de la propuesta de enseñanza en el contexto del trabajo de investigación: “Un abordaje basado en proyectos para la enseñanza de la matemática en carreras de diseño”. Se definen para el trabajo en el aula seis proyectos, de los cuales los estudiantes deben elegir dos para su cursada. La modalidad de las clases es en forma de taller y por proyectos, lo que supone para docentes y estudiantes un cambio de hábitos. En el presente trabajo abordamos el trabajo de los estudiantes en uno de los proyectos. El trabajo áulico se analizó desde el marco teórico de Godino *et al.* (2009) al que incorporamos la idea de quehaceres matemáticos de Michailuk y Nicodemo (2015).

Palabras clave: enseñanza de la matemática / aprendizaje basado en proyectos / matemática aplicada al diseño / enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Cognición Matemática

Introducción

En el contexto del trabajo de investigación “Un abordaje basado en proyectos para la enseñanza de la matemática en carreras de diseño”, se diseñó una propuesta de enseñanza para la materia Matemática de las carreras de Diseño de la Universidad Nacional de Moreno. Dichas carreras se dictan por primera vez en la universidad, por lo que se trata de la primera experiencia en la materia. El equipo de investigación, conformado en su mayoría por docentes de la materia, definió para el trabajo en el aula seis proyectos que conforman dos menús de tres proyectos cada uno, de los cuales los y las estudiantes deben elegir dos para su cursada. La modalidad de las clases en el aula es en forma de taller y por proyectos, lo que supone para los y las docentes un cambio de hábitos y muy posiblemente también para las y los estudiantes, acostumbrados a otras modalidades de enseñanza en matemática.

En el presente trabajo decidimos abordar el trabajo de los estudiantes en uno de los proyectos. Analizaremos aquí el trabajo en las aulas desde el marco teórico propuesto por Godino *et al.* (2009), el enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y Cognición Matemática. En este marco se propone un análisis del aula de matemática en cinco niveles: 1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas; 2) elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; 4) identificación del sistema de normas y metanormas; 5) valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Incorporamos también al análisis los quehaceres matemáticos propuestos por Michailuk y Nicodemo (2015); estos autores distinguen siete quehaceres propios del “hacer matemática” en el aula: calcular, explicitar procedimientos, validar, explorar, estimar, conjeturar, poner en juego propiedades.

1. Las prácticas matemáticas y la matemática involucrada

El trabajo áulico se organizó en torno a proyectos. En las clases cuarta y octava del curso (sobre un total de catorce clases) se presentaron en proyecciones dos menús de proyectos con la finalidad de que los estudiantes eligiesen el proyecto de su preferencia. Los proyectos del primer menú tratan sobre temas de geometría en dos dimensiones: simetrías, teselaciones y parábolas; los del segundo menú trabajan

sobre temas de geometría en tres dimensiones: deltaedros, tetraedros y superficies regladas. Nos concentraremos aquí en el trabajo de los estudiantes sobre el proyecto deltaedros, que para los estudiantes llevó el título “trianguledros” (se evitó el uso de la palabra deltaedro para que una búsqueda en internet no obturase la exploración). Se consideraron para el análisis tres comisiones de la asignatura, a cargo de los docentes E., L. y P. El proyecto fue elegido por el 36% de los grupos de dichas comisiones. En la Figura 1 se muestra parte de la presentación de los docentes de dicho proyecto.

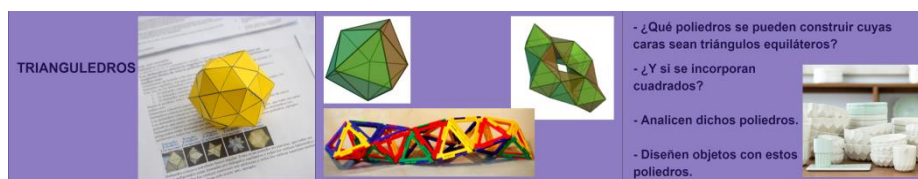


Figura 1: Imágenes de la presentación del proyecto a los estudiantes

La tarea planteada consistía en la exploración de los “trianguledros”. Los estudiantes debían cumplir los siguientes hitos, incluidos en la presentación del proyecto: ¿Qué poliedros se pueden construir cuyas caras sean triángulos equiláteros? ¿Y si se incorporan cuadrados? Analicen dichos poliedros. Diseñen objetos con estos poliedros.

Los conceptos matemáticos involucrados fueron: construcción de triángulos equiláteros, estudio de los deltaedros, concavidad y convexidad de poliedros, debate acerca de la posibilidad de caras coplanares, identificación de los ocho deltaedros convexos, obtención de la relación entre la cantidad de caras C y la cantidad de aristas A , $3C = 2A$, incidencia máxima de aristas por vértice (Alsina *et al*, 1991).

Las prácticas de los estudiantes y el trabajo en el aula incluyeron:

- Trabajo autónomo en grupos: indagación, exploración, construcción con materiales. El docente recorre el aula: monitorea el avance de los grupos, asiste, repregunta.
- Utilización de guías con las tareas a realizar en cada clase. En algunos casos se realizó una lectura detallada al comienzo de la clase; en otros casos se hicieron necesarias explicaciones para algunas consignas escritas en lenguaje formal.
- Puestas en común (luego del trabajo autónomo) en las que se institucionalizaron conceptos, conclusiones, etc., en el pizarrón.

La gestión de las clases estuvo acompañada por una lista de consignas para orientar a los estudiantes en su trabajo exploratorio.

En la clase 1:

- Realicen muchas piezas triangulares en cartulina para hacer ensayos.
- ¿Se puede construir un poliedro cuyas caras sean 4 triángulos equiláteros?

¿Y 6 triángulos equiláteros? ¿5? ¿8? ¿Y otras cantidades?

- ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden disponerse en un mismo vértice del poliedro? ¿Da lo mismo si es o no convexo?

- Enumeren los poliedros obtenidos, analizado si son o no convexos.

En la clase 2:

- Argumenten a partir de las relaciones entre aristas y caras que un trianguledro no puede tener una cantidad impar de caras.

- Los trianguledros convexos son solo ocho (con caras que sean exclusivamente triángulos equiláteros). ¿Hallaron los ocho?

- Clasifiquen los trianguledros obtenidos: según cantidad de caras, según incidencia de aristas, según cantidad de vértices, etc.

En la clase 3:

- Elijan alguno de los ocho trianguledros convexos, busquen en Wikipedia (en inglés) sus coordenadas en tres dimensiones y grafiquenlo en GeoGebra.

- Calculen el área de la superficie de trianguledro elegido.

- Estimen el volumen del trianguledro elegido.

2. Elaboración de conceptos matemáticos a partir de episodios

Episodio 1: la construcción de triángulos equiláteros. Durante el trabajo inicial de construcción de caras en cartón los docentes E. y P. detectaron grupos que construyeron piezas triangulares que no eran triángulos equiláteros. Ante esta situación se intervino en los grupos pidiendo que midieran los lados de los triángulos para constatar que no eran triángulos equiláteros. En el aula de P. el grupo en cuestión corrigió su construcción utilizando una regla graduada a modo de compás; en el aula de E., se planteó al colectivo de la clase cómo se construyen triángulos equiláteros; los diferentes grupos sugirieron distintas ideas que se fueron plasmando en el pizarrón:

- Trazar un lado de una medida (la base) e ir viendo “a ojo” cómo apoyar la regla hasta lograr que los tres lados midan lo mismo.
- Un estudiante propuso trazar la mediatriz y refinar la propuesta anterior buscando un punto en la altura cuya distancia de cada vértice sea igual a la base.
- El docente propuso usar compás para lograr que las medidas sean iguales. Se ejemplificó esto en el pizarrón con ayuda de un cable (que se utilizó a modo de radio).
- Se propuso la pregunta: ¿cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? Algunos estudiantes respondieron que 60° , ya que los tres ángulos suman 180° y son iguales. Se propone una forma más de construcción con transportador; un estudiante propone usar la escuadra que viene con un ángulo de dicha medida.

En el aula de la profesora L. un grupo de estudiantes construyó triángulos “equiláteros” trazando primero la base y luego su mediatriz de igual longitud (es decir, lograron un triángulo isósceles de altura igual a su base). En ese grupo se intervino solicitando que midieran los tres lados a fin de constatar que la figura lograda no era un triángulo equilátero.

Los estudiantes pusieron en juego aquí algunos quehaceres: medir, estimar (para poner “a ojo” algún punto), calcular ($180^\circ:3$) y poner en juego propiedades (el tercer vértice yace en la mediatriz, los ángulos interiores suman 180°).

Episodio de interés 2: la exploración de los deltaedros. La instancia de exploración de los poliedros planteó diversas cuestiones. La primera de ellas referida a cómo ensamblar las piezas. La propuesta era que utilizarasen bandas elásticas en “salientes” de los triángulos; sin embargo, esto solo funcionó con piezas de cartón muy duro o bien con banditas elásticas muy pequeñas (del tipo que se usan para la confección de pulseras). Algunos grupos optaron por utilizar cinta de papel o cinta aisladora para el pegado y despegado de las piezas. Otros grupos utilizaron ambas estrategias en simultáneo (Figura 2).



Figura 2: Trabajos exploratorios de estudiantes

La exploración en un principio no fue sistemática y aparecieron diversos poliedros, que incluían convexos, no convexos, con caras coplanares. Al interior de cada grupo se debatió si aceptar o no estos últimos, conviniendo en que no los aceptaríamos como trianguledros. Se dieron también intercambios en torno a la cantidad de trianguledros posibles: a partir del pegado de una figura al lado de otra (tetraedros, octaedros, etc.) se concluyó que podrían construirse infinitos. Se intervino entonces con la afirmación de que la cantidad de convexos no es infinita y se alentó a la búsqueda de todos ellos.

En la segunda clase la mayoría de los grupos habían obtenido entre cinco y ocho de los poliedros buscados; en algunos casos se incentivó a que analicen la incidencia de aristas en cada vértice y que a partir de allí analicen si podrían obtener alguno nuevo. En otros casos en los que faltaba solo un poliedro se optó por la búsqueda en Wikipedia de la entrada “deltaedro” y así completar la búsqueda.

Quehaceres puestos en juego por los estudiantes: explorar (para la obtención de los poliedros que se pueden formar con caras que sean triángulos equiláteros) y poner en juego propiedades (en un vértice de un deltaedro convexo no pueden incidir más de cinco aristas, ya que seis hacen un hexágono).

Episodio de interés 3: la emergencia y demostración de una conjetura. Como parte del trabajo con deltaedros, durante la clase 1, se plantearon las preguntas: ¿se puede construir un poliedro cuyas caras sean 4 triángulos equiláteros?, ¿y 6 triángulos equiláteros?, ¿5?, ¿8?, ¿y otras cantidades?

Las preguntas anteriores se complementaron con la siguiente tarea, planteada en la segunda clase (a partir de la imposibilidad de obtener el 5-deltaedro): argumenten a partir de las relaciones entre aristas y caras que un trianguledro no puede tener una cantidad impar de caras. En algunos grupos los docentes intervinieron

planteando que hicieran una tabla con las cantidades de caras y aristas y analicen allí relaciones¹. En varios grupos observaron que la tabla (con los ocho deltaedros) muestra regularidades: la cantidad de caras va de 2 en 2; la cantidad de aristas va de 3 en 3; la cantidad de vértices avanza de a 1.

Algunos grupos lograron, a partir del análisis de la tabla, la fórmula $2A=3C$. En el aula del docente E. uno de los grupos logró la fórmula $2C - C/2 = A$; en este caso el docente trabajó con estos estudiantes sobre el uso del factor común para constatar la equivalencia entre fórmulas. En la última clase, durante la exposición de dicho grupo, mostraron su fórmula y comentaron que esta fórmula era equivalente a la exhibida por otro grupo. Este episodio guarda relación con la construcción de un modelo para un conjunto de datos, es decir, la tarea de *modelizar*. En este caso, la conversión del registro en forma de tabla a una fórmula que permita dar cuenta de las relaciones puede ser analizada como un proceso de modelización (Segal y Giuliani, 2008; Sadovsky, 2005):

podemos decir que un proceso de modelización supone, recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir -o utilizar- relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia (Sadovsky, 2005, pp. 26-27).

Es interesante señalar que la construcción de esta fórmula es de carácter puramente inductivo: a partir de unos casos (aunque con la posibilidad de ser constatada en el conjunto -finito- de todos ellos). En una de las aulas la tabla se convirtió en objeto de institucionalización al transcribirse al pizarrón en un espacio de puesta en común, luego de que todos los grupos hubieran realizado un análisis similar (aunque incompleto o no del todo ordenado en algunos pocos casos).

En algunos grupos que llegaron a la relación el docente propuso un “diálogo socrático” a fin de elaborar una demostración de la fórmula. Por ejemplo, en el aula de la docente L. se dio el siguiente diálogo, a partir del análisis de un octaedro en cartón:

1 Obtuvieron una tabla análoga a la que se puede encontrar en <https://es.wikipedia.org/wiki/Deltaedro>

D: Supongamos que separamos todas las caras para contar las aristas. ¿Cuántas aristas tiene cada cara?

A1: ¿Cómo cada cara?

D: Pensá que cada cara está “suelta”. ¿Cuántos lados tiene?

A2: Tres, porque son triángulos.

D: ¿Y cuántos triángulos hay? [En el caso particular de un octaedro]

A1: Ocho.

D: ¿Entonces cuántas aristas tenemos en total?

A1: Veinticuatro.

D: Pero el octaedro tiene 12 aristas... ¿Qué pasó?

A2: Hay que dividir por dos.

D: Claro, porque estamos contando dos veces cada arista, ¿ven? Escribamos esto como una fórmula: multiplico por 3 la cantidad de caras y luego la divido por 2. Queda $A=3C/2$.

Quehaceres puestos en juego por los estudiantes: validar (a través de la tabla o de una demostración), poner en juego propiedades (el uso del factor común), explorar (regularidades en la tabla, ensayos de fórmulas) y calcular (para constatar que la fórmula se cumple en todos los casos).

3. Construcción de normas en el aula a partir del trabajo en proyectos

Godino *et al.* (2009) clasifican las normas sociomatemáticas presentes en un aula de matemática en epistémicas, cognitivas, mediacionales, interactivas, afectivas y ecológicas.

Las normas epistémicas son aquellas que regulan la caracterización de los objetos matemáticos: “llamaremos faceta epistémica de la dimensión normativa (o normas epistémicas, para abreviar) al conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una determinada institución” (Godino *et al.*, 2009, p. 65). Algunas normas de este tipo presentes en nuestras aulas son:

- Finalización de la exploración: en cada aula y grupo debió establecerse cuándo se consideraba terminada una exploración. ¿Cómo saber que la exploración terminó al buscar deltaedros de 5 caras y no encontrar ninguno?

- Aceptación de un principio de inducción ingenuo: *si vale para un conjunto de casos, vale para todos*. En algunos grupos se aceptó que la fórmula $3C=2A$ era válida al constatarse en la lista de poliedros convexos; en este caso, al ser finita la lista, la fórmula puede constatarse en cada poliedro. Sin embargo, la fórmula puede extenderse a poliedros no convexos, de modo que ese tipo de validación no es aceptable; en algunas aulas el docente hizo mención de la contingencia de este tipo de razonamiento.

La dimensión cognitiva refiere a las elaboraciones personales de los sujetos: “algunos de los constituyentes de las configuraciones cognitivas de los alumnos se pueden considerar como normas que regulan el comportamiento matemático de los alumnos; dichas normas personales (o cognitivas) pueden concordar o no con las normas epistémicas correspondientes” (Godino *et al*, 2009, p. 66). Por ejemplo:

- *No es necesario medir para constatar que es un triángulo equilátero*. Este episodio se discutió más arriba: en este caso se evidencia una norma según la cual se puede construir un triángulo equilátero sin efectuar mediciones ni recurrir a propiedades.

- *La relación entre caras y aristas se vincula con la cantidad máxima de caras en torno a un vértice*. En varios grupos se encontraron argumentos erróneos como el siguiente: “los deltaedros no poseen caras impares debido a que como en un mismo vértice no puede haber más de 5 triángulos las caras deben ser pares sí o sí”. Se visualiza aquí un intento por poner en relación distintas propiedades de los deltaedros, usándolos como argumento fallido para una conclusión que se sabe verdadera. Es frecuente en ejercicios de demostración matemática el uso incorrecto de elementos teniendo como horizonte un resultado previamente conocido (pero no demostrado) al que se quiere llegar.

El uso de medios y recursos (libros, computadoras, etc.) está gobernado por reglas mediacionales que condicionan los procesos de estudio. Identificamos la siguiente norma mediacional:

- *Se pueden buscar fuentes en la web* (cálculos, fórmulas). La actividad fue nombrada “trianguledros” para evitar que fueran inmediatamente a la web en caso de haberla llamado deltaedros (que es la denominación de los poliedros cuyas caras

son triángulos equiláteros) y se perdieran la oportunidad de descubrir por sí mismos mediante exploración los deltaedros convexos. Pero a lo largo del curso se avanzó la consulta de fuentes en Internet y otros medios (libros). Tal vez este uso debería ser objeto de un tratamiento especial en una próxima cursada, problematizando la calidad de las fuentes, pensando formas de validar la información obtenida, discutiendo la forma de llevar a cabo las búsquedas, etc.

Las normas interactivas regulan los modos de interacción entre las personas que intervienen en los procesos de estudio matemático. El trabajo en grupo, la modalidad de taller y la construcción de vínculos entre estudiantes y entre estudiantes y docente, contribuyeron a la construcción de confianza en el propio trabajo matemático de cada estudiante (Mateos *et al.*, 2021). Algunas normas interactivas identificadas:

- *El docente recorre el aula; se permite llamar al docente ante dudas.* Se combinan estas dos reglas: por un lado, el docente recorre el aula monitoreando el trabajo de cada grupo; este recorrido puede interrumpirse ante alguna duda (en algunos casos el docente pide a los grupos que esperen su turno en el recorrido).

- *El trabajo de otros grupos es interesante y es valorado porque nos retroalimenta.* Se evidenció gran interés y respeto por las producciones ajenas. En posteriores diálogos con estudiantes surgió que “hubiera estado bueno ver todos los temas”.

- *El docente no monitorea el reparto del trabajo y los roles en el interior de los grupos.* Esta ausencia de monitoreo devino en que algunos grupos no pudieron constituirse como tales o generar una identidad que los ayudase al sostenimiento del trabajo. En una de las aulas, el docente instó a los grupos a elegir un nombre para su equipo; este aspecto resultó positivo para generar una identidad grupal.

Las normas afectivas relacionan la matemática con el universo de intereses de los estudiantes: “una regla afectiva será, pues, que el profesor debe buscar o inventar situaciones matemáticas ricas, que pertenezcan al campo de intereses a corto y medio plazo de los estudiantes” (Godino *et al.*, 2009, p. 68). En este sentido, se evidenció la siguiente norma afectiva:

- *La matemática puede ser motivadora para ideas de diseño.* Esta norma tuvo lugar en diversos grupos que utilizaron los poliedros hallados para construir diferentes objetos afines a su carrera: carteras de cuerina, cartucheras de vinilo, macetas de concreto, empaques para productos, etc.

La dimensión ecológica relaciona el aula con la sociedad a cuyo servicio se constituye. Podemos vincular con el aspecto ecológico la relación de la asignatura con otras materias o con el ejercicio profesional. Algunas normas ecológicas que podemos mencionar son:

- *Se pueden incorporar al análisis de los objetos ideas de otras materias.* Al momento de analizar creaciones propias vinculadas con deltaedros, algunos grupos incluyeron aspectos como: materiales, sustentabilidad, reciclaje, aspectos estéticos. Al preguntar a los estudiantes sobre el porqué de la inclusión de estos ejes de análisis se vio que correspondía al tipo de análisis realizado en otras materias.

- *La matemática puede ser usada en otras materias/en la práctica profesional.* Algunos grupos usaron ideas y formas de deltaedros en proyectos de otras asignaturas para el diseño de indumentaria.

4. Idoneidad del proceso a partir de testimonios de estudiantes

Luego de finalizada la cursada se entrevistó a dos grupos de estudiantes que trabajaron sobre el proyecto trianguledros. Se trata de estudiantes que transitaron exitosamente sus cursadas. Las entrevistas fueron grupales en forma semiestructurada, con preguntas-guía. Se indagó sobre sus expectativas en la materia, su parecer sobre la propuesta, aprendizajes logrados, visión de la matemática.

Respecto de la visión de la matemática de los estudiantes, se evidencia que asocian la matemática con la realización de cálculos:

- *Fue una matemática menos de cuentas y más de otros aspectos, como las simetrías y todo eso; yo no pensé que las simetrías eran parte de la matemática.*

- *Siempre odié matemática. Me anoté porque mis compañeros me insistieron. Me sorprendí de ver la matemática diferente a lo que venía acostumbrada. Estuvo bueno.*

Destacaron que el trabajo en grupos resultó provechoso:

- *Las tres en cada clase nos apoyábamos para sentirnos seguras y ver si estudiábamos lo mismo.*

- *Consultábamos con otros grupos y había buena onda. Intercambiábamos ideas o consultábamos algo que no sabíamos nosotros y nos ayudábamos.*

La propuesta logró motivar a los estudiantes:

- *Me gustó que haya distintos temas y poder elegir el que más nos llamaba.*
- *Elegimos los trianguledros porque eran re lindos, venía un poco de la mano con simetrías ese trabajo.*

Respecto de qué aprendieron en la materia, destaca la matemática como fuente de inspiración:

- *Para Dibujo usamos mucho lo que vimos en Matemática, por ejemplo, los trianguledros. Más que nada porque elegimos eso y nos quedó un montón. Lo de simetrías no lo apliqué en ningún proyecto, pero lo tengo en cuenta para el futuro.*
- *La materia nos aportó en cuanto a abrir la cabeza. Tenés un montón de triángulos, ¿qué se te ocurre hacer? Poder diseñar en base a la matemática.*

En síntesis, la propuesta resultó motivadora para estas estudiantes, que pudieron articular lo aprendido con otras asignaturas incorporando los conocimientos a sus proyectos. La organización en grupos propició el trabajo colaborativo, de modo que cada integrante colaboraba con el aprendizaje de sus compañeras; este tipo de interacción también se dio entre grupos. La concepción que tenían de la matemática no coincidía inicialmente con la concepción implícita de la matemática de la asignatura, de manera que se contribuyó positivamente a ampliar la idea de la matemática de las estudiantes.

Conclusiones: aspectos positivos y cambios para la mejora

La propuesta resultó positiva en cuanto la recepción de la propuesta por parte de los estudiantes; la posibilidad de elección de algunas partes del recorrido resultó motivadora. Los temas tratados resultaron significativos para los estudiantes, que los utilizaron como insumo para procesos creativos de otras asignaturas. Se amplió la concepción de la matemática de los estudiantes, incorporando quehaceres novedosos como explorar y conjeturar, trabajo con tecnologías, manipulación de material concreto, consultas bibliográficas. El trabajo áulico permitió la emergencia de normas sociomatemáticas que no estaban instaladas en las prácticas habituales de los estudiantes.

El rol del docente en un aula planteada como taller en un trabajo por proyectos fue el de mediador entre la tarea y sus dificultades y los estudiantes. Este rol se re-

guló mediante un sistema de normas no explicitadas que se fueron construyendo durante la cursada.

Creemos necesario incorporar un mayor monitoreo del trabajo en el interior de los grupos, de manera de detectar asimetrías. También creemos pertinente la incorporación de alguna instancia de evaluación individual, que permita establecer cuantitativamente el dominio de ciertos contenidos matemáticos.

Bibliografía

- Alsina, Claudi; Burgués, Carmé y Fortuny, Josep M^a.** (1991). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis.
- Godino, Juan; Font, Vicenç; Wilhelmi, Miguel y de Castro, Carlos** (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
- Mateos, Nancy; Chorny, Fernando; Coll, Pablo y Reynoso, Laura** (2021). Enseñanza de matemática en la universidad: una experiencia sobre la construcción de relaciones de confianza en el aula. *Itinerarios Educativos. Revista del Instituto de Desarrollo e Investigación para la Formación Docente*, 15. <https://doi.org/10.14409/ie.2021.15.e0018>
- Michailuk, Celeste y Nicodemo, Mauro** (2015). *La evaluación en el área de matemática. Claves y Criterios. Nivel Secundario*. OEI.
- Sadovsky, Patricia** (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal.
- Segal, Silvia y Giuliani, Diana** (2008). *Modelización en el aula de matemática*. Libros del Zorzal.

Comprensión del concepto de límite y continuidad de funciones de una variable real

YANINA MACARENA MORALES

macarena.morales@uner.edu.ar

MARÍA FLORENCIA MOSTTO

florencia.mostto@uner.edu.ar

OCTAVIO AGUSTÍN RASCHETTI

octavio.raschetti@uner.edu.ar

SERGIO PABLO FARABELLO

sergio.farabello@uner.edu.ar

Facultad de Bromatología. Universidad Nacional de Entre Ríos (UNER)

Resumen

Los conceptos de límite y continuidad de funciones de una variable real constituyen obstáculos epistemológicos para los estudiantes de los primeros cursos de Cálculo en la Universidad.

El objetivo de este trabajo es investigar cómo los estudiantes universitarios comprenden los conceptos de límite y continuidad de funciones de una variable real en el marco de la Teoría APOE. Se propone una descomposición genética inicial en base a la cual se diseña la instrucción. El análisis de las producciones de los estudiantes permitió verificar empíricamente la descomposición genética inicial, constituyendo entonces un modelo útil de cognición que puede ser mejorado en futuras investigaciones.

Palabras clave: funciones / límite / continuidad / descomposición genética

Introducción

A menudo, los docentes nos enfrentamos con el desafío de decidir qué actividades proponer a nuestros alumnos, situados en un espacio y tiempo determinados, para enseñar un tema específico. Resolver “qué hacemos” se vincula firmemente con cómo debemos emplear el tiempo destinado a la clase de modo que los alumnos participen de alguna actividad que, ante nuestra mirada, dé cuenta de un proceso que conduce a aprender aspectos del tema en cuestión.

A la hora de reflexionar sobre cuáles son los conocimientos involucrados en una tarea específica, las respuestas son generalmente una amalgama de temas vinculados de alguna manera con esa tarea. Algunos materiales curriculares y también libros de texto proponen ayudas para que el docente tome decisiones acordes con su proyecto didáctico, pero es muy difícil en tanto el portador sea un material escrito, difundir las condiciones de realización y gestión de una clase (Fregona, 2013).

La planificación de una clase de Matemática implica una serie de factores que el docente debe tener en cuenta. El objetivo principal de la planificación es, aunque no se lo manifieste explícitamente, lograr que el alumno aprenda. Por ello se habla comúnmente de estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Pero son pocos los profesores que se preguntan cómo se genera el aprendizaje de un determinado tema de Matemática en sus estudiantes, qué procesos llevan a cabo para lograrlo, o cómo influye en ellos el entorno del aula (López Acosta, 2011).

Para poder comprender el aprendizaje matemático es necesario tener en cuenta cómo se conforman los sistemas conceptuales de las personas. Resulta importante —para cualquier proceso educativo que se pretenda encarar— explicar, por ejemplo, por qué los estudiantes se diferencian unos de otros en la forma en que actúan o hacen determinadas cosas. Contar con esa información implicaría estar en mejores condiciones para diseñar estrategias didácticas orientadas al aprendizaje matemático en forma orgánica, tendientes a abandonar paulatinamente las ideas simplistas que reducen la complejidad del aprendizaje a formas de “transmisión matemática”.

Fundamentación del problema

En los cursos de Cálculo se desarrollan contenidos en torno al estudio de las propiedades y características asociadas al concepto de función, tales como: tipos de funciones, dominio, rango, composición de funciones, límite y continuidad de una función, derivada de una función, entre otros.

Hernández-Suárez, Prada-Núñez y Ramírez-Lea (2017) investigaron los obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad que presentan los estudiantes universitarios al inicio del proceso de su formación académica en una universidad pública de Colombia. En sus conclusiones manifiestan que el tema de límite de una función es abordado por el docente casi siempre de forma algebraica, lo cual resulta válido hasta el momento en que el estudiante se tiene que enfrentar a expresiones de límites indeterminados para los cuales debe factorizar, momento en el que comienzan a surgir inconvenientes debido a la baja competencia que poseen los estudiantes en los procesos de factorización. Indican además que esta dificultad podría evitarse si al momento de explicar el tema el docente incorporara diversos registros de representación semiótica de forma que resulten complementarios unos con otros, pero que parta siempre del concepto de aproximación por los dos lados, es decir, verificar la condición de unicidad del límite.

En relación con el tema de continuidad de funciones evidenciaron desconocimiento en los estudiantes en el proceso a seguir en el momento de la evaluación. Reportan dificultades para determinar el tipo de discontinuidad que presenta una función, que sumado al desconocimiento de las funciones definidas por partes resulta inoperable la determinación de una adecuada solución cuando la discontinuidad es evitable.

Además, concluyen que los estudiantes confunden los conceptos de límite y continuidad asumiendo que ambos representan la misma idea, lo que se convierte en un obstáculo conceptual. En sus procesos argumentativos presentan dificultad para evaluar la existencia del límite en un punto, lo que les impide asimismo determinar el tipo de discontinuidad que se pueda presentar.

Finalmente sugieren que los docentes tienen que implementar secuencias didácticas que vayan aumentando gradualmente la complejidad de las situaciones, al tiempo que utilicen diversos registros de representación.

En este trabajo se pretende dar respuesta a qué concepción tienen los estudiantes sobre los conceptos de límite y continuidad de funciones de una variable real y cuáles son las construcciones mentales que evidencian en el marco de la Teoría APOE.

Marco teórico

Se adopta como marco teórico la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) desarrollada por Dubinsky y un grupo de colaboradores del Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC).

Dubinsky y Lewin (1986) proponen la “abstracción reflexiva” de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos y plantean que el origen de la teoría APOE se encuentra en la reformulación de la teoría Piagetiana de la Abstracción Reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

En la teoría APOE se define un ciclo de investigación que consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de la enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos (Imagen 1).

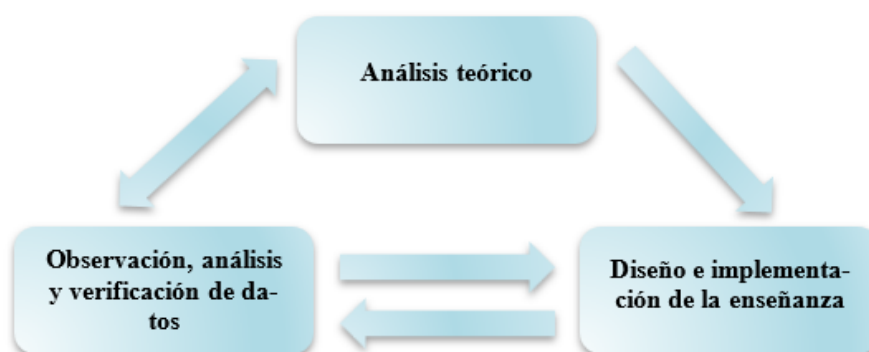


Imagen 1: Ciclo de investigación de la Teoría APOE. Adaptado de Arnon *et al.* (2014)

Análisis teórico

El análisis teórico tiene como finalidad proponer un modelo que pueda describir las construcciones mentales específicas del alumno, al momento de desarrollar

la comprensión del concepto que está estudiando. El resultado de este análisis es lo que se denomina *descomposición genética* (DG) del concepto. La DG consiste en una descripción detallada de las construcciones mentales que el individuo debería realizar para poder enfrentarse satisfactoriamente a un concepto matemático en particular.

La *descomposición genética inicial* (DGI) es el análisis teórico realizado a priori por el investigador y constituye la base a partir de la cual se llevará a cabo el diseño e implementación de la instrucción, así como el análisis de resultados.

Para construir un concepto matemático, el individuo comienza ejerciendo *Acciones* sobre objetos previamente construidos. Las Acciones responden a estímulos externos y son realizadas paso a paso por el individuo —mirar o recordar una fórmula o tabla; utilizar un algoritmo determinado—.

Cuando el estudiante repite una Acción y reflexiona sobre ella, aunque sin la necesidad de ejecutarla explícitamente, puede *interiorizarla* en un *Proceso*. Este se caracteriza porque el estudiante no requiere de estímulos externos para realizar la operación e incluso puede saltar pasos o anticipar el resultado de su aplicación (Dubinsky, 1996, Arnon *et al.* 2014).

La Teoría APOE define otros dos mecanismos por medio de los cuales se puede generar un Proceso: la *coordinación* y la *reversión* o *inversión*. El mecanismo de coordinación tiene lugar cuando un Proceso construido se relaciona con otro Proceso para determinar un nuevo Proceso. El mecanismo de reversión permite a un individuo revertir un Proceso existente dando origen a un nuevo Proceso.

Cuando un individuo logra reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un Proceso en particular, toma consciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él —ya sean Acciones o Procesos— y puede construir esas transformaciones, entonces el proceso ha sido *encapsulado* por el individuo en un *Objeto*.

Una vez que un individuo ha logrado construir un Objeto, puede ser capaz de regresar sobre los Procesos que lo generaron a través del mecanismo de *desencapsulación*. De esta manera, podrá ir y venir entre el Objeto y el Proceso cada vez que sea necesario.

Los Esquemas se definen como una colección coherente de Acciones, Procesos y Objetos —a la que pueden sumarse también otros Esquemas y las relaciones existentes entre ellos— asociados a un concepto particular (Asiala *et al.*, 1997). Los Esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados,

son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que nuevas relaciones se construyen entre sus componentes. Un Esquema puede ser tematizado en un nuevo Objeto sobre el cual pueden hacerse nuevas Acciones.

Metodología: el ciclo de enseñanza ACE

La Teoría APOE establece como modelo didáctico el *ciclo de enseñanza ACE*, estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) actividades; (C) discusión en el aula; y (E) ejercicios.

En la primera parte del ciclo, las *Actividades*, los estudiantes trabajan de manera colaborativa en grupos resolviendo tareas diseñadas con el fin de reflexionar sobre sus construcciones previas y promover las construcciones mentales sugeridas en la DG.

En la *Discusión en clase* los estudiantes desarrollan las tareas propuestas, reflexionan sobre su trabajo y el profesor subraya las ideas importantes o introduce preguntas para promover el surgimiento de ideas que aún no aparecieron.

En la última etapa del ciclo, los *Ejercicios de tarea*, los estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas diseñadas con el fin de reforzar la reflexión realizada en las dos etapas previas. La DG afecta a todos y cada uno de los componentes del ciclo ACE.

Taller sobre límite y continuidad de funciones

Se diseñó una actividad del tipo Taller —modalidad presencial— consistente en 6 encuentros en los que se trataron los temas de límite y continuidad de funciones. Participaron estudiantes que se encontraban cursando Matemática II de primer año (segundo semestre) de las carreras de Farmacia, Bioquímica y Licenciatura en Bromatología de la Facultad de Bromatología de la UNER.

En cada uno de los encuentros se propusieron ejercitaciones que los estudiantes tenían que realizar y discutir en grupo, finalizando con una breve puesta en común.

Luego se diseñaron tres actividades —una grupal y dos individuales— en función de la DGI definida para la comprensión del concepto de límite y continuidad

de funciones. En base a las producciones de los estudiantes, se analizó la comprensión del concepto de límite y continuidad de funciones.

Comenzaron 60 estudiantes, número que fue variando a lo largo del Taller, dado que 57 estudiantes completaron la actividad 2 correspondiente al cuarto encuentro y 28 completaron la actividad final del taller.

Descomposición genética inicial

Las construcciones que se describen en la descomposición genética (DG) no siguen necesariamente un orden progresivo o lineal, porque el estudiante puede regresar del Proceso a la Acción o hacer las Acciones en un orden distinto al que se elige para escribir la DG. Sólo para facilitar el análisis de los resultados se realizó una lista de las construcciones descritas en la DG y se las numeró en forma correlativa (Tabla 1), pero debe tenerse en cuenta que ese número asignado no tiene necesariamente ninguna relación con un orden de aparición de esas construcciones en los estudiantes.

ACCIONES	
A1	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(x)$ en un solo valor de x que es considerado cercano, o a veces igual a x_0
A2	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(x)$ en algunos valores de x , siendo ellos cada vez más cercanos a x_0
A3	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(x)$ en algunos valores de x , siendo ellos cada vez más cercanos por derecha o por izquierda a x_0
A4	Evaluar gráfica o analíticamente la función $f(x)$ en algunos valores de x , siendo ellos cada vez más pequeños ("hacia menos infinito") o más grandes "hacia más infinito")
A5	Calcular analítica o gráficamente el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0
A6	Calcular analítica o gráficamente el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a infinito
A7	Identificar gráficamente la discontinuidad de una función $f(x)$ en un valor de x al encontrar un punto vacío o ausente, un salto finito o una asíntota vertical
A8	Comprobar gráficamente la continuidad de una función $f(x)$ en un valor de x verificando el cumplimiento de las condiciones que tienen que cumplirse para que una función sea continua en un punto
A9	Comprobar analíticamente la continuidad de una función $f(x)$ en un valor de x verificando el cumplimiento de las condiciones que tienen que cumplirse para que una función sea continua en un punto
PROCESOS	
P1	Cuando x se aproxima a x_0 por derecha y por izquierda, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a un mismo valor L

P2	Cuando x se aproxima a x_0 por derecha o por izquierda, las imágenes de $f(x)$ se alejan hacia más o menos infinito
P3	Cuando x se aleja indefinidamente hacia la izquierda o hacia la derecha, las imágenes de $f(x)$ se aproximan a un valor L
P4	Reflexionar sobre las condiciones que tiene que cumplir una función $f(x)$ para que sea continua en un valor de x
P5	Interpretar el significado del valor del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0
P6	Interpretar el significado del valor del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a infinito
OBJETOS	
O1	Manifestación consciente de la existencia o no del límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 escribiendo además la expresión algebraica correspondiente
O2	Manifestación consciente de la existencia o no del límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a infinito, escribiendo además la expresión algebraica correspondiente
O3	Comprender la relación entre la existencia o no del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y la existencia o no de la imagen de la función $f(x)$ en el valor x_0
O4	Manifestar la relación entre la existencia de una asíntota vertical u horizontal de una función con el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a un valor finito o infinito, respectivamente
O5	Interpretar que si una función $f(x)$ es continua en un valor x_0 , el límite de la función se puede calcular a través de la imagen de la función en x_0
O6	Comprender que la existencia de un punto vacío en la representación gráfica de la función implica la existencia del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 (por izquierda, por derecha o por ambos lados), pero no de la imagen de esa función en el punto x_0

Tabla 1: Descomposición genética inicial del concepto límite y continuidad de funciones

Análisis de resultados

Para validar la DGI propuesta, se procedió a realizar el análisis de los datos empíricos y compararlos con el análisis teórico, para realizar un análisis fino y veraz sobre la manera como los estudiantes pueden construir el concepto de límite y continuidad de funciones.

Todas las Acciones, Procesos y Objetos definidos en la DGI aparecieron, en mayor o menor medida en las producciones de los estudiantes.

En la Tabla 2 se muestran las construcciones mentales previstas (CMP) de la DGI que podían aparecer en los estudiantes al realizar la Actividad 1, como así también la cantidad de grupos que las evidenció. La Actividad 1 fue realizada por 60 estudiantes distribuidos en 11 grupos.

En la columna “Cantidad de CM halladas”, el primer número que aparece entre paréntesis corresponde a la CMP; mientras que el segundo número indica que la CMP no se evidencia con claridad. Por ejemplo, en el ejercicio 1, hubo 8 grupos de

estudiantes que evidenciaron una CM Proceso y uno que evidenció una CM entre Acción y Proceso.

Cuando no figuran números entre paréntesis, como en el ejercicio 2, debe interpretarse que dicho número indica la cantidad de grupos que evidenció la CMP.

Las consideraciones de los dos últimos párrafos aplican también en las Tablas 3 y 4.

Ejercicio	Construcción Mental Prevista	Identificación de la CMP	Cantidad de CM halladas
Ejercicio 1	Proceso	P1	9 (8+1)
Ejercicio 2	Acción	A4	2
Ejercicios 3.1, 3.2 y 3.3	Proceso	P1	7 (5+2)
Ejercicios 3.1 y 3.2	Acción	A2	5 (4+1)
Ejercicios 3.1 y 3.2	Acción	A3	5 (4+1)
Ejercicio 3.3	Acción	A1	9 (5+4)
Ejercicio 3.4	Objeto	O1	6 (2+4)
Ejercicio 4	Acción	A2	8 (3+5)
Ejercicio 4	Acción	A3	8 (3+5)
Ejercicio 4.1	Proceso	P1	8 (5+3)
Ejercicio 4.3	Proceso	P1	9 (5+4)
Ejercicio 4.5	Proceso	P1	7 (5+2)
Ejercicio 4.2	Acción	A1	9 (4+5)
Ejercicio 4.2	Acción	A1	7 (4+3)
Ejercicio 4.2	Acción	A1	7 (4+3)
Ejercicio 4.7	Objeto	O1	6 (2+4)

Tabla 2: CMP en la DGI para la Actividad 1 y construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes al realizar la actividad grupal

En la Tabla 3 se muestran las CMP de la DGI que podían aparecer en los estudiantes al realizar la Actividad 2, como así también la cantidad de estudiantes que las evidenció. La Actividad 2 consistió en una actividad individual que presentó seis consignas diferentes, las cuales se distribuyeron al azar entre los estudiantes. Fue realizada en forma individual por 57 estudiantes. Cada tipo de consigna fue realizada por un número de estudiantes que osciló entre 8 y 10.

Ejercicio	Construcción Mental Prevista	Identificación de la CMP	Cantidad de CM halladas

Ejercicio 1 Todas las consignas	Acción	A5	32
Ejercicio 1 Todas las consignas	Proceso	P5	26 (22+4)
Ejercicio 1 Consigna 1	Objeto	O3	8 (4+4)
Ejercicio 1 Consigna 1	Proceso	P1	2
Ejercicio 1 Consigna 2	Objeto	O3	3
Ejercicio 1 Consigna 2	Proceso	P1	5 (3+2)
Ejercicio 1 Consigna 3	Objeto	O3	3
Ejercicio 1 Consigna 3	Proceso	P1	3 (2+1)
Ejercicio 1 Consigna 4	Objeto	O3	2
Ejercicio 1 Consigna 4	Proceso	P1	0
Ejercicio 1 Consigna 5	Proceso	P2	4 (3+1)
Ejercicio 1 Consigna 6	Proceso	P1	3 (2+1)
Ejercicio 2 Consigna 2	Proceso	P3	2
Ejercicio 2 Consigna 2	Acción	A6	2
Ejercicio 2 Consigna 4	Proceso	P3	2
Ejercicio 2 Consigna 4	Acción	A6	2
Ejercicio 2 Consigna 6	Proceso	P3	2
Ejercicio 2 Consigna 6	Acción	A6	2
Ejercicio 2 Consigna 4	Proceso	P6	3 (1+2)
Ejercicio 2 Consigna 6	Proceso	P6	4 (3+1)
Ejercicio 2 Consigna 4	Objeto	O2	2
Ejercicio 2 Consigna 6	Objeto	O2	2
Ejercicio 2 Consigna 1	Proceso	P5	4 (2+2)
Ejercicio 2 Consigna 3	Proceso	P5	2 (1+1)
Ejercicio 2 Consigna 5	Proceso	P5	6 (4+2)
Ejercicio 3 Consigna 1	Objeto	O3	5 (3+2)
Ejercicio 3 Consigna 1	Objeto	O6	6 (4+2)
Ejercicio 3 Consigna 2	Objeto	O3	6 (5+1)
Ejercicio 3 Consigna 2	Objeto	O6	4
Ejercicio 3 Consigna 3	Objeto	O4	5 (2+3)

Ejercicio 3 Consigna 4	Objeto	O4	0
Ejercicio 3 Consigna 5	Objeto	O3	6 (5+1)
Ejercicio 3 Consigna 6	Objeto	O3	4 (3+1)
Ejercicio 3 Consigna 2	Objeto	O6	3

Tabla 3: CMP en la DGI para la Actividad 2 y construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes al realizar la actividad

En la Tabla 4 se muestran las CMP de la DGI que podían aparecer en los estudiantes al realizar la Actividad 3, como así también la cantidad de estudiantes que las evidenció. La Actividad 3 fue realizada en forma individual por 28 estudiantes.

Ejercicio	Construcción Mental Prevista	Identificación de la CMP	Cantidad de CM halladas
Ejercicio 1 – Puntos 3 y 4	Proceso	P6	20 (15+5)
Ejercicio 1 Puntos 5 a 12	Proceso	P5	20 (13+7)
Ejercicio 2.3	Acción	A9	11 (7+4)
Ejercicio 2.3	Acción	A8	8 (3+5)
Ejercicio 2.3	Proceso	P4	14 (6+8)
Ejercicio 3	Acción	A7	6 (4+2)
Ejercicio 3	Proceso	P4	16 (5+11)
Ejercicio 4	Proceso	P4	17 (10+7)
Ejercicio 4	Objeto	O5	14 (7+7)

Tabla 4: CMP en la DGI para la Actividad 3 y construcciones mentales evidenciadas por los estudiantes al realizar la actividad

Discusión y conclusiones

Las construcciones mentales previstas en la DGI aparecieron mayoritariamente en las producciones realizadas por los estudiantes. Podría decirse entonces que la DGI ha sido verificada empíricamente, por lo que puede constituir un modelo útil de cognición, aunque factible de ser mejorado. Como afirmamos anteriormente en el marco teórico, la DG no es única y tampoco tiene limitaciones en cuanto a su evolución. Puede ser revisada con el fin de refinarla; rediseñar las actividades, discusiones de clase y ejercicios; y volver a aplicar el ciclo de enseñanza ACE con nuevos

instrumentos, adecuados a la DG refinada, con el objetivo de obtener una descripción más precisa y detallada de las construcciones mentales que el estudiante puede evidenciar al enfrentarse al estudio de límites y continuidad de funciones de una variable real.

Del conjunto de los estudiantes, 43 pudieron ser clasificados en diferentes niveles de acuerdo con las construcciones mentales evidenciadas en la totalidad de las actividades. El 16% ($n=7$) fue clasificado en un nivel entre Acción y Proceso, el 47% ($n=20$) en un nivel Proceso, el 14% ($n=6$) en un nivel entre Proceso y Objeto, y el 23% ($n=10$) en un nivel Objeto.

Esto no quiere decir que los estudiantes hayan evidenciado solo el nivel en que se los ha clasificado, sino que, de acuerdo con el marco teórico adoptado, dieron muestras de otras construcciones mentales, moviéndose entre Acción, Proceso y Objeto según la característica de la consigna que tenían que resolver.

Las entrevistas resultaron, además, un instrumento importante para terminar de caracterizar el nivel de comprensión del estudiante ya sea para confirmar o modificar lo que se había observado en la parte escrita. Por ello, coincidiendo con las investigaciones mencionadas en el marco teórico, resulta importante combinar las entrevistas con las producciones en lápiz y papel para profundizar aún más el análisis y la contrastación de la DG.

Bibliografía

- Arnon, Ilana, Cottril, Jim, Dubinsky, Ed, Oktac, Asuman, Roa Fuentes, Solange, Trigueros, María y Weller, Kirk** (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. 10.1007/978-1-4614-7966-6
- Asiala, Mark, Brown Anne, De Vries, David, Dubinsky, Ed, Mathews, David y Thomas Karen** (1997). A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. *MAA Notes*, 2, 37-54. 10.1090/cbmath/006/01
- Dubinsky, Ed** (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 08(03), 24-41. <http://funes.uniandes.edu.co/10056/1/Aplicacion1996Dubinsky.pdf>

- Dubinsky, Ed y Lewin, Philip** (1986). Reflective abstraction and Mathematics education: the genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, 55-92. <http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf>
- Fregona, Dilma** (2013). Una propuesta de análisis para la preparación y gestión de clases de matemática. *Cuadernos de Educación*, 11(11).
- Hernandez-Suarez, César Augusto, Prada-Núñez, Raúl, y Ramírez-Leal, Pastor** (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Revista Perspectivas*, 2(2), 73-83. <https://doi.org/10.22463/25909215.1316>
- López Acosta, Luis Alberto** (2011). *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis inédita de licenciatura). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.

Eje 5. Educación matemática en carreras no matemáticas

Reflexiones y experiencias para el aula

Matemática y el modelo de aprendizaje experiencial. Una propuesta para el aula universitaria de acuerdo a los estilos de aprendizaje

SILVIA VRANCKEN

svrancke@fca.unl.edu.ar

MARIANA SCHMITHALTER

mschmithalter@fca.unl.edu.ar

MARÍA SOL BISANG

mariasolbisang@gmail.com

Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral - UNL

Resumen

Según el modelo de aprendizaje experiencial, el conocimiento se produce a través de un proceso en el cual se desarrollan capacidades y habilidades a través de la experiencia. Se trata de un ciclo en el que cada una de las fases se relaciona con los estilos o formas en que la persona se aproxima al aprendizaje. En el contexto de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral, se investigó sobre los estilos de aprendizaje predominantes y se diseñaron actividades con la finalidad de facilitar que los alumnos experimenten todas las etapas del modelo, buscando promover un aprendizaje más significativo y un desarrollo equilibrado de sus estilos. Este trabajo presenta la experiencia implementada en el cursado de Matemática II y destaca algunos resultados sobre la forma en que los estudiantes abordaron las situaciones.

Palabras clave: estilos de aprendizaje / aprendizaje experiencial / educación matemática

Introducción

La educación superior tiene la responsabilidad de formar profesionales competitivos, capaces de responder de forma creativa a la solución de problemas. En este sentido, el desarrollo de aprendizajes significativos, que favorezcan el análisis crítico y la aplicación del conocimiento es fundamental en la formación de un estudiante.

En el mundo actual, en el que la información es accesible para una gran inmensidad de personas, es fácil confundir aprendizaje con la recepción de información. Sin embargo, sabemos que, si lo que vemos, oímos y escuchamos queda en eso, simples piezas informativas, lo más probable es que al poco tiempo olvidemos lo que creímos haber aprendido. Es necesario que se produzca un cambio en nuestra estructura cognitiva, en nuestra forma de pensar o actuar, para que haya un real aprendizaje.

Como docentes de matemática en una carrera de ingeniería, nos interesa en particular el modelo de aprendizaje experiencial de Kolb (1984), el cual se fundamenta en la idea de que el conocimiento se produce a través de un proceso en el cual se desarrollan capacidades y habilidades a través de la experiencia, entendiendo esta como: “el origen del discernimiento a través del sentido y la percepción del mundo sensible conforme a las vivencias de cada sujeto” (Espinar Álava y Vigueras Moreno, 2020, p. 4).

Ahora bien, tampoco basta con la experiencia para producir conocimiento, sino que es necesario transformarla, vinculándola a los conocimientos previos y desarrollando andamiajes que permitan aplicar el conocimiento a nuevas situaciones. Desde esta perspectiva, el aprendizaje es un proceso que relaciona la experiencia con la teoría. Se construye conocimiento a través de la reflexión y del sentido que se otorga a lo vivido.

Kolb (1984) argumenta que el aprendizaje es el resultado de cómo las personas perciben y luego procesan lo que han percibido. Identifica dos tipos de percepción, desde la experiencia concreta o a través de la conceptualización abstracta, y dos tipos de procesamiento, a través de la experimentación activa o mediante la observación reflexiva. Así, para el autor, el aprendizaje es un proceso cíclico integrado por cuatro fases que se relacionan.

La primera etapa corresponde a la *experiencia concreta*, una fase activa basada en la experimentación, en la que el alumno aprende frente a una situación innova-

dora que le da posibilidades de interactuar con sus conocimientos previos. La fase de *observación reflexiva* es en la que el estudiante establece conexiones entre su experiencia y los resultados obtenidos, reflexionando sobre las observaciones para luego, en la etapa de *conceptualización abstracta*, elaborar conclusiones de carácter general, aplicables a contextos más amplios. Por último, en el período de *experimentación activa* el alumno pone en práctica dichas conclusiones obtenidas como guía para poder resolver nuevas situaciones que tengan relación con la experiencia vivida.

La vinculación de todos estos procesos conforma un ciclo que a su vez se repite, no necesariamente siguiendo siempre el mismo orden. Cada experiencia genera nuevas observaciones, nuevos elementos de reflexión y de estrategias, que dan lugar a la generalización y nuevas conceptualizaciones, de las que nuevamente se pueden deducir más posibilidades de acción y de generar nuevas experiencias.

Todas las etapas son necesarias para poder consolidar el proceso de aprendizaje y están relacionadas con la forma en que se accede al conocimiento o con las preferencias sobre cómo se aprende. Alonso *et al.* (2007) expresan: “Las personas parece que se concentran más en determinadas etapas del ciclo, de forma que aparecen claras preferencias por una u otra etapa” (p. 108).

Cada individuo utiliza su propio modo de aprender y las caracterizaciones de los mismos determinan sus estilos de aprendizaje. Para Kolb (1984), se refieren a algunas capacidades de los individuos que se destacan de otras como consecuencia de las experiencias propias y de los requerimientos del entorno.

Numerosos autores han trabajado a lo largo de décadas sobre esta temática, enriqueciendo esta perspectiva. Honey y Mumford (1986, como se citó en Alonso *et al.*, 2007) toman el esquema conceptual de Kolb y definen cuatro estilos de aprendizaje, que se adaptan a cada una de las fases del modelo experiencial. En la Tabla 1 se muestra cómo se relacionan.

Fases del ciclo de aprendizaje	Estilos de aprendizaje
Experiencia concreta	Activo
Observación reflexiva	Reflexivo
Conceptualización abstracta	Teórico
Experimentación activa	Pragmático

Tabla 1. Fases según el modelo experiencial y estilos de aprendizaje

De acuerdo con Honey y Mumford (1986, como se citó en Alonso *et al.*, 2007), como personas que aprenden, podemos ser: activo, reflexivo, teórico, pragmático. Esto se relaciona con la manera en que interpretamos la información que recibimos y la utilizamos.

Las personas activas son aquellas que aprenden haciendo, se sienten más cómodas en el ámbito de la acción, comprometiéndose con actividades tangibles. Por lo general, les resulta difícil apreciar las implicancias de sus experiencias y llevarlas a un nuevo nivel.

Las reflexivas aprenden observando y pensando en lo que ocurre desde afuera. Son capaces de analizar desde distintas perspectivas, pero les cuesta involucrarse en la acción.

Por su lado, los teóricos son aprendices que buscan analizar y explicar qué es lo que se encuentra detrás de las acciones y de los eventos. Necesitan modelos, conceptos, categorizaciones, para dar un sentido lógico a los conceptos o a los procedimientos.

Los pragmáticos necesitan poner en práctica en la vida real lo que aprenden. Los conceptos abstractos no le son de mucha utilidad si no pueden aplicarlos de manera concreta. A diferencia del activo, son experimentadores natos, prueban constantemente nuevas ideas para ver si funcionan en la vida real. Se sienten cómodos planificando y creando las bases para nuevas experiencias.

Así, como se ve, los estilos tienen que ver con cada una de las cuatro fases del aprendizaje experiencial. Para aprender, deberíamos pasar por cada una de las etapas, sin embargo, las exigencias del medio pueden producir un desarrollo desigual de las distintas capacidades (Crispín *et al.*, 2011).

Reconociendo la influencia de los estilos en el aprendizaje, su diagnóstico es una herramienta importante para comenzar a conocer a los estudiantes. Tanto Kolb (1984), como Honey y Mumford (1986, como se citó en Alonso *et al.*, 2007), han diseñado y puesto a prueba instrumentos que permiten medir y distinguir las preferencias de las personas, siendo el Cuestionario Honey-Alonso de Estilos de Aprendizaje (CHAEA) una adaptación de los mismos al contexto académico español (Alonso *et al.*, 2007), y uno de los más difundidos en el ámbito universitario.

Con un enfoque aplicado al ámbito educativo, Alonso *et al.* (2007) plantean que los estilos de aprendizaje son “rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven

como indicadores relativamente estables, de cómo los discentes perciben, interactúan y responden a sus ambientes de aprendizaje” (p. 48).

Por otra parte, como plantean Honey y Mumford (1986, como se citó en Alonso *et al.*, 2007), los estilos de aprendizaje tienen un carácter actitudinal y por ende variable, por lo que en las personas esta característica puede ser cambiante en el tiempo, especialmente cuando se realizan actividades encaminadas a transformarlas.

Es tarea del docente intervenir con propuestas que posibiliten la potenciación de los estilos predominantes de sus alumnos, pero que a su vez permitan el desarrollo de aspectos relacionados a los estilos que les resultan más lejanos.

Coincidimos con Crispín *et al.* (2011) en que la implementación de tareas en las que el aprendizaje se presente como un ciclo de actividad, a la manera que plantea Kolb (1976, como se citó en Alonso *et al.*, 2007), favorecerá un desarrollo equilibrado de los estilos, y, en consecuencia, aprendizajes más profundos.

Con esa finalidad, a partir de los resultados sobre la indagación de los estilos predominantes en nuestros estudiantes, decidimos diseñar una propuesta que pretende que los alumnos pasen por las cuatro fases del aprendizaje experiencial, con actividades que estimulen las capacidades relacionadas a los distintos estilos de aprendizaje.

En este trabajo presentamos brevemente los resultados de la aplicación del cuestionario a nuestros alumnos de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, en el inicio del segundo cuatrimestre de 2023, la experiencia realizada durante el cursado de la asignatura Matemática II y algunos resultados que llaman la atención sobre la manera que los estudiantes se enfrentaron a las situaciones planteadas.

Resultados del sondeo sobre estilos de aprendizaje a nuestros estudiantes

La aplicación del cuestionario CHAEA mostró que los cuatro estilos se encuentran presentes en nuestros estudiantes, pero con diferencias significativas en las preferencias. El estilo predominante fue el reflexivo, con un 58% de preferencia, seguido del teórico, con un 22%, luego del pragmático, 15%, y finalmente del activo, con un 5%. Nuestro grupo se caracteriza así por una gran proporción de alumnos

dispuestos a observar, escuchar, reflexionar, analizar y pocos inclinados a experimentar, probar, improvisar.

Estos resultados son bastante coincidentes con los de estudios en los que se aplicó el mismo cuestionario a estudiantes universitarios de Argentina, otros países de Latinoamérica y España. Sobre las razones que llevan a esas preferencias, los investigadores las relacionan de manera directa con los enfoques de enseñanza, asociando los estilos reflexivo y teórico, en general, con métodos tradicionales, formales y estructurados (Márquez Sañay *et al.*, 2022).

Si analizamos el modelo que todavía prevalece en nuestras aulas, con clases pensadas a partir de la exposición del profesor, con preguntas y ejemplos que buscan *hacer pensar* a los estudiantes, a partir de los cuales se desarrollan actividades, es posible deducir por qué las capacidades más fomentadas son la reflexión y el análisis. Y, si bien estas habilidades son necesarias en toda persona, es importante incorporar características de los estilos activo y pragmático, de manera de favorecer la toma de decisiones y la resolución de problemas, competencias fundamentales para un alumno de ingeniería.

Por tanto, luego de obtener los resultados de preferencia de nuestros alumnos, comenzamos a investigar qué tareas y estrategias colaboran con cada uno de los estilos, de manera de diseñar acciones que permitan intervenir en el aula propiciando un desarrollo equilibrado de los mismos. En forma paralela, se inició una búsqueda y selección de contenidos que favorecieran la creación de actividades que promuevan que los alumnos pasen por todas las fases del aprendizaje experiencial, de manera que permitan abordar estrategias propias de los estilos activo, reflexivo, teórico y pragmático.

La experiencia

Se diseñaron cuatro actividades para el estudio de la concavidad y puntos de inflexión de una curva, a partir del análisis de la segunda derivada de la función.

El modelo plantea como primer paso, partir de una experiencia concreta. La actividad uno propone, utilizando como soporte una aplicación de GeoGebra, la exploración de diferentes gráficas de funciones, para luego identificar y explicitar características de cada una. A través de la experimentación, los alumnos pueden

interactuar y aplicar sus conocimientos previos referidos al tema. Estas tareas son las preferidas por las personas en las que prevalece el estilo activo.

La siguiente actividad busca promover la observación y la reflexión (segunda fase del modelo de Kolb). A partir del análisis de una gráfica, requiere establecer conexiones entre los resultados obtenidos. La comparación y el contraste de ideas favorece la búsqueda de nueva información, estrategias que colaboran con el desarrollo del estilo reflexivo. Finalmente, teniendo en cuenta lo observado, se pide una generalización, adentrándose de esta manera en la tercera fase, que se continúa en la tercera actividad. En esta, se debe conceptualizar y responder una serie de interrogantes. También se solicita un mapa o red conceptual que involucre los conceptos trabajados. De esta forma, el alumno transita por la etapa de conceptualización abstracta y generalización, vinculándose al estilo teórico.

La última fase del modelo experiencial refiere a la aplicación de los conceptos a nuevas situaciones. Se preparó la actividad cuatro, que busca poner en situación concreta al alumno para analizar si es capaz de recurrir a las conclusiones obtenidas en las actividades anteriores. Su resolución exige modelar una situación aplicada a un ámbito de conocimiento afín a su carrera. Específicamente, se pide que construyan una gráfica que muestre el crecimiento de una planta sujeto a condiciones enunciadas. Luego, deben responder unas preguntas que permiten contrastar las nuevas ideas en este contexto diferente. De esta manera, se enfrenta al alumno a la fase de experimentación activa, con tareas que favorecen especialmente a las personas de estilo pragmático.

La guía con las cuatro actividades se presenta en el Anexo. Para su implementación en el aula, se formaron equipos de dos o tres integrantes. Las agrupaciones se realizaron según el estilo predominante de cada alumno. De manera de indagar las diferencias en las formas de responder, se armaron 7 grupos mixtos, integrados por alumnos de estilos distintos, y 17 grupos puros, formados por alumnos que prefieren el mismo estilo.

Las situaciones fueron resueltas en el horario y aula en que habitualmente se desarrollan las clases, bajo el acompañamiento de un docente. Las tres primeras actividades se resolvieron en una clase de 120 minutos. Se les entregó las dos primeras, y una vez completadas se les dio el enunciado de la tercera. A continuación, se debatieron las respuestas para, de manera colectiva, institucionalizar los concep-

tos. La última actividad se desarrolló durante la primera parte de la clase siguiente, en la que se pidió que, en lo posible, conformen los mismos grupos de trabajo.

Resultados

Debido a que cada actividad está relacionada con un estilo de aprendizaje, se analizaron las resoluciones en relación al estilo predominante de cada grupo.

Respecto a la primera actividad, planteada para favorecer la fase activa del aprendizaje, 15 de 24 grupos pudieron identificar de manera correcta el comportamiento de la función. Los errores que aparecieron se refieren al análisis de algunos aspectos de las funciones, mostrando problemas para relacionar lo pedido con sus conocimientos previos, ya que podían conectar el comportamiento de las gráficas con lo estudiado en relación al signo de la derivada primera. Nos llama la atención que, si bien pudo ser resuelta por grupos de diferentes estilos, se observaron menos dificultades en los conformados por alumnos preferentemente teóricos o pragmáticos. Consideramos que estos alumnos ya habían realizado un proceso de conceptualización y generalización, que les permitió aplicar lo aprendido a esta nueva situación.

En la segunda actividad, de estilo reflexivo-teórico, el 91,6 % de los grupos, indistintamente del estilo de aprendizaje predominante, fue capaz de relacionar el signo de la segunda derivada con la concavidad e identificar puntos de inflexión, estableciendo conexiones con lo observado en la gráfica.

Se encontraron más dificultades, independientemente del estilo, para responder la tercera actividad, cuyo objetivo principal era elaborar conclusiones de carácter general según lo trabajado en las actividades anteriores. Se destaca que los grupos formados por alumnos activos o pragmáticos, respondieron de una manera más directa y concisa que los reflexivos o teóricos, quienes, al tratar de explicar más, en varios casos terminaron confundiendo y cometiendo errores.

Sí se encontraron diferencias significativas al momento de realizar un mapa o red conceptual. Los grupos de estilo teórico pudieron sintetizar la información de manera correcta mientras que ningún grupo del estilo activo lo hizo, del reflexivo solo el 21,4% y del pragmático el 40%.

Respecto a la actividad dirigida a aprovechar o fortalecer características del estilo pragmático, al realizar la gráfica solicitada, todos los grupos pudieron distinguir

las fases de crecimiento de la planta, pero solo 11 de 24 grupos consiguieron identificar el comportamiento y graficar correctamente cada fase. Esto es, si bien fueron capaces de leer e interpretar el texto dado, prácticamente la mitad no pudo relacionar con los contenidos matemáticos trabajados anteriormente.

Nuevamente se observa en relación a las respuestas correctas que los estilos de los grupos, ya sean formados por alumnos del mismo o distinto estilo, es variado. Pero sí se detecta que solo un equipo pragmático puro y uno mixto no pudieron elaborar una gráfica acorde. El resto de respuestas incorrectas corresponde a grupos conformados por alumnos reflexivos, teóricos o una combinación de ambos.

Al momento de identificar el signo de la razón de cambio y explicar el motivo, lo han podido hacer 21 de los grupos (87,5%). Dos de las respuestas incorrectas corresponden a grupos integrados por alumnos de estilo pragmático, mientras que el tercero también es un grupo puro, en este caso de estilo reflexivo. Nos preguntamos si esto se debe a que no realizaron correctamente el proceso de abstracción de los contenidos previos necesarios o solo no fueron capaces de aplicar lo estudiado en esta situación.

Solo 12 grupos han podido reconocer el valor de t donde la derivada es máxima y, por otra parte, solo 9 grupos pudieron identificar el punto de inflexión en esta nueva actividad. Se presentaron dificultades al momento de poner en práctica las conclusiones obtenidas en las actividades anteriores, siendo una característica de la etapa de experimentación activa asociada al estilo pragmático. Al revisar las respuestas, encontramos que tres de las respuestas incorrectas o con errores, corresponden a grupos formados por alumnos de este estilo. El resto son de estilo reflexivo o teórico.

Valoración de la experiencia y reflexiones finales

El análisis de las resoluciones de los alumnos, especialmente en los grupos en los que prevalece el mismo estilo, no nos permite asociar de manera directa mejores respuestas o menos dificultades, en la actividad correspondiente a la fase que se relaciona con el estilo de preferencia. Consideramos que esto se debe a que los contenidos propuestos para esta experiencia están muy conectados con la comprensión de temas desarrollados anteriormente. Como expresamos, el proceso de aprendiza-

je no está conformado por un único ciclo, sino que, a partir de los conocimientos y las nuevas experiencias, se van desplegando sucesivos ciclos.

Luego de realizar las actividades y, con el objetivo de indagar sobre la experiencia, se implementó una encuesta a la que respondieron, de manera voluntaria, 74 de los 82 alumnos involucrados. Analizando los datos obtenidos, el 74,39% manifestó comprender el tema. Revelaron un elevado grado de satisfacción e interés en las actividades, valorando positivamente el uso del Geogebra y el trabajo en grupos, tareas y estrategias propuestas en general para alumnos de estilo activo.

Por otra parte, al preguntarles cuál preferirían, en el caso de poder realizar una única actividad, si bien no hubo una tendencia hacia un estilo en particular, los alumnos no necesariamente eligieron la pensada para su estilo predominante. Se visualizó que el 71,62% optó por aquella que no sea la de su estilo. Además, de estos alumnos que prefirieron la actividad de otro estilo, el 51% eligió la actividad del estilo activo. Destacamos esto como positivo, ya que no se encuentran cerrados a trabajar con tareas de su preferencia, lo que les abre posibilidades para que adopten paulatinamente aspectos de los estilos de aprendizaje que les son más ajenos.

Resaltamos el interés manifestado por tareas y formas de trabajo relacionadas al estilo activo, más considerando el muy bajo nivel de preferencia detectado al indagar sobre los estilos en nuestro grupo y la necesidad de fortalecerlo, teniendo en cuenta las competencias que requiere la carrera de ingeniería. La flexibilidad que presentan los estilos de aprendizaje con el transcurso del tiempo y la posibilidad de influir desde la enseñanza en esta dirección, tratando de adaptarnos para aprovechar sus estilos predominantes y, al mismo tiempo favorecer los más débiles, resultan factores relevantes en el proceso de mejorar y fortalecer los aprendizajes de nuestros alumnos.

Bibliografía

- Alonso, Catalina; Gallego, Domingo y Honey, Peter** (2007). *Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora* (7a ed.). Mensajero.
- Crispín, María Luisa; Esquivel, Melisa y Loyola, Marcela** (2011). Factores relacionados con el aprendizaje. En M. Crispín (Coord.). *Aprendizaje autónomo: orientaciones para la docencia* (pp. 29-48). Universidad Iberoamericana, AC.

- Espinar Álava, Estrella y Vigueras Moreno, José** (2020). El aprendizaje experiencial y su impacto en la educación actual. *Revista Cubana de Educación Superior*, 39(3), e12. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=So257-431420200003000012
- Kolb, David** (1984). *Experiential learning experiences as the source of learning development*. Prentice Hall.
- Márquez Sañay, Fernando; Bolaños Logroño, Paulina; Mantilla Cabrera, Carmen y Tixi Gallegos, Katherine** (2022). Estilos de aprendizaje en matemática y rendimiento académico de estudiantes universitarios. *Conciencia Digital*, 5(2), 184-201. <https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v5i2.2181>

Anexo

GUÍA DE TRABAJO

Matemática II

Integrantes del grupo:

Estudiaremos aspectos relacionados a la forma de la gráfica de la función. Abre el recurso de GeoGebra “Análisis de funciones”.

Responde lo pedido en cada actividad teniendo en cuenta que, en forma intuitiva decimos que **una curva es cóncava hacia arriba si se dobla hacia arriba y es cóncava hacia abajo si se dobla hacia abajo**.



Actividad 1

Para cada una de las funciones dadas, introduce su expresión algebraica en el campo correspondiente. Mueve con el cursor el punto ubicado sobre el eje de abscisas de manera que x_0 tome valores en todo el dominio de la función.

Explora tildando y destildando cada casilla las veces que necesites. Observa los resultados, visualiza lo que se muestra en la vista gráfica y completa la tabla de abajo.

	$f1(x) = e^{\frac{x}{2}} - 3$
a) Dominio	
Continuidad	
Derivabilidad	
Crecimiento	
Concavidad	
b) Rectas tangentes, ¿sobre la gráfica o por debajo de ella?	

c) Signo de la primera derivada para cada valor x del dominio	
d)	$f1'(-4) = \dots$ $f1'(-2) = \dots$ $f1'(0) = \dots$ $f1'(3) = \dots$
e) Signo de la derivada segunda para cada valor x del dominio	

Nota. Debido a cuestiones de espacio, se muestra una de las columnas de la tabla.

Actividad 2

Antes de comenzar, destilda las casillas del GeoGebra y limpia la vista gráfica (Ctrl+F).

a) Considera la función $f(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + 3x^2$.

Tilda la casilla $f''(x_0)$ y la correspondiente al punto $C(x_0, f''(x_0))$. Desliza el punto sobre el eje de abscisas, de manera de recorrer todo el dominio de la función. Observa los colores en que se representa el punto C para cada valor de x. Determina intervalos del dominio considerando como extremos los valores en los que el punto cambia de color.

Color del punto $C(x_0, f''(x_0))$	Intervalo del dominio	Signo de f''	Curvatura de la gráfica de f

Los puntos en los que la gráfica cambia su concavidad reciben el nombre de punto de inflexión.

La gráfica de $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = \dots$. En los puntos de inflexión, $f'' = \dots$

Actividad 3

Teniendo en cuenta lo observado para las funciones de las actividades 1 y 2:

a) ¿Cómo relaciona el signo de la derivada segunda con la forma de la curva? ¿Qué sucede en las zonas de cambio de color? En esas zonas, el punto C toma color celeste. ¿Qué indica este punto? Arma una tabla o red conceptual que sintetice lo observado para la forma de la curva en los distintos casos.

b) ¿Observas alguna relación entre cómo cambian las pendientes de las rectas tangentes, y la forma de la curva en cada uno de los casos?

c) Considerando las funciones de la actividad 1 y la celda que completó en relación al crecimiento de las mismas, analiza de qué forma crecen o decrecen (más rápido o más lento) relacionando con la concavidad de la gráfica.

d) Considerando la gráfica de la función de la actividad 2, analiza si existe algún valor de x en el que la función derivada primera tome un valor máximo o un valor mínimo. ¿Qué más puedes decir que sucede en este o estos valores de x ?

Actividad 4. *Fases de crecimiento de plantas. Producción en viveros forestales*

Comprender las fases de crecimiento que atraviesan los cultivos es esencial para su planificación. En el caso de producción de plantas en viveros forestales, una pequeña plántula que recién ha germinado tiene necesidades muy diferentes a las de una planta grande que ya está casi lista para ser llevada al campo. El desarrollo de casi todos los cultivos puede ser dividido en tres fases. En cada una, las plantas tienen requerimientos diferentes de luz, agua, espacio, tipo de atención necesarios para mantenerlas vigorosas.

Para plantas cultivadas a partir de semillas, la primera fase comienza con la siembra de las semillas y comprende la germinación y emergencia hasta la formación de las primeras hojas verdaderas. Típicamente una semilla demora en germinar de 14 a 21 días y luego unas cuatro a ocho semanas para un crecimiento inicial.

Luego de esta etapa, las plantas inician una segunda fase, de rápido crecimiento, que va desde la emergencia de las hojas verdaderas hasta el momento en que el plantín se acerca a la altura objetivo. Durante esta fase las plantas aumentan cada vez más rápido su tamaño. Según las especies, hay una gran variación para la duración de esta fase, alrededor de 8 a 20 semanas.

En una tercera fase, la energía es dirigida hacia el crecimiento de la raíz, en detrimento de la parte aérea. El crecimiento de tallos y hojas es cada vez menor, por lo que sus tamaños tienden a estabilizarse. Las plantas se “endurecen”, acondicionándose para resistir el estrés del trasplante. Es una fase fundamental, ya que las plantas deben adquirir características fisiológicas que le permitan su supervivencia. Tiene una amplia variación entre especies, de 1 a 4 meses.

a) Algunos parámetros normalmente utilizados para la cuantificación del crecimiento de una planta son su altura, peso seco, peso fresco, área foliar, longitud foliar. Considerando la información dada, bosqueja una curva que describa el crecimiento de una planta cultivada a partir de semilla, según las semanas transcurridas desde la siembra.

b) Analiza la representación gráfica y responde: **i)** ¿Qué signo tiene la razón con la que cambia la altura con respecto al tiempo? Explica tu respuesta.

ii) ¿Para qué valor aproximado de tiempo la razón de cambio de la altura con respecto al tiempo es máxima? En ese valor, ¿qué característica presenta la gráfica?

Diseño de objetos digitales de aprendizaje para abordar contenidos matemáticos en la carrera de ingeniería agronómica

LUIS FERNANDO CRESPO

luiscespo111@gmail.com

MARIO UBALDO AVILA

marioavila390@exa.unsa.edu.ar

BEATRIZ JOSEFINA SOLÍS

solis.beatriz@exa.unsa.edu.ar

MARÍA DE LAS MERCEDES MOYA

maritamoyaster@gmail.com

Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa)

Resumen

En este trabajo, se reflexiona sobre cómo la creación de objetos digitales de aprendizaje (ODA) mediante el programa eXeLearning, como estrategia didáctica, genera nuevos espacios de aprendizaje para los estudiantes de Matemática I de la carrera de Ingeniería Agronómica, considerando las problemáticas que enfrentan los alumnos ingresantes a la Universidad Nacional de Salta.

La integración de esta tecnología en la enseñanza de la matemática no solo enriquece la experiencia del alumnado, sino que también se presenta una oportunidad para el desarrollo profesional docente. El diseño de este tipo de herramientas tecnológicas permite mejorar y potenciar las competencias digitales docentes, específicamente en lo referido al área sobre contenidos digitales. Además, estos materiales educativos digitales no deben ser vistos solamente como complementos a nuestras prácticas educativas, debemos considerarlo como parte de nuestras prácticas de enseñanza para promover un aprendizaje más significativo.

Es necesario continuar investigando el potencial que tienen el uso de este tipo de herramientas en carreras no matemáticas, como así también seleccionar una estrategia metodológica para la creación de estos objetos digitales para la educación matemática.

Palabras clave: matemática para ingeniería / objetos digitales de aprendizaje / exelearning / competencias digitales docentes

Introducción

La incorporación de Tecnologías Digitales (TD) para la enseñanza se ha incrementado en todos los niveles educativos, en gran parte, esta tendencia fue impulsada por la necesidad de adaptarnos a la enseñanza virtual durante la pandemia.

En esta transición a la educación virtual, los docentes se vieron en la búsqueda de explorar nuevas tecnologías, desde plataformas de comunicación y colaboración, sistemas de gestión de aprendizajes, herramientas para la creación de contenidos digitales, instrumentos de evaluación, entre otras. Este cambio abrupto, que, si bien presentó un desafío, también sirvió como un catalizador para el desarrollo de las competencias digitales docentes (CDD).

En la educación matemática, las innovaciones tecnológicas abren espacios antes no explorados por los educadores matemáticos, y nuevas formas de pensar cómo evoluciona la enseñanza y el diseño de entornos de enseñanza-aprendizaje, generando nuevas prácticas y estableciendo metas en las que no pensábamos hace varios años (Engelbrecht *et al.*, 2020).

Un claro ejemplo de ello fue el cambio metodológico y pedagógico por la incorporación de tecnologías digitales experimentado en el dictado virtual de la asignatura Matemática I de la carrera de Ingeniería Agronómica de la Sede Metán - Rosario de la Frontera perteneciente a la Universidad Nacional de Salta. Esta materia, se dicta en el primer cuatrimestre a un grupo de alrededor 110 estudiantes, principalmente provenientes de la región.

La incorporación de los nuevos recursos tecnológicos educativos en las prácticas de enseñanza virtual impulsó una transformación en la enseñanza de la matemática en la asignatura, tanto para los estudiantes como los docentes de la materia. Este cambio no solamente afectó el desarrollo de las clases, sino que también generó una reflexión profunda sobre la metodología tradicional para enseñar matemática que se había estado utilizando en años anteriores.

En el retorno a la presencialidad, se fueron integrando diversas herramientas tecnológicas en la enseñanza. Precisamente en este período, el equipo docente empezó a desarrollar ODA mediante el software de autor eXeLearning como estrategia didáctica para la enseñanza de contenidos de la asignatura Matemática I. Al integrar esta tecnología, permite a los educadores crear experiencias de aprendizaje que

involucran activamente a los estudiantes con el contenido del curso. (Engelbrecht *et al.*, 2020).

Los ODA diseñados y utilizados, sirven como herramientas complementarias al dictado presencial, ofreciendo a los estudiantes, visualizaciones atractivas y dinámicas, actividades interactivas, y recursos de autoaprendizaje.

El uso de las aplicaciones de estos objetos para la enseñanza de la matemática, no se limita sólo con ser un recurso de apoyo, sino que busca ayudar a estudiantes que no pueden asistir a clases presenciales debido a razones personales, familiares, académicas, sociales o económicas. Además, busca ampliar las posibilidades de aprendizaje, ofreciendo una experiencia educativa más flexible e inclusiva para los estudiantes.

Por otro lado, el diseño de este tipo de herramientas no sólo enriquece los procesos de enseñanza y de aprendizaje, sino que también se presenta como una oportunidad en el desarrollo profesional docente para mejorar y potenciar sus CDD. Esto teniendo en cuenta el marco de referencia de las competencias digitales docentes del Instituto Nacional de Tecnología Educativa y Formación, dependiente del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España), cuyo objetivo es desarrollar en los docentes la capacidad de integrar de manera crítica y creativa las herramientas digitales en sus prácticas educativas. El marco referencial, compuesto de seis áreas, pretende que el docente además de adquirir habilidades técnicas también desarrolle una competencia pedagógica integral en el uso de las tecnologías de la información y comunicación. Entre las áreas que se proponen, una de ellas es la capacidad de crear, seleccionar y utilizar de manera efectiva recursos digitales, así como evaluar su impacto en el aprendizaje. Esta competencia no sólo mejora la calidad de la enseñanza, sino que permite adecuar los recursos a un contexto específico, promueven un aprendizaje autónomo, entre otros.

Hay que tener en cuenta que el diseño e integración de ODA abre un horizonte de posibilidades para la educación matemática, donde la tecnología se convierte en un aliado fundamental para la innovación docente y el desarrollo integral de los estudiantes.

Marco Teórico

La presencia de las TD en las clases de matemática se hace más notoria a medida que pasa el tiempo, e invita a repensar nuestra práctica de enseñanza en la uni-

versidad. Uno de los marcos teóricos con relación a la integración de las tecnologías en la educación matemática es el enfoque seres-humanos-con-medios, propuesto por los investigadores Marcelo Borba y Mónica Villarreal (Borba y Villarreal, 2005), que nace de las reflexiones realizadas por los autores sobre la aparente dicotomía que se presenta entre los humanos y la tecnología, si se tiene en cuenta que los medios influyen en la construcción de conocimiento, de acuerdo a cómo son utilizados y por quién son utilizados. No obstante, los autores plantean que se evite, la tendencia a ver a los humanos y a las herramientas tecnológicas como dos conjuntos independientes, ya que estos influyen en la manera como las personas organizan sus ideas, exploran y producen conocimiento mediante la interacción con ella. Este constructo teórico enfatiza que “los humanos son constituidos por las tecnologías que transforman y modifican su razonamiento y, al mismo tiempo, los humanos son constantemente transformados por esas tecnologías” (Borba y Villarreal, 2005, p.22).

Siguiendo esta línea, se resaltan trabajos de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), en donde exponen que a través de un colectivo de investigadores con el software GeoGebra, surgen propuestas que encaminan a mejorar el pensamiento variacional. En el trabajo de Santa-Ramírez *et al.* (2018), se aborda como un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel producen conocimiento geométrico escolar por medio de tareas de formación.

En Villarreal (2013) se proponen ejemplos de la incorporación de la tecnología en la producción matemática de estudiantes, en diferentes contextos, entendiendo que la integración implica la constitución de nuevos colectivos pensantes integrados por humanos y medios.

Desde esta perspectiva se enmarca el trabajo, donde se analiza la interacción de un colectivo de profesores que diseña ODA mediante el programa eXeLearning. Este grupo de docentes conforma un “colectivo de profesores-con-eXeLearning”, donde la tecnología se convierte en un elemento constituido de la práctica docente y de la producción de conocimiento matemático para la enseñanza-aprendizaje.

La incorporación de este tipo de herramientas digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje es relevante, ya que son recursos educativos digitales auto-contenidos, reutilizables y etiquetado con metadatos, que permiten el logro de aprendizajes, puesto que son interactivos y dinámicos (Gordillo, Barra y Quemada, 2018). Pueden ser utilizados en diferentes contextos, ya que poseen elementos mul-

timedia como “imágenes, sonidos, videos, animaciones, que generan diferentes niveles de interactividad para el usuario, es un complemento, un elemento que adquiere mayor significatividad al formar parte de un entorno de aprendizaje más amplio, como un aula presencial o virtual” (Teliz, 2015, p. 5).

Para el diseño de los ODA, se eligió el software educativo eXeLearning, el cual es un software para el desarrollo de recursos educativos digitales de código abierto y uso gratuito. En esta herramienta el docente no necesita ser experto en programación, y pueden incluir una variedad de recursos interactivos como imágenes, videos, enlaces, juegos, evaluaciones, entre otros. El programa permite exportar los contenidos creados en diferentes formatos: HTML5, ePub3, IMS o SCORM.

Por otro lado, la llegada de la pandemia hizo visible la desigualdad en el acceso a la educación matemática en forma virtual, esta observación nos hizo repensar el cursado presencial, donde la desigualdad está en aquellos estudiantes que, por diferentes motivos, no pueden asistir de forma regular a clases, y esto repercute en la deserción o un mal rendimiento académico. Por lo cual, se pretende seguir el enfoque de la matemática educativa crítica que posibilita la construcción de una propuesta didáctica, que debe crear conexiones entre el contexto, el conocimiento matemático, didáctico, tecnológico y el aula (Cárdenas Sierra y Muñoz Restrepo, 2014). Autores como Borba *et al.* (2021), exponen que: “la tendencia de la educación matemática crítica, responde al principal problema de la desigualdad en la educación (matemática) y luchas contra la visión de que las matemáticas son una rama de la ciencia que está separada de cuestiones sociales, culturales y políticas”. (p.18).

El diseño de ODA pretende crear un espacio de interacción que posibilite la construcción de conocimiento matemático tanto en los estudiantes que cursan la asignatura como los que no pueden, y además favorecer la autorregulación del aprendizaje, que conlleva procesos cognitivos, motivacionales, conductuales y contextuales, de una forma dinámica con el fin de alcanzar el aprendizaje (Lion *et al.*, 2020).

Por otra parte, cuando el docente se involucra en la creación de estos recursos digitales, no solo mejora el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también impulsa el desarrollo de habilidades para utilizar estas herramientas tecnológicas, desde la búsqueda y la selección crítica de recursos digitales de autoría, hasta la creación, edición y la gestión de estos materiales. Por esta razón, y teniendo en

cuenta el marco de referencia, se pretende que el profesor desarrolle, según el área 2 de contenido digitales, “competencias relacionadas con la búsqueda, reutilización, creación y compartición de contenidos educativos digitales respetando los derechos de autor y teniendo en cuenta que su uso se desarrollará en un contexto educativo concreto atendiendo a las necesidades de todo el alumnado.” (INTEF, 2022, p.51).

Producción de Objetos Digitales de Aprendizaje

Al plantear una propuesta formativa que incorpore el diseño de un ODA, un enfoque estructurado y probado es la metodología ADDIE. Este modelo se compone de cinco fases: Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación. Es un proceso interactivo, en donde los resultados de la evaluación de cada fase pueden conducir al docente de regreso a cualquier fase anterior (Belloch, 2012). Para este trabajo, se abordarán las primeras cuatro fases, posponiendo la evaluación para realizar un mejor análisis de las respuestas de los estudiantes.

En primer lugar, la elección del tema se sustentó en la reflexión y la experiencia docente. Se optó por el contenido ecuaciones de la recta, que forma parte de la unidad 1 junto a los temas conjuntos numéricos y función. Esta elección no es azarosa, ya que se trata de una de las problemáticas que afrontan los estudiantes que ingresan a la universidad, y más precisamente en la carrera ingeniería agronómica, en donde muchos deciden abandonar en forma voluntaria el cursado de la asignatura, debido a un rendimiento académico inferior al esperado en el cuestionario de la primera unidad.

Una vez elegido el tema, se procedió a diseñar el ODA mediante la herramienta eXeLearning, tomando como base los materiales digitales que posee la cátedra, y que los estudiantes actualmente lo utilizan en forma digital o impreso, en las clases teóricas o práctica

Del software educativo se utilizaron los iDevices que son bloques para integrar diferentes recursos didácticos digitales, los cuales pueden ser: Textos y tareas, Actividades interactivas, Juegos y Otros contenidos. (ver *imagen 1*)



Imagen 1: Entorno del programa eXeLearning en su versión 2.9

Utilizando el iDevices Texto se escribió la introducción al tema y lo que se aprenderá en el desarrollo del objeto digital. Posteriormente, se desarrollaron de manera secuencial, los contenidos matemáticos del tema: pendiente y ordenada al origen de una recta no vertical, pendiente y ángulo de la recta, pendiente porcentual, ecuaciones de una recta y problemas de aplicación agronómica.

El botón “visualización previa”, permite al docente observar cómo se visualizará el ODA en una computadora o dispositivo móvil, esto se ilustra en la *imagen 2*, en donde la navegación es muy similar a las páginas que suelen frecuentar los estudiantes. De esta manera, se puede anticipar la experiencia de los alumnos y realizar los ajustes necesarios para una mejor navegación del recurso digital.

Luego se procedió a incorporar los recursos realizados con GeoGebra que se habían utilizado en el dictado virtual y habían tenido una experiencia positiva en los estudiantes, a través del iDevices Actividades interactivas.



Imagen 2: Visualización previa que da eXeLearning en formato HTML, en computadora y en dispositivo móvil

Las actividades que utilizan GeoGebra tienen la ventaja que facilitan la exploración dinámica de las situaciones planteadas, y tienen por propósito que el estudiante llegue a la conclusión que la pendiente es una medida de la inclinación de la recta respecto del eje coordenado horizontal y su cálculo no depende de los puntos elegidos sobre la recta (*imagen 3*). Para enriquecer esta actividad se propuso la incorporación de audios explicativos y textuales para guiar a los estudiantes en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

A medida que se avanzaba en el diseño del ODA, se incorporaron recursos digitales y algunas funciones del programa eXeLearning para facilitar una mejor comprensión del contenido, buscando mejorar la interacción y el aprendizaje de los estudiantes. Es importante destacar que la creación de un ODA no se limita solamente a la utilización del programa eXeLearning, sino que la metodología que el docente emplea es la base de su diseño, que a su vez debe asumirse como aprendiente del objeto digital antes de aplicarlo a los estudiantes, ya que permite adoptar un rol de autocrítica de las situaciones o estrategias que se plantean (Téliz, 2015).

Cabe resaltar que los materiales digitales que están incorporados en el objeto digital tienen una licencia creative Commons, en donde el propio programa educativo te da la opción de elegir bajo qué tipo de licencia se quiere adoptar.

En la *imagen 3*, en la visualización para dispositivos móviles, se pueden observar una tarea que es parte de los bloques de eXeLearning, en donde se plantea la

aplicación agronómica de la pendiente, como pendiente porcentual, que se utiliza con diversos fines en la carrera de ingeniería agronómica, tales como la evaluación de la erosión del suelo, diseño de sistemas de riego y drenaje, planificación de la maquinaria agrícola, entre otras. La actividad cuenta con ayuda para su resolución, por medio de un audio explicativo como también de un tooltip (descripción emergente) que es una herramienta de ayuda visual, que funciona al situar el cursor sobre el elemento gráfico.

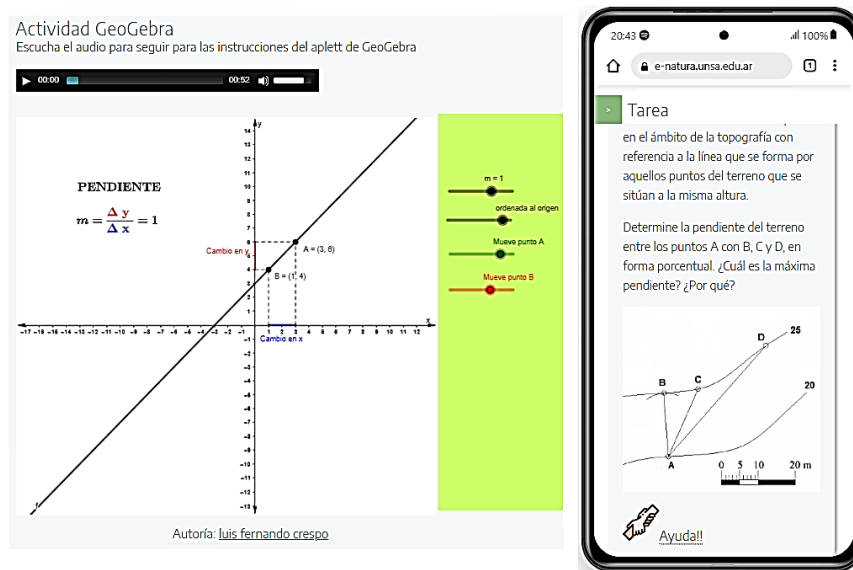


Imagen 3: Izquierda: Entorno de aprendizaje interactivo de una actividad con GeoGebra. Derecha: Problema de aplicación acerca de la pendiente porcentual

Todas las actividades o tareas planteadas mediante los iDevices, contiene un espacio de retroalimentación, entendiéndose que a través de éstas el estudiante puede reflexionar sobre su aprendizaje como así también conocer sus logros y debilidades a medida que resuelve la actividad, generando así un conocimiento más significativo.

Finalmente, resulta interesante la diversidad de formatos en que se pueden exportar, que va desde el paquete SCORM 1.2 para poder incorporarlos en algún sistema de gestión de aprendizaje, como la plataforma Moodle, como también a un formato HTML en carpeta autocontenida, en donde se puede compartir el objeto digital sin necesidad de internet o en todo caso permite exportar el proyecto como un sitio web listo para ser alojado en un servidor de Internet.

Conclusiones

La creación de un ODA con el software eXeLearning nos ha llevado a reflexionar sobre el impacto transformador que tiene este tipo de herramientas para cambiar la educación matemática en la carrera de Ingeniería Agronómica. En este contexto, se destacan las ventajas del uso de este tipo de recursos en la formación de ingenieros, ya que permiten a los estudiantes interactuar con los conceptos matemáticos de manera más dinámica y activa, permitiendo de esta manera adquirir de forma más efectiva las herramientas necesarias para una mejor comprensión de las asignaturas agronómicas. Esto se observó principalmente cuando los estudiantes manipularon los applets de GeoGebra para resolver las aplicaciones agronómicas, como el cálculo de la pendiente porcentual y el ángulo de inclinación de un terreno, utilizando como dato un perfil topográfico.

La puesta en práctica de este tipo de recursos digitales produjo una gran motivación en los estudiantes de ingeniería agronómica, y más en particular en aquellos que no pueden asistir a clases de forma regular. Esto se fundamenta en el notorio aumento de la participación en los foros del aula virtual en los estudiantes que interactúan con el ODA. Tener explicaciones breves del profesor en el desarrollo en el material didáctico digital, como así también algunos consejos para realizar las actividades propuestas, fue lo más resaltado en las primeras experiencias por parte de los estudiantes. Sin embargo, surgieron algunas complicaciones de parte de los estudiantes en torno a la visualización de GeoGebra en los dispositivos móviles, se pretende realizar los ajustes necesarios para una mejor experiencia de aprendizaje.

Por otra parte, a medida que se profundiza en la realización del objeto digital, van surgiendo nuevas estrategias didácticas, en donde la creatividad y la innovación se ven impulsadas por las posibilidades que ofrece el programa, facilitando la construcción conjunta de conocimiento entre humanos y medios.

La práctica en el diseño de este tipo de recursos digitales también ha fomentado el desarrollo de las competencias digitales, incentivando la capacidad de usar herramientas de autor para crear y editar nuevos contenidos que sean accesibles y compatibles con diversos formatos y estándares, respetando en todo momento la propiedad intelectual y los derechos de autor (INTEF, 2022). La incorporación de esta herramienta, como complemento a nuestras prácticas educativas, nos permite

reconsiderar que este tipo de materiales digitales más que un apoyo o complemento, deben ser parte nuestras prácticas de enseñanza.

Es necesario continuar investigando el potencial que tienen el uso de este tipo de herramientas en carreras no matemáticas, como así también establecer o seleccionar una estrategia metodológica para la creación de un ODA para la educación matemática de forma efectiva.

Por último, tenemos que seguir explorando el potencial de la tecnología digital como el caso del programa eXeLearning, y a la misma vez fortalecer en los docentes las CDD para promover un aprendizaje más significativo para nuestros estudiantes.

Bibliografía

- Belloch, Consuelo** (2012). Diseño Instruccional. UTE. Universidad de Valencia.
<http://www.uv.es/bellohc/pedagogia/EVA4.pdf>
- Borba, Marcelo, Chiari, Aparecida y Almeida, Helber** (2018). Interactions in virtual learning environments: new roles for digital technology. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 269-286. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9812-9>
- Borba, Marcelo y Villarreal, Mónica** (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. Springer.
- Borba, Marcelo, Villarreal, Mónica, y Soto, Gabriel** (2021). El futuro de la educación matemática a partir del COVID 19: Humanos-con-medios o humanos-con-cosas-no-vivientes. *Revista de Educación Matemática*, 36, 5-27. <https://doi.org/10.33044/revem.36050>
- Cárdenas Sierra, Yuriana, y Muñoz Restrepo, Diego** (2014). *Educación matemática crítica y análisis didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social en la institución educativa nuevo horizonte de la ciudad de Medellín* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Medellín.
- Engelbrecht, Johann, Llinares, Salvador, y Borba, Marcelo** (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM*, 52, 825-841. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>
- Gordillo, Aldo Barra Arias, Enrique, y Quemada Vives, Juan** (2018). Estimación de calidad de objetos de aprendizaje en repositorios de recursos educativos abiertos basada en las interacciones de los estudiantes. (spanish). *Educación XXI*, 285-301.

- Intef** (2022). Marco de referencia de la competencia digital docente enero 2022. España: Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado.
- Lion, Carina, Benítez Larghi, Sebastián, Dieser, Paula, Lippenholtz, Betina, Melo, Mónica, Sanz, Cecilia, y Zangara, Alejandra** (2020). *Aprendizaje y tecnología: Habilidades del presente, proyecciones de futuros*. Noveduc.
- Santa-Ramírez, Zaida, Jaramillo-López, Carlos, y Gualdrón-Pinto, Élgar** (2018). "Colectivo de Profesores-con-Doblado-de-Papel en Tareas de Geometría Escolar". *Boletim de Educação Matemática*, 32, 1092-1112. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a17>
- Teliz, Elvia** (2015). Objetos Digitales de Aprendizaje en Modalidad Blended Learning: Posibilidades en el desarrollo de competencias [Experiencia Docente]. Coloquio Nacional de Educación Media Superior a Distancia. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1938.3841>
- Villa-Ochoa, Jhony, y Ruiz Vahos, Mauricio** (2010). Pensamiento variacional: Seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, 12, 514-528.
- Villarreal, Mónica** (2013). Humanos-con-medios- un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En E. Miranda y N. Bryan (Comp.), *Formación de profesores, currículum, sujetos y prácticas educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil* (pp.85-122). Universidad Nacional de Córdoba. https://ffyh.unc.edu.ar/publicaciones/wp-content/uploads/sites/35/2022/05/EBOOK_FORMACIONPROFESORES.pdf

Modalidad híbrida y uso de redes sociales en la enseñanza del cálculo en carreras de Ciencias Económicas

LUCIANA RAQUEL CASTILLO

lcastillo@face.unt.edu.ar

AÍDA EVANGELINA FERNÁNDEZ

afernandez@face.unt.edu.ar

ELISA DE ROSA

ederosa@face.unt.edu.ar

ELSA RODRÍGUEZ AREAL

eareal@face.unt.edu.ar

Universidad Nacional de Tucumán - UNT

Resumen

Las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación ejercen un rol crucial en el diálogo pedagógico actual. En particular, en la enseñanza del Cálculo para estudiantes universitarios, hacen posible mejorar la interacción docente-alumno-conocimiento mediante la implementación de modelos híbridos de enseñanza. El objetivo de este trabajo es describir la experiencia del dictado 2023 de la asignatura Matemática II en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán. Este curso se caracterizó por la combinación de clases presenciales y virtuales sincrónicas, en conjunto con el uso del Aula Virtual y la red social *Instagram*. Los resultados, en términos de rendimiento académico y en la opinión de los alumnos, promueven la continuidad de la implementación del modelo híbrido para la materia.

Palabras clave: hibridación / *engagement* educativo / redes sociales

Introducción

Las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (nTIC's) juegan un papel primordial en todos los aspectos de la vida cotidiana. La educación no es la excepción, ya que la tecnología modifica la interacción que se establece en la triada pedagógica docente-alumno-conocimiento. Las nTIC's no solo permiten incorporar actividades dinámicas y con recursos audiovisuales al aula tradicional, sino que también brindan nuevos espacios para el diálogo extra-áulico y posibilitan nuevas formas de relacionarse con los contenidos, incluso con los conceptos matemáticos.

El equipo docente de la cátedra Matemática II de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán (FACE-UNT) lleva más de dos décadas recorriendo el camino del empleo de Aulas Virtuales como complemento a los encuentros presenciales. Se trata de un proceso en continua mejora en el cual, a través de los años, se diseñaron e implementaron diferentes herramientas y estrategias: foros, wikis, juegos H5P, enlaces a Geogebra, archivos con ejercicios resueltos, videos teóricos y prácticos, entre otras. Cada paso del trayecto fue documentado y evaluado: además de las encuestas de evaluación del desempeño docente que realiza la institución, la cátedra incorporó en cada dictado de la materia desde 2016, una encuesta propia, más extensa que la de la FACE y orientada específicamente a las particularidades de cada cuatrimestre. El análisis de estas encuestas, en paralelo a los cuadros que sintetizan el rendimiento académico de los alumnos en la cursada y exámenes finales, son discutidos en reuniones de cátedra y se tienen en cuenta para las siguientes ediciones, dando lugar también a diferentes trabajos de investigación.

Dos de las innovaciones pedagógicas más recientes se relacionan con la utilización de una cuenta oficial de la cátedra en la red social *Instagram* y con la implementación de la modalidad híbrida para el desarrollo de las clases. Estas fueron dos características clave en la planificación y ejecución del cursado del segundo cuatrimestre del año 2023, para los estudiantes del primer año de las tres carreras que se dictan en la FACE-UNT.

El faro guía es lograr que los estudiantes alcancen un aprendizaje significativo de los conceptos elementales del Cálculo. Para ello, y tal como sostienen Gavín-Chocano, García-Martínez, Pérez-Navío y Luque de la Rosa (2024), el poder esta-

blecer y promover estrategias de aprendizaje eficaces resulta fundamental para la mejora del rendimiento académico y del desarrollo personal en el contexto universitario. Esta etapa se sustenta en la confluencia de factores estratégicos conductuales, cognitivos y emocionales, que permiten al alumnado ajustarse satisfactoriamente a las demandas del contexto académico. Conseguir en los alumnos, motivación y compromiso en la tarea, incide directamente en su rendimiento académico.

En este sentido, el diseño y la implementación de la experiencia que se expone en este trabajo, fueron guiados por la búsqueda de un genuino *engagement* educativo en el intento de que los alumnos se involucren y se comprometan con la tarea de aprender.

Marco teórico

Según Briceño Toledo (2020) la educación ha evolucionado cambiando las posibilidades, las estrategias y los medios de interacción como resultado de los avances tecnológicos. En años recientes, desde la pandemia de SARS-COV19, la educación virtual, como modalidad de aprendizaje, creció vertiginosamente en la práctica e instaló competencia en toda la comunidad académica. Tal fue su impacto que, tras el retorno a la presencialidad educativa, las prácticas docentes se inclinaron hacia modelos que combinan instancias de trabajo presencial y virtual, mediadas por tecnología. En este modelo, se aprovechan las fortalezas de ambas modalidades para enseñar y aprender.

El modelo híbrido se convirtió en una forma muy aceptada y empleada para desarrollar las tareas de enseñanza y aprendizaje en el nivel superior, pues permite a estudiantes y docentes adquirir competencias y utilizar recursos educativos digitales en una clara tendencia hacia la educación abierta, aspecto necesario para la democratización de la enseñanza-aprendizaje (Krasnovay y Shurygin, 2020. Citados por Villagra y Cabrera, 2023).

En documentos redactados por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) se describen tres escenarios básicos de hibridación:

- Estrategia de Alternancia (secuencial): Las clases se realizan alternando, dentro de una secuencia regulada normativamente, entre períodos en el espacio-aula

en sede y períodos en el espacio-aula de videocomunicación, bajo protocolos y disposiciones específicas que aseguran las interacciones sincrónicas de los participantes de una forma análoga al modo en que se producen presencialmente. En cada período, solo existe una única presencialidad posible para todos los actores sociales.

- Estrategia Híbrida (optativa): Las clases se realizan en el espacio-aula, en la sede, pudiendo uno o más de los actores sociales participar en modo remoto a través de un espacio-aula de videocomunicación, bajo protocolos y disposiciones específicas que aseguran las interacciones sincrónicas entre todos los participantes, de una forma análoga a como se producen presencialmente e independientemente de su localización. En cualquier instancia, los actores sociales pueden optar por una presencialidad u otra.

- Estrategia Mixta (parcialmente optativa): Las clases se realizan de manera alternada y regulada normativamente entre períodos obligatorios en el espacio-aula en sede y períodos durante los cuales los participantes pueden optar entre el espacio-aula en sede o el modo remoto a través de un espacio-aula de videocomunicación, bajo protocolos y disposiciones específicas que aseguran las interacciones sincrónicas entre todos los participantes, independientemente de su localización y de una forma análoga a la forma en que se producen presencialmente. Solo en las instancias del período que ofrece optativamente un espacio-aula de videocomunicación, los actores sociales pueden optar por una presencialidad u otra.

Cualquiera sea el modelo de hibridación que se ejecute, resulta de gran importancia el compromiso que los estudiantes logren tener con el objeto de aprendizaje. Estos modelos requieren potenciar la relación existente entre los tres elementos de la tríada didáctica: el alumno, el docente y el contenido como un conjunto completo en la educación. Es así como la búsqueda de esta interacción constante solo tendrá éxito si el estudiante se involucra, es decir, si se propicia el *engagement* educativo.

Fernández Da Lama (2019), afirma que el término *engagement* estudiantil, o compromiso en su traducción al español, es un constructo complejo y multidimensional que ha sido referido a la interrelación de factores internos -variables propias del estudiante- y externos -aspectos referidos a los docentes y a la institución educativa-. La literatura científica y académica se ha pronunciado, en mayor medida, hacia el mantenimiento de un modelo trifactorial del *engagement*: conductual, cognitivo y emocional. La relación es tan simple como evidente: mientras más prac-

tique un estudiante y obtenga, a su vez, un mayor *feedback* de sus trabajos académicos, mayor será la información que logre asimilar con respecto a lo que aprenda.

Para conseguir ese *engagement*, esa motivación en el alumnado, las redes sociales resultan ser muy buenas aliadas ya que son ampliamente utilizadas en la sociedad del conocimiento, sobre todo por los más jóvenes. Este hecho ha provocado un crecimiento exponencial en su empleo en los entornos de formación. Los centros educativos han incorporado las redes sociales, no solo para tareas administrativas y de información sino también, en el caso de los docentes, como herramientas e instrumentos para transmitir información y crear entornos de trabajo colaborativos.

Así es como lo referido a los medios y las formas elegidos para la comunicación entre docentes y alumnos, han resignificado su importancia dentro del diseño de la oferta académica de Matemática II. En este punto confluyen tanto el impacto que tiene la tecnología como las características generacionales de los alumnos (nativos digitales miembros de la *Generación Z*) y los nuevos roles que la sociedad otorga a los actores del proceso educativo. Respecto a este último punto, Posso Pacheco (2022) menciona que el nuevo rol docente se ejerce “dejando el sentido de dar conocimiento por el de guiar a la obtención de conocimiento” y Martínez González (2010) comenta que el rol de estudiante universitario requiere habilidades que “hagan posible el aprendizaje autónomo, participar activamente y con iniciativa, ser innovadores, cooperar y relacionarse”. Amayuela Mora (2017) dice al respecto de la comunicación en la tarea docente: “Se precisa que los docentes interioricen que, solo a partir de un proceso de comunicación asertivo y afectivo, será posible incidir en las dimensiones (instructiva, educativa y desarrolladora) del proceso formativo en el ámbito universitario, a tono con las actuales exigencias del mundo contemporáneo.”

Diseño e implementación de las clases híbridas

Al planificar el dictado de la asignatura para el segundo cuatrimestre 2023 se tuvieron en cuenta los resultados y análisis de los cursados anteriores en cuanto al tipo de recursos didácticos con mayor impacto positivo percibido por los alumnos y las dificultades observadas por los profesores.

Una realidad, que el equipo docente apuntó como debilidad en cursados anteriores, fue la escasa asistencia de alumnos a las clases teóricas. Las mismas se dictaban en forma presencial, dos días a la semana, en un horario por la mañana y otro por la tarde. Por reglamento académico de la institución, al ser una materia de primer año, la asistencia a estas clases no es obligatoria para promocionar ni regularizar la asignatura. En términos generales, la asistencia rondaba el 38% de los alumnos inscriptos al comenzar el cursado.

En virtud de esta situación y, en continuidad con la línea de trabajo de virtualización de la enseñanza, para el cursado del segundo cuatrimestre 2023 se decidió que la clase teórica del turno mañana se desarrollaría bajo una modalidad híbrida optativa, conforme a las características del segundo escenario descrito en el marco teórico. Entre los aspectos considerados en la diagramación de las clases se tuvieron en cuenta, entre otros:

- disponibilidad de equipamiento y espacio físico: la FACE-UNT contaba para el segundo cuatrimestre del año 2023 con dos aulas equipadas con la tecnología necesaria para dictar clases de forma presencial y virtual simultáneamente (PC, proyector, micrófono, parlantes, cámara).

- capacidad docente: las clases estarían a cargo de dos docentes para cubrir dos roles complementarios. Una de las docentes estaría a cargo de la exposición oral y el uso de la pizarra, mientras la segunda se ocuparía de monitorear el chat de la videoconferencia y el correcto enfoque de la cámara y la presentación compartida. El primer rol fue ocupado por la profesora asociada a cargo de la cátedra quien, al inicio de este cursado, contaba con 15 años de experiencia en dictar clases teóricas. El segundo rol fue ejercido por una docente Jefe de Trabajos Prácticos, con amplio dominio de las herramientas digitales necesarias para la clase.

- material de soporte visual: se adaptaron las diapositivas utilizadas en años anteriores para hacer un uso eficiente de la pizarra, en conjunto con la presentación. Se prestó también atención al tamaño óptimo en la escritura y el uso de marcadores con tinta suficiente para procurar la visibilidad de la escritura en la imagen de video.

- plataforma de videocomunicación: se utilizó *Zoom*, ya que es la plataforma en la cual la FACE-UNT dispone de cuentas que permiten la grabación de la clase-reunión y el registro de la asistencia de los participantes.

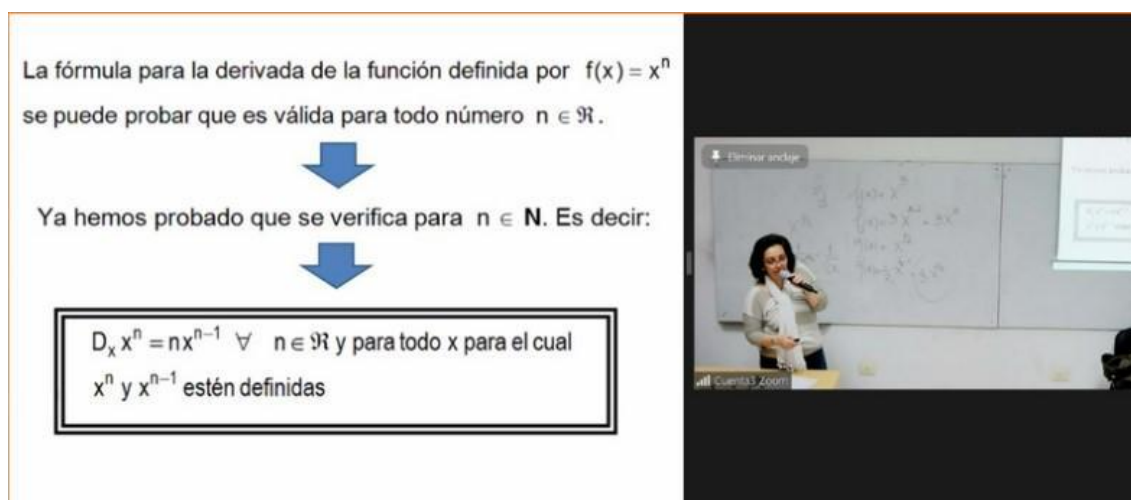


Imagen 1: Captura de pantalla de clase teórica híbrida. Fuente: Elaboración propia

La experiencia previa y las pruebas realizadas permitieron que las docentes tengan una suerte de protocolo a seguir, tanto en momentos previos a la clase, como durante la misma y tras finalizarla. Este *know how* permitió prevenir los problemas frecuentes y también solucionar muchos de los imprevistos que se presentaron durante las clases.

Empleo de Instagram

La cuenta oficial de la cátedra en esta red social se creó para promover la participación de los alumnos del cursado especial del primer cuatrimestre de 2020, en actividades semanales ya que, desde su planificación, dicho cursado estuvo pautado para realizarse con modalidad virtual (con exámenes presenciales). En esta primera etapa de implementación, el contenido de la cuenta consistió en publicaciones semanales (imágenes virales o memes) adaptados para vincularse a los temas que se estuvieran dictando en clases.

Debido a la continuidad de las clases virtuales, la cuenta de *Instagram* continuó funcionando en el cursado del segundo cuatrimestre 2020, dando inicio a una etapa de afianzamiento de este canal. La mayor parte de las interacciones, en dicho cursado, fueron a requerimiento de las novedades que debían comunicarse a los alumnos y las oportunidades de generación de contenido. El único segmento que tuvo frecuencia semanal fue el de “Ejercicios a la carta”: cada fin de semana se ofreció a los estudiantes un “menú” de ejercicios de exámenes parciales anteriores para

que votaran por uno; la consigna más votada fue resuelta y subida como video a la red social. Los ejercicios restantes se utilizaron como disparadores en las clases de consulta.

Esta dinámica de ejercicios semanales fue retomada en el segundo cuatrimestre 2022, presentada como si se tratase de una serie de un canal de *streaming* ficticio: “Matematflix” en la cual los alumnos podían elegir un capítulo, en cada temporada, para ser transmitido por la red social. En el segundo cuatrimestre de 2023 la propuesta fue presentada mediante una analogía con partidos amistosos de un equipo que compite un torneo de fútbol y puede elegir un rival semanal. La misma se encuadró dentro de una temática que integró a todo el cursado, la cual será presentada en párrafos siguientes.

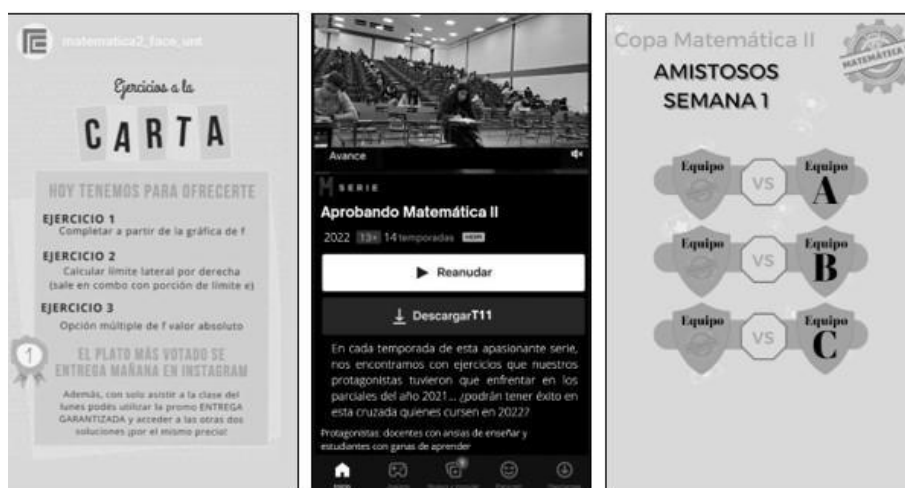


Imagen 2: Presentación de ejercicios semanales durante diferentes cursados. Fuente: Instagram (@matemática2_face_unt)

La cuenta de *Instagram* también ha servido a la cátedra como espacio para implementar pequeñas dinámicas de gamificación, siempre con sentido académico.

Otra línea de trabajo que se hizo posible gracias al uso de esta red social fueron las “Consultas en vivo”. Las mismas consisten en transmisiones realizadas por dicha red social, en horarios/días diferentes a las consultas presenciales y virtuales. Esta forma alternativa de realizar consultas se llevó a cabo, por primera vez, en el segundo cuatrimestre 2021. Los buenos resultados obtenidos en cuanto a la factibilidad de su implementación y el nivel de adhesión de los alumnos motivaron a repetir estas consultas antes de algunas mesas de exámenes finales regulares y libres, además de incorporarlas a la planificación del segundo cuatrimestre para los años 2022

y 2023. La práctica se fue consolidando y mejorando en pos de aumentar la significatividad del intercambio con los estudiantes. Por ejemplo, consultando previamente los ejercicios en los que tenían dudas y monitoreando las respuestas que los alumnos se daban entre ellos, en el chat de la transmisión en vivo. El soporte tecnológico acompañó la evolución de estas consultas, pasando de soportes artesanales y domésticos a accesorios comerciales específicos con los que se pudo mejorar la estabilidad y la iluminación de la imagen *transmitida*. En cada ocasión el video quedó disponible para la revisión posterior de los alumnos, sumando con ello otra ventaja adicional frente a las consultas tradicionales.

La planificación del cursado 2023, en lo referido al uso de *Instagram*, contempló la elección de un hilo temático conductor para todas (o casi todas) las publicaciones. Tras una lluvia de ideas entre las docentes responsables del diseño de la estrategia, se definió asimilar el cursado de la materia a un torneo de fútbol. Se trató de una temática de actualidad (por el resultado del mundial de Qatar 2022). Además, la práctica deportiva implica un genuino proceso de aprendizaje que fácilmente puede ser extrapolado al estudio de una disciplina como la Matemática. Algunas de las acciones implementadas durante el torneo “Copa Matemática II” fueron las siguientes:

- Lanzamiento del torneo: video que interpelaba al alumno a ir en busca de “la cuarta estrella” (los cuatro puntos en la calificación, que le permiten regularizar la materia) o a “ir por todo”, buscando obtener un diez (en alusión a Messi).
- Reglas del juego: en referencia al Régimen de aprobación de la materia, contemplando qué jugadores son convocados a los partidos (alumnos que regularizaron la materia pre-correlativa); cuándo se disputarán los partidos (fecha tentativa de exámenes parciales); cómo se gana cada enfrentamiento (notas mínimas a obtener para promocionar y regularizar) y qué instancias de revancha existen (recuperaciones).
- Comentarios de jugadores retirados: se habilitó un espacio para que los alumnos que ya cursaron la materia dejen recomendaciones o consejos.
- Pre calentamiento: publicaciones, anteriores al comienzo de cursado, sobre conceptos de materias anteriores que deben ser afianzados. Luego del entrenamiento digital, se realizó un taller presencial en el que un docente de la cátedra coordinó la realización de ejercicios prácticos de aplicación de los conceptos.
- Roja directa: ejemplos de errores habituales que infringen las reglas de la

Matemática, con tal gravedad, que ameritan “la expulsión del partido”.

- Partidos amistosos: consistió en la presentación semanal de tres ejercicios de parciales de años anteriores como si se tratasen de rivales de diferentes zonas del programa. Los alumnos pudieron elegir “qué partido sería transmitido”, ya que el ejercicio (o rival) más votado, fue resuelto en un video que se subió a la red social.
- La previa del partido: este fue el nombre dado al segmento de Consultas en vivo por *Instagram*, desarrolladas antes de cada parcial.
- Pido VAR: la instancia de muestra de parciales se vinculó al mecanismo por el cual el árbitro de un partido revisa una jugada.

Entre las publicaciones realizadas que no siguieron la temática de la Copa Matemática II se destacan las referidas a efemérides, tales como el Día del Estudiante o del Docente Universitario, las dinámicas lúdicas de sorteos y el contenido humorístico.

Otro segmento que se incorporó en 2023, al abanico de contenidos de la cuenta fue “Charlas con GPT”, una serie de historias en las que se presentan errores y furiosos que la Inteligencia Artificial comete al ser indagada sobre ciertos conceptos matemáticos.

Resultados

Desde el punto de vista docente, la implementación de las clases teóricas híbridas fue beneficiosa porque permitió que un mayor número de alumnos asista a las mismas: se llegó a contar con 80 alumnos presenciales y 120 por videollamada. Además, la modalidad permitió dar continuidad a estas clases, ante situaciones como paros de transporte de pasajeros que, de otra forma hubiesen causado la pérdida de la misma.

En cuanto a los resultados académicos, la cátedra logró mantener la proporción de alumnos que regularizan la materia y que la que la promociona.

El primer relevamiento de opinión de los alumnos, respecto a la implementación de las clases híbridas, se realizó a fines de septiembre de 2023. De los 162 alumnos que respondieron la encuesta, 104 manifestaron asistir regularmente a las clases teóricas del turno mañana: el 43% en forma virtual, 30% en forma presencial y 27% combinando las opciones de presencialidad. A todos se les pidió calificar la

implementación de estas clases en una escala del 1 al 10, resultando en una media aritmética general de 9 puntos (sin diferencias significativas entre los tres grupos con diferentes formas de presencialidad: 9,02; 9,10 y 8,89 respectivamente).

Entre quienes cursan de forma virtual exclusivamente, el motivo más frecuente en la elección, es el ahorro en traslados (51%); para quienes optaron por la presencialidad, la respuesta más frecuente fue por comodidad (58%).

Solo el 20% de los alumnos había participado anteriormente en clases con modalidad híbrida, mientras que cerca del 40% cursa o cursó otra clase virtual. Como diferencias entre las clases híbridas de Matemática II y otros cursos virtuales destacan la interacción del docente y el uso de pizarra para resolución de ejemplos y casos.

El aspecto en el que las respuestas resultaron más dispersas fue en lo referido a si realizaron consultas durante las clases: entre quienes cursaron virtual, solo el 25% hizo consultas, *versus* el 71% de los asistentes presenciales. El 64% de quienes combinaron presencialidades expresa haber consultado, pero el 67% de ellos lo hizo solo presencial.

La satisfacción general de los alumnos con el cursado, según lo expresado en las encuestas de opinión de final del dictado, fue muy buena: en una escala del 1 al 10, la media aritmética resulta en 9,6 ($n=251$). El 56% de los alumnos que respondieron manifestó asistir regularmente a clases teóricas. Los asistentes al turno mañana (clases híbridas) calificaron su satisfacción con las clases teóricas con una media aritmética de 9,85 puntos, apenas por debajo del puntaje promedio dado a las clases del turno tarde.

En lo referido al uso de *Instagram*, el 93% de los alumnos que respondieron la encuesta manifiesta seguir la cuenta de la cátedra. La valoración promedio de las historias y publicaciones realizadas fue de 9,9.

El 64% de los estudiantes que siguen la cuenta expresaron que la misma debe continuar utilizándose como se emplea en la actualidad; 17% pidió mayor diversidad de contenidos y 19% quisiera mayor periodicidad en las publicaciones e historias. Solo un alumno manifestó que *Instagram* no debería utilizarse.

Por último, respecto al alcance de las publicaciones en *Instagram*, se destaca que los 14 videos de “partidos amistosos” publicados tuvieron en promedio media aritmética de 1847 reproducciones y 63 “Me gusta”. El video más visto llegó a 2933

reproducciones. A cada edición de las consultas en vivo se conectaron alrededor de 100 alumnos y el promedio de visualizaciones de sus grabaciones fue 727.

Cabe destacar que los estudiantes tienen, en la cuenta oficial de la cátedra, un refugio para evitar la infoxicación: la información que allí se publica es veraz y oportuna. Esto les ayuda mientras adquieren habilidades de filtrado de información y pensamiento crítico.

Conclusiones y reflexiones didácticas

La incorporación de nTIC's a las prácticas docentes y el uso de redes sociales en educación son ya una realidad, como también lo son la educación a distancia, la educación híbrida y el nuevo rol a asumir por los docentes. Se vuelve relevante la forma en que las herramientas se utilicen y cómo se motive al estudiante para generar un genuino compromiso con los saberes académicos. Se trata de que la implementación de formas alternativas de comunicación trascienda el mero fin de dar respuesta rápida y accesible a los alumnos, y se convierta en una estrategia de motivación y *engagement* educativo que visibilice el valor de la conciencia socioemocional en la formación de aprendizajes significativos y de calidad.

Con la experiencia recabada a través de los años, el abanico de recursos ofrecido por la cátedra de Matemática II (incluyendo las clases, el material de estudio y las actividades virtuales) fue bien recibido por los alumnos, quienes se expresaron favorablemente en las encuestas de opinión. El uso de *Instagram* se percibe consolidado y útil. La práctica de presentar ejercicios de parciales de años anteriores (partidos amistosos 2023) y dar consultas a través de la red social genera buen caudal de interacción con los alumnos, les brinda la oportunidad de participar en la generación del contenido que se comparte en la cuenta y funciona como ejercitación adicional.

La inclusión de clases híbridas permitió que un mayor número de alumnos participe en las clases teóricas y dio continuidad al dictado de las mismas, ante imprevistos ajenos a la cátedra. Las posibilidades de mejora rondan en torno a fomentar la participación activa de los alumnos, especialmente las consultas de los asistentes virtuales.

Iniciativas e innovaciones de este estilo propician acciones para que la Universidad diseñe políticas activas en pos de encarar uno de los problemas que la aquejan, como es el caso de la masividad en sus aulas, al mismo tiempo que facilita el acceso a la educación superior a jóvenes que, por razones de distancia, costos o cuestiones laborales, no pueden concurrir a clases de manera presencial.

El trabajo realizado por la cátedra Matemática II, en los últimos años, representa una genuina reconfiguración en las prácticas de enseñanza. El intercambio permanente de ideas, la exploración constante, las experiencias lúdicas, la capacitación y los procesos creativos del equipo docente, permiten encarar con optimismo los desafíos futuros en la Educación Matemática para las carreras de Ciencias Económicas.

Bibliografía

- Castillo, Luciana Raquel, Rodríguez Areal, Elsa, De Rosa, Elisa** (2023). *Las redes sociales como escenario de interacción académica entre docentes y alumnos*. 37° Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Cs. Económicas y afines. Observatorio de Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNPSJB.
- Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria** (2021). Consideraciones sobre las estrategias de hibridación en el marco de la evaluación y acreditación universitaria frente al inicio del ciclo lectivo 2022. <https://www.coneau.gob.ar/coneau/wp-content/uploads/2021/12/IF-2021-123533751-APN-CONEAUME.pdf>
- Fernández Da Lama, Rocío Giselle** (2019). Engagement estudiantil: Aportes del modelo de engagement agéntico. XXVI Jornadas de Investigación. Universidad de Buenos Aires. <https://www.aacademica.org/000-111/789.pdf>
- Gavín-Chocano, Óscar, García-Martínez, Inmaculada, Pérez-Navío, Eufrazio y Luque de la Rosa, Antonio** (2024). Learner engagement, motivación académica y estrategias de aprendizaje de estudiantes universitarios. *Educación XX1*, 27(1), 57-79. <https://revistas.uned.es/index.php/educacionXX1/article/view/36951/28645>
- Martínez González, José Alberto** (2010). El Espacio Europeo De Educación Superior y Nuevo Rol Del Estudiante Universitario. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*. Servicios Académicos Intercontinentales SL.
- Posso Pacheco, Richard Jacobo** (2022). El rol del docente en el contexto universitario: una visión post pandemia. *MENTOR Revista de investigación Educativa y Deportiva*, 1(2).

Villagra, Mirtha, y Cabrera, Patricia (2023). La modalidad híbrida: una alternativa como un nuevo modelo de aprendizaje. *Revista Paraguaya de Educación a Distancia (REPED)*, 4(1), 11–22. <https://revistascientificas.una.py/index.php/REPED/article/view/3278>

Eje 6. Educación estadística

Reportes de investigación

Alfabetización Estadística e Ideas Estocásticas Fundamentales implícitas en un dispositivo didáctico sobre compromiso climático

MARIA VICTORIA BONZI

mavictoria104@gmail.com

LILIANA MABEL TAUBER

estadisticamatematicafhuc@gmail.com

YANINA REDONDO

yaniredondo@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias – Universidad Nacional del Litoral (FHUC-UNL)

Resumen

Con el objetivo de aportar nuevas herramientas didácticas que propicien las relaciones entre conceptos, ideas fundamentales y alfabetización estadística, en este trabajo se describen los lineamientos considerados para el diseño de un dispositivo didáctico, basado en un Objetivo de Desarrollo Sostenible y organizado desde el enfoque STEAM. Asimismo, se aporta evidencia sobre la validez del dispositivo, a través de un análisis de contenido que permite mostrar cuáles son las ideas estocásticas fundamentales y los elementos de alfabetización estadística que podrían surgir en la implementación de las tareas implícitas en el dispositivo.

Palabras clave: educación estocástica / alfabetización estadística / ideas estocásticas fundamentales / ciudadanía crítica / objetivos de desarrollo sostenible

Introducción

La sociedad actual se encuentra atravesada por una masiva carga de información, ya sea en los medios de comunicación, en las redes sociales, en los sitios web, como también en las propuestas para las elecciones y proyectos sociales. Frente a esto, es necesario que las/os ciudadanas/os tengan herramientas para conocer, comprender y valorar críticamente la información en pos de actuar en consecuencia. Según Gal (2019), estas acciones están ligadas a la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico.

En esta línea, en los diseños curriculares para la educación secundaria de la Provincia de Santa Fe, se fomenta la inclusión de contenidos estocásticos en el área de Matemática (Diseño Curricular de la Provincia de Santa Fe, 2014). No obstante, como se indica en Tauber (2022), los contenidos estocásticos no siempre se implementan, debido a que los docentes evitan su abordaje por limitaciones de tiempo o por falta de formación adecuada o por no reconocer su importancia para la formación de ciudadanos críticos.

Batanero (2019) argumenta que es necesario que la Educación estocástica propicie el pensamiento crítico orientado al desarrollo de las ideas estocásticas fundamentales (IEF), las cuales permiten relacionar conceptos estadísticos y tienen el potencial de impulsar cambios significativos en la búsqueda de soluciones a problemas actuales.

En este marco, se presenta el diseño y análisis de un dispositivo didáctico centrado en uno de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), propuestos por la Organización de Naciones Unidas (ONU) (<https://acortar.link/137s>). El análisis se centra en la identificación de las componentes de la Educación estadística, las IEF y las etapas del enfoque STEAM.

Antecedentes

La investigación en torno a experiencias o propuestas didácticas de Estadística ha ganado relevancia, como se evidencia en Cabrera *et al.* (2022); Campos (2016); Henriques y Oliveira (2019); Vásquez Ortiz (2021), entre otros, donde se describen el diseño y validación de variadas propuestas didácticas de Estadística. Particular-

mente, en Argentina, se destacan las contribuciones de Cabrera *et al.* (2020), Cabrera *et al.* (2022), quienes presentan propuestas didácticas implementadas con estudiantes universitarios y en formación, de distintas carreras universitarias y de profesorado de Matemática. En ellos se realizan distintos análisis de contenido sobre las propuestas y sobre las producciones de los estudiantes, identificando las relaciones entre las facetas de la Estadística Cívica (Engel, 2019) y los elementos de Alfabetización Estadística (AE) que se evidencian. Una de las conclusiones indica que, aún los estudiantes sin formación previa en Estadística, establecen conexiones adecuadas entre elementos de AE y competencias del Pensamiento Estadístico (PE), necesarias para los futuros profesionales.

En Bolatti y Tauber (2021a, 2021b), se presenta el análisis de una tarea sobre indicadores sociales que puede implementarse con estudiantes de 15 años en adelante, centrado en los elementos de AE (Gal, 2019) y en la Estadística Cívica (Engel, 2019). Se evidencia que las tareas permiten conectar el conocimiento estadístico y el conocimiento contextual profundo de las problemáticas sociales. A su vez, indican que tratar con datos reales posibilita una enseñanza de la Estadística que propicia el pensamiento crítico.

En los antecedentes se evidencia la importancia de promover en el aula competencias asociadas con AE, PE y Razonamiento Estadístico (RE), mediante actividades que involucren el uso de recursos, fomenten la sostenibilidad y el aprendizaje activo.

Marco de referencia

Los fundamentos de la Educación Estadística se basan principalmente en el desarrollo de tres componentes que integran elementos de naturaleza cognitiva y actitudinal, ellas son: la AE, el RE y el PE. Estas componentes resultan esenciales en el diseño de propuestas didácticas orientadas a la formación de ciudadanos estadísticamente críticos. De acuerdo con Engel (2019), el entendimiento de la gobernabilidad, del Estado y de la sociedad es un requisito esencial para el correcto funcionamiento de la democracia. Esto implica que los ciudadanos necesitan ser cultos estadísticamente de modo de comprender los datos y de interpretar y evaluar críticamente la información estadística.

En este sentido, Tauber (2022), destaca la importancia de formar ciudadanos y profesionales estadísticamente cultos, indicando que es una de las misiones urgentes a las que se debería prestar atención en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Además, sugiere que es necesario brindar propuestas didácticas al profesorado que estén analizadas y validadas, de manera de incorporar el aprendizaje crítico de las ideas estadísticas fundamentales y de abordar la toma de decisiones relacionadas con problemas actuales que afectan a la sociedad.

Alfabetización Estadística e Ideas Estocásticas Fundamentales

En base a los aportes de Campos (2016), la alfabetización refiere a la competencia de analizar, argumentar y comunicar interpretaciones de datos presentados en diversos contextos. A su vez, Gal (2019) considera que la AE está compuesta por dos dimensiones que abarcan distintos elementos: los cognitivos (alfabetización documental, conocimiento estadístico y matemático, conocimiento del contexto y habilidades críticas) y los disposicionales (creencias y actitudes, postura crítica). Por lo tanto, la AE demanda habilidades asociadas con la interpretación de datos, resúmenes e información, así como la capacidad de expresar opiniones fundamentadas en conceptos estadísticos.

En relación al PE, Campos (2016) sostiene que esta competencia se encuentra ligada a la idea de evaluar de manera global un problema estadístico y requiere de la habilidad de exploración de datos, del cuestionamiento de los orígenes de esos datos y de la comprensión de la relevancia de los análisis estadísticos. A su vez, Behar y Grima (2004), consideran que el proceso de PE es evolutivo y en él intervienen las IEF (que involucran una red integrada de conceptos estadísticos), distintos tipos de razonamientos estocásticos y los distintos tipos de alfabetización (estadística, documental, científica, tecnológica), así como también el proceso de transnumeración, que implica la comprensión de múltiples representaciones o registros de los datos para comprender los fenómenos en estudio (Chick *et al.*, 2005).

Por otra parte, Campos (2016) considera que el RE le otorga al estudiante la habilidad de comprender, interpretar y explicar un proceso estadístico por completo. Además, Ben-Zvi (2016) añade que esta competencia está ligada a las diversas formas de razonar cuando las personas crean y le dan sentido a la información estadística, lo cual implica una comprensión conceptual de las IEF y los conceptos

asociados a ellas. Goetz (2009) argumenta que es posible enseñar los principios básicos de un tema, independientemente de la edad y del origen social de los destinatarios. En la Educación estocástica, estos principios conforman las IEF. Si bien no hay consenso respecto de cuáles son las IEF más relevantes, los antecedentes coinciden en: la aleatoriedad, los datos y modelos, los resúmenes estadísticos, la variación, la distribución, la probabilidad, muestreo e inferencia (Castro y Moreno, 2021; Cabrera *et al.*, 2020).

Educación STEAM y Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

Una propuesta didáctica que tenga un buen potencial cognitivo y actitudinal requiere de situaciones contextualizadas, basadas en datos reales, que busquen responder preguntas o que impliquen la toma de decisiones basadas en evidencia confiable (Behar y Grima, 2004, Gal, 2019). En este sentido, siguiendo a Fitzallen *et al.* (2018), es necesario el uso de situaciones de aprendizaje que fomenten la integración de las ciencias y la Estadística con la tecnología. Por ello, se considera que el enfoque STEAM (Ciencia, Tecnología, Educación, Arte y Matemática, por sus siglas en inglés), puede ser significativo para promover la AE y el PE, ya que da relevancia a las actividades propuestas y estimula el RE debido a su potencial para transformar las actitudes de los estudiantes hacia la Estadística (Campos, 2016). Este enfoque, además, estimula el reconocimiento de los datos como un medio para darle sentido al mundo real.

La enseñanza a través del enfoque STEAM, promueve la conexión entre los contenidos a abordar y las experiencias de vida de las y los estudiantes, por lo que requiere una articulación en torno a un tópico central, vinculado con el mundo real y relevante para el estudiantado (Zamorano *et al.*, 2018). Así, se sugiere que una propuesta STEAM debe cubrir tres etapas: Contextualización, Diseño creativo y Toque emocional.

Así, el estudiante asume un rol activo, crítico, reflexivo y protagónico en su propio proceso de aprendizaje, mientras que el docente actúa como guía en el desarrollo de la propuesta, mediando los debates y promoviendo la retroalimentación entre pares.

Metodología

Dado que este trabajo se desarrolla en el marco de una beca de iniciación a la investigación, se consideró fundamental llevar a cabo un análisis documental (Moreiro González, 2004) que permitiera identificar los postulados propuestos por los antecedentes, acerca de las relaciones entre la AE y el enfoque STEAM. Esto permitió tomar decisiones fundamentadas en la selección de elementos de AE que conforman el corpus teórico que respalda el diseño y evaluación de un dispositivo didáctico. Para la evaluación, se realizó un análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990) del dispositivo didáctico diseñado, que permitió identificar los elementos de la AE y las IEF que se espera que emerjan en las tareas implícitas en el dispositivo.

Diseño de un dispositivo didáctico

A partir de los antecedentes y el marco de referencia, para el diseño del dispositivo didáctico se seleccionó como tópico de interés uno de los ODS: "Acción por el clima", ya que se considera que permite cubrir las tres etapas del enfoque STEAM. Además, como sugiere Vásquez Ortiz (2021), incorporar un ODS en la práctica educativa, brinda una manera diferente de trabajo en el aula, ya que permite conectar la enseñanza con el contexto, abordando problemáticas actuales e impulsando el pensamiento crítico.

En las actividades que conforman el dispositivo se apela al uso de diversas bases de datos disponibles en distintos organismos. Asimismo, se consideró que las tareas impliquen el trabajo con distintas variables, resúmenes, fundamentaciones y recursos tecnológicos. Así, el dispositivo didáctico comprende tres tareas. La primera, implica la búsqueda de información, investigar sobre los ODS, identificar indicadores y decidir sobre las formas de recolectar datos. La segunda, retoma los indicadores de la tarea 1 y se acota la búsqueda a tres fuentes, entre 2000 y 2018. Se deben elegir y analizar las dos variables más relevantes, buscando la selección crítica de información. Y en la última tarea, deben identificar hábitos diarios orientados a la mitigación del cambio climático y reflexionar sobre el impacto que éstos tienen en el mundo.

Análisis de contenido del dispositivo didáctico

En la primera columna de las Imágenes 1, 2 y 3, se presentan las tareas y, en la segunda columna, el análisis de contenido sobre los elementos de la AE (Gal, 2019) y las IEF (Cabrera *et al.*, 2020) que se espera que se pongan en juego en el dispositivo didáctico.

Tarea 1: Introducción al cambio climático	Elementos de la Alfabetización Estadística
Un grupo ambientalista de la ciudad de Santa Fe se plantea las siguientes preguntas: ¿Es posible indicar que el cambio climático implica desafíos en términos económicos, sociales, ambientales y de salud? ¿Las acciones del ser humano repercuten en el cambio climático? ¿Se han mantenido condiciones climáticas similares a nivel nacional y mundial desde comienzos de siglo? El grupo tiene la intención de presentar un proyecto orientado a la prevención, concientización y acción, para implementarlo en diversas localidades de la provincia. Por ello, convocan a tu grupo para que los ayuden a recolectar evidencia en pos de responder algunas de esas preguntas. Para iniciar el trabajo, proponen realizar un debate grupal en torno a lo siguiente: 1.1. a) ¿Qué información consideran necesaria para abordar la problemática planteada en los interrogantes iniciales? b) La ONU, en 2015, propuso 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), con el propósito de impulsar prácticas para la construcción de un futuro mejor en el que la desigualdad y pobreza sean erradicadas, se alcance la paz y la justicia, se protejan los derechos humanos y el planeta. Busquen en la página de la ONU o en <i>Google</i> sobre estos objetivos e identifiquen y realicen una lectura de aquel que refiere a la problemática que se está trabajando. c) En base a la información encontrada en el ítem a) y al ODS que corresponde a la problemática, ¿qué dimensiones o indicadores son utilizados para medir el cambio climático? d) ¿De qué manera se pueden obtener datos vinculados con la problemática? ¿Se pueden contar con datos poblacionales o es necesario trabajar a partir de una muestra? En caso de tener que seleccionar una muestra, ¿cómo realizarían la selección? Justifiquen sus elecciones de manera clara y fundamentada. 1.2 a) ¿Es posible evitar el proceso de reco-	Se plantea una situación problemática que sirve como punto de partida para llevar a cabo distintas indagaciones y análisis. La tarea habilita la posibilidad de debatir, contrastar ideas y actitudes asociadas al cambio climático, propiciando distintos <u>elementos disposicionales</u>. Permite explorar el grado de conocimiento sobre el cambio climático y considerar posturas en relación al compromiso de indagación. Además, la información disponible proviene de diversas fuentes, pero su imparcialidad no siempre se encuentra garantizada, de manera que se destaca la importancia de poner en juego la <u>habilidad crítica</u> al evaluar la coherencia de los datos o de la información. Al preguntar sobre la información que consideran esencial como punto de partida, es necesario interpretarla de manera adecuada en un determinado contexto (<u>conocimiento contextual</u>). Dicho contexto es la base para interpretar los resultados por lo que aporta significatividad y, resulta crucial que, en base a la información disponible, se pueda deducir cuál es la información necesaria para llevar a cabo el estudio y se promueva el debate sobre los datos disponibles. Además, al situar a los estudiantes como responsables de la recolección de datos, se fomenta el cuestionamiento y la confrontación de opiniones, habilitando la puesta en juego de <u>posturas, creencias y actitudes</u>. La actividad requiere de la comprensión e identificación de aspectos relacionados con la planificación de una investigación estadística, por ejemplo: métodos de recolección de datos, muestra o población, tipo de muestra, unidades elementales. La determinación o identificación de la muestra, a su vez, implica relacionar características de las muestras representativas. Además, se necesita co-

lección de datos? ¿Por qué? b) ¿Dónde buscarían la información? i) Si optan por utilizar datos recolectados por algún organismo, esos datos ¿concuerdan con los que pensaban recolectar? ii) ¿Existen otras consideraciones respecto a los datos que deban tenerse en cuenta para la recolección? ¿Cuál/es? ¿Por qué?	nocer por qué los datos son necesarios y cuáles son sus orígenes. Todo esto, requiere del <u>conocimiento estadístico</u>, ya que en esta tarea se pone en juego el manejo de conceptos y procedimientos básicos asociados a la estadística y al problema de la medición. Ideas Estocásticas Fundamentales En esta tarea se pueden identificar los datos, el muestreo y la aleatoriedad.

Imagen 1: Relaciones entre los elementos de la AE y las IEF previstos en la tarea 1 del dispositivo didáctico

Tarea 2: Recopilación y análisis de datos sobre indicadores del cambio climático	Elementos de la Alfabetización Estadística
En la tarea anterior estuvimos analizando diferentes maneras de acceder a información relevante para dar respuesta a la problemática que nos interesa. Les proponemos ahora que indaguen los datos correspondientes al período 2000 - 2018 proporcionados por los siguientes organismos: - Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible de Argentina: https://inventariogei.ambiente.gob.ar/ - ONU: https://statistics.cepal.org/portal/cepalstat/index.html - Banco Mundial: https://datos.bancomundial.org/indicador 1.1 En función de la exploración realizada, definan dos variables que resulten apropiadas para informar acerca de la problemática. Clasifíquenlas e indiquen en qué escala de medición se encuentran expresadas. 1.2 ¿Cómo se pueden analizar los datos proporcionados por los organismos para obtener respuestas a las preguntas que se plantea el grupo de activistas? Indiquen los pasos a realizar fundamentando cada decisión. 1.3 A partir de los análisis elegidos antes, elaboren los que consideren pertinentes o si en las páginas de los organismos ya se encuentran elaborados los resúmenes, seleccionen los más relevantes y fundamenten su relevancia en función de la evidencia que les permite aportar. Si es posible o necesario realizar resúmenes alternativos para ampliar la información, realicenlos y fundamenten sus elecciones.	Al proponer la exploración de datos de diversos organismos, se busca valorar la capacidad de selección y toma de decisiones y permite el involucramiento activo en la selección de datos, en virtud de los <u>elementos disposicionales</u>. Además, el análisis de las bases de datos, exige una comprensión profunda del contexto, propiciando relaciones entre el conocimiento contextual y la interpretación de la información, requiriendo de <u>habilidades críticas</u> y de <u>alfabetización documental</u>. También se necesita tener familiaridad con los conceptos de la estadística descriptiva, así como habilidades de lectura, interpretación y construcción de resúmenes. Todo ello requiere <u>conocimiento estadístico</u> y <u>matemático</u>. A su vez, la definición adecuada y de las variables, junto con la transnumeración de datos necesaria para realizar resúmenes adecuados, potencian la importancia del <u>conocimiento estadístico</u> en este proceso. La tarea no implica solo el conocimiento e interpretación, sino que exige utilizar datos para responder a las preguntas iniciales. Esto requiere de habilidades de anticipación y planificación, por lo que se promueve la adopción de <u>posturas críticas</u> y la toma de decisiones basadas en una evaluación minuciosa, los cuales se convierten en aspectos clave para lograr resultados bien fundamentados. Todo eso requiere del <u>conocimiento del contexto, estadístico</u>, de <u>habilidades críticas</u> y de <u>alfabetización documental</u>. Ideas Estocásticas Fundamentales En esta tarea se pone en juego las ideas de datos, distribución, resumen, muestreo, variación y modelos estadísticos.

Imagen 2: Relaciones entre los elementos de la AE y las IEF previstos en la Tarea 2 del dispositivo didáctico

Tarea 3: Reflexiones y acciones para combatir el Cambio Climático/para reducir nuestra huella	Elementos de la Alfabetización Estadística
En relación a la indagación que realizaron, el grupo ambientalista les propone reflexionar en torno a las siguientes preguntas: • ¿Cuáles son los impactos más evidentes del cambio climático en la actualidad y cómo se manifiestan en diferentes partes del mundo? • ¿Cuáles son los escenarios posibles para el futuro si no se toman medidas significativas para abordar el cambio climático? • ¿Cómo pueden los individuos modificar sus estilos de vida para contribuir a la reducción del impacto del cambio climático? • ¿Considerás que tus acciones diarias contribuyen a la mitigación del cambio climático? De no ser así, ¿qué cambios estarías dispuesta/o a hacer en tu estilo de vida para contribuir? ¿Qué obstáculos enfrentarías al hacer estos cambios? • Respondé el siguiente cuestionario https://calculadora-co2.climatehero.me/?source=climateherome que te permite conocer tu huella de carbono y proponé acciones para reducir el impacto. ¿La información presentada por el simulador ante tus respuestas coincide con tu percepción sobre tus hábitos? • En virtud de los datos utilizados y el análisis realizado en la tarea 2. ¿Qué prácticas propondrías para reducir las emisiones de gases de efecto invernadero y combatir el cambio climático en la escuela? • En tu ciudad ¿qué acciones se realizan para disminuir el aumento de la temperatura? ¿Y para disminuir la huella de carbono? ¿Cuáles de esas acciones se realizan más a menudo? ¿De qué manera se puede incentivar a las/os ciudadanas/os para ayudar a cambiar el entorno? A partir de estas reflexiones, realicen una presentación/infografía que permita describir los resultados y las conclusiones más relevantes para la elaboración del proyecto de los ambientalistas.	Esta tarea implica poner en práctica el <u>conocimiento contextual</u>, habilitando <u>posturas críticas</u> y la interpretación de los datos trabajados en las tareas anteriores. En este sentido, surgen distintos procesos de transnumeración. La realización de una presentación o infografía requiere de la discusión de las conclusiones derivadas de las tareas previas. Es necesario relacionar <u>habilidades críticas</u> y de <u>alfabetización documental</u>, el <u>conocimiento estadístico</u> y las <u>creencias</u> y <u>actitudes</u> con el propósito de reflexionar sobre los datos y usarlos como evidencia en el planteo de propuestas para la prevención, concientización y accionar que permita combatir el cambio climático. En suma, se promueve la participación activa en la toma de decisiones, el conocimiento contextual, las habilidades críticas y estadísticas, la interpretación adecuada de datos y la adopción de posturas críticas, propiciando un análisis integral en el ámbito de la estadística. Ideas Estocásticas Fundamentales En esta tarea se pone en juego las ideas de datos, resumen y modelos estadísticos.

Imagen 3: Relaciones entre los elementos de la AE y las IEF previstos en la Tarea 3 del dispositivo didáctico

El análisis de contenido permite evidenciar un abordaje integral de IEF y conceptos estadísticos, pues propicia la manipulación de datos, el análisis de su representatividad y validez, la adecuación de los resúmenes derivados de bases de datos, y también su interpretación. Consideramos que al propiciar un análisis crítico sobre sus propias acciones y las del entorno, favorece una comprensión profunda de los conceptos, y a la vez, permite analizar, evaluar y tomar decisiones fundamentadas, permitiendo integrar la Estadística con problemas actuales y con su influencia en las decisiones cotidianas.

Reflexiones finales

En este trabajo, se ha presentado el análisis de contenido de un dispositivo didáctico que propicia la integración de elementos de AE con IEF mediante un enfoque STEAM. Como recomiendan los autores tomados como antecedentes, el dispositivo didáctico analizado permite aportar nuevas evidencias didácticas para los profesores interesados en enseñar conceptos estadísticos.

La implementación de la propuesta y el análisis posterior de las producciones de los estudiantes aún están pendientes. Esta fase, sin duda, requerirá adaptaciones según las características del curso y se espera que permita aportar mayor evidencia acerca de la potencialidad del dispositivo didáctico.

Reconocimiento

Cientibeca: “Relaciones de la Alfabetización Estadística y el enfoque STEAM en un dispositivo didáctico orientado a la formación de ciudadanos críticos y sostenibles” y proyecto CAI+D: Estudio exploratorio de las relaciones entre Cultura Estadística y Alfabetización Científica en dispositivos didácticos basados en el enfoque STEAM. UNL.

Bibliografía

- Batanero, Carmen** (2019). Statistical sense in the information society. En K. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, F. J. García-Peñalvo y J. Lavonen (Eds.), *Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias* (pp. 28-38). <http://ceur-ws.org/Vol-2555/>
- Behar, Roberto y Grima, Pere** (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Estamos Formando Pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad*, 5(2), 84–90.
- Ben-Zvi, Dani** (2016). Three paradigms in developing students’ statistical reasoning. En Estrella *et al.* (Eds.), *Actas de las XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 13-22). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

- Bolatti, Fátima y Tauber, Liliana** (2021 a). Análisis de una tarea basada en el enfoque de la Estadística Cívica. En L. Tauber y J. Pinto Sosa (Eds.), *Tendencias y nuevos desafíos de la investigación en Educación Estadística en Latinoamérica*. Universidad Nacional del Litoral. <https://acesse.dev/1QYAJ>
- Bolatti, Fátima y Tauber, Liliana** (2021 b). Indicadores de la Estadística Cívica en tareas que propician la Cultura Estadística. *Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología. II SEM-V*, 138 -143.
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana y Fernández, Elina** (2020). Educación Estocástica para pensar estadísticamente. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(2), 89-109.
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana, Gili, Juan y Romero, Daniel** (2022). La transumeración como insumo del pensamiento crítico. *Proceedings of the 11th International Conference on the Teaching of Statistics (ICOTS11)*.
- Campos, Celso** (2016) La educación estadística y la educación crítica. 2º *Encuentro Colombiano de Educación Estocástica*, 5-23.
- Castro, Diclenny y Moreno, Antonio** (2021). Ideas Estocásticas Fundamentales en el Currículo Colombiano. *Yupana*, (13), 28–47.
- Chick, Helen, Pfannkuch, Maxine, y Watson, Jane** (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. *Curriculum Matters*, 1, 87–108.
- Cohen, Louis y Manion, Lawrence** (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. La Muralla.
- Engel, Joachim** (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Fitzallen, Noleine, Watson, Jane, Wright, Suzie y Duncan, Bruce** (2018). Data representation in a STEM context: The performance of catapults. In M. A. Sorto y E. Paparistodemou (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the 10th International Conference on the Teaching of Statistics*.
- Gal, Iddo** (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. Contreras, M. Gea, M. López–Martín y E. Molina–Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Goetz, Stefan** (2009). Fundamental Ideas and Basic Beliefs in Stochastics: Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student teachers. En M. Kourkoulos y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics* (pp. 279-291). Universidad de Creta.
- Henriques, Ana y Oliveira, Hélia** (2019). Transnumeração em contexto STEM: Um cenário de aprendizagem desenvolvido por futuros professores com alunos do 8.º ano.

En J. M. Contreras, M. Gea, M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2014). Diseño Curricular. Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe. Matemática.

Moreiro González, José (2004). *El contenido de los documentos textuales: su análisis y representación mediante el lenguaje natural*. Trea Editorial.

Tauber, Liliana (2022). Cultura Estadística para profesionales críticos. En J. Bernik, V. Baraldi, O. Lossio y V. Luna (Comps.), *Conversaciones entre la enseñanza y el campo didáctico* (pp. 73-91). Ediciones UNL.

Vásquez Ortiz, Claudia (2021). Proyectos estocásticos orientados a la acción: una puerta al desarrollo sostenible desde temprana edad. *REVIEM*, 1(2), 1-29.

Zamorano, Tomás, García, Yonnhatan y Reyes, David (2018). Educación para el sujeto del siglo XXI: principales características del enfoque STEAM desde la mirada educacional. *Contextos: Estudios de Humanidades y Ciencias Sociales*, (41).

Análisis de contenido de tareas que permiten medir niveles de comprensión gráfica

LILIANA TAUBER

estadisticamatematicafhuc@gmail.com

SILVANA SANTELLÁN

silvanamsantellan@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias – Universidad Nacional del Litoral (FHUC-UNL)

Resumen

Desde hace tiempo vivimos una revolución en la que los resúmenes estadísticos interactúan con variadas formas de comunicación. Esto provoca la necesidad de reflexionar sobre instrumentos de evaluación que permitan aportar evidencias sobre la comprensión gráfica que tienen las personas. Con tal objetivo, se presentan algunas tareas que conforman un instrumento diseñado para caracterizar los niveles de comprensión gráfica inicial de estudiantes que realizan su primer curso universitario de Estadística. Se realiza un análisis de contenido sobre las tareas seleccionadas, el cual denota las relaciones entre elementos de alfabetización estadística y el nivel de comprensión gráfica necesario para dar respuestas adecuadas. El análisis muestra la complejidad semiótica de los resúmenes estadísticos que debería ser tenida en cuenta a la hora de diseñar propuestas de enseñanza y de aprendizaje, como también de evaluación.

Palabras clave: alfabetización estadística / comprensión gráfica / estudiantes universitarios / análisis de contenido

Introducción

Desde los originales gráficos de Florence Nightingale y John Snow, entre 1854 y 1856, las técnicas de Tukey, en 1977, pasando por la variedad de representaciones usadas en la pandemia de COVID-19, hasta las dinámicas presentaciones de Hans Rosling, hemos sido testigos de una revolución en la que Imágenes, gráficos y mapas, interactúan con variadas formas de comunicación (infografías y videos, entre otros).

Todos esos tipos de resúmenes tienen un eje conceptual basado en la Estadística, la cual ofrece diversas representaciones gráficas que ayudan a dilucidar las historias que los datos tienen para contar, por ejemplo, gráficos de barras, de sectores, diagramas de dispersión, histogramas, cajas y bigotes, entre tantos otros.

Hoy en día, es casi imposible abrir un artículo de un periódico o una discusión en las redes sobre temas sociales, económicos o ambientales que no se sustenten en representaciones gráficas. Sin ir más lejos, en la época de la pandemia de COVID-19, los gobernantes fundamentaban sus variadas decisiones en información presentada de manera gráfica o actualmente, se debate sobre la educación universitaria pública, mostrando gráficos con distinto tipo de información en torno al presupuesto que el gobierno destina o debería destinar. Así, los gráficos, los diagramas, los íconos, las infografías y cualquier otro tipo de representación, permiten lograr una comprensión más completa de teorías, conceptos, enfoques e ideas (Pérez Echeverría *et al.*, 2009).

Toda esta evidencia brinda fundamentos a favor de considerar la relevancia de enseñar y de aprender, no sólo a construir representaciones sino y mucho más importante, a interpretar, a analizar y a inferir a partir de dichas representaciones, al menos de manera informal. Todas las imágenes tienen en común la facilitación, de forma integrada y sencilla, de grandes cantidades de información y de conocimientos relacionados entre sí de manera compleja. Pero, estas representaciones, la mayoría de las veces, no son tan evidentes o transparentes y, para poder comprenderlas es necesario tener un cierto nivel de “alfabetización gráfica” (Pérez Echeverría *et al.*, 2009).

Considerando la relevancia y la complejidad de los resúmenes estadísticos, el objetivo principal del presente trabajo es, identificar los elementos de alfabetización estadística (Gal, 2019), que se ponen en relación en diversas tareas que componen

un instrumento más amplio diseñado específicamente para una fase de una investigación de diseño. Y, a partir de la identificación de tales elementos, se busca caracterizar el nivel de comprensión gráfica y tabular (Curcio, 1987; Friel *et al.*, 2001; Estrella, 2014) que requiere cada una de las tareas analizadas.

Antecedentes

El principal problema cuando los estudiantes universitarios interpretan resúmenes estadísticos, es que poseen escasos conocimientos formales sobre su abordaje (Tauber, 2010; Inzunza Cazares, 2015; García García *et al.*, 2020). Las investigaciones reportan este problema y el desinterés de los docentes en enseñar las representaciones estadísticas por considerarlas fáciles de comprender (Brandi, 2018; Tauber, 2022). Aquí, podríamos preguntarnos sobre la relevancia de enseñar y de aprender a leer e interpretar resúmenes. Si bien los ejemplos anteriores sirven de fundamento para esta relevancia, es posible justificarla desde estudios actuales. Así, Gal (2019), descifra las complejidades, cognitivas y conceptuales, que surgen cuando se diseñan actividades tendientes a interpretar información. Por su parte, Pallauta *et al.* (2020), analizan la complejidad semiótica cuando se interpreta información en tablas estadísticas. En Estrella (2014), se identifican tipos y elementos de tablas estadísticas, sus complejidades y muestra la ausencia de propuestas orientadas a su comprensión.

Otros, analizan la comprensión gráfica en estudiantes de primaria y de secundaria (Estrella y Estrella, 2020; García García *et al.*, 2020), y en los últimos años, se ve un crecimiento en la investigación sobre estudiantes universitarios y el diseño de instrumentos. Así, Inzunza Cazares (2015) y Pallauta *et al.* (2020), describen la complejidad en el razonamiento que surge al construir y analizar gráficos y tablas estadísticas. Inzunza Cazares (2015), analiza la complejidad cognitiva de los gráficos estadísticos obtenidos de publicaciones oficiales, con datos de contextos económicos y sociodemográficos y describe el nivel de comprensión gráfica en dos grupos de estudiantes, de licenciatura y de maestría. Concluye que, muy en contra de lo que suponen los profesores, las gráficas son un tema complejo, ya que constituyen un modelo que expresa información de una o varias variables a través de recursos semióticos. También indica que, para interpretar una gráfica es necesario extraer la información que proporciona, analizarla y relacionarla mediante procesos de matematización que involucran datos y

frecuencias, ordenamientos y comparaciones, tendencias y cambios de una variable respecto del tiempo o espacio y su conexión con el contexto e indica que no se desarrolla de forma espontánea, sino que requiere de una enseñanza bien planeada.

Marco de referencia

Elementos de alfabetización estadística

Siguiendo a Gal (2019), la alfabetización estadística (AE) refiere a la comprensión y al compromiso con los mensajes estadísticos de los medios de comunicación, del trabajo y de otros contextos de la vida. Así, idea un modelo conceptual centrado en elementos de la AE, que distingue entre cognitivos y disposicionales. Entre los primeros, destaca el *conocimiento del contexto*, que le da sentido a las formas de recolección de datos, al análisis de éstos y a la toma de decisiones. A partir del contexto y del muestreo, se deriva la necesidad del análisis y resumen de los datos, para aportar información que permita regresar al contexto y responder preguntas. Ello permite integrar los demás elementos: la *alfabetización documental* (Gal, 2019), que habilita un proceso integrador del conocimiento que se deriva de documentos metodológicos con el *conocimiento estadístico y matemático* necesarios para realizar el análisis estadístico y valorar su adecuación al contexto. Así, la búsqueda de respuestas a partir de este análisis, requiere relacionar una actitud de permanente interrogación, que habilita *habilidades críticas* y la reflexión sobre qué parte de la realidad describen los datos. Ello, implica adoptar una *postura crítica* para autocuestionar las propias *creencias y actitudes* sobre la información (elementos disposicionales). Así, Gal (2019) indica que la AE demanda habilidades asociadas con la interpretación de datos y resúmenes y con la capacidad de expresar opiniones fundamentadas en la evidencia estadística y, esas relaciones permiten evaluar el nivel de complejidad de las tareas que se proponen en la enseñanza.

Niveles de comprensión gráfica

Diversos autores analizan componentes y niveles de la comprensión gráfica. Bertin (1967), indica que un gráfico es un objeto semiótico complejo, ya que la lec-

tura de un gráfico inicia con una identificación externa del tema al que refiere, a través de comprender el título y las etiquetas. Luego, requiere una identificación interna de las dimensiones relevantes del gráfico y variables representadas, para interpretar las relaciones entre éstas y la realidad. En ese sentido, Friel *et al.* (2001) describen a la comprensión gráfica, como lectura, descripción, interpretación, análisis y extrapolación/interpolación de datos desde los gráficos estadísticos. Por su parte, Curcio (1987), menciona que la lectura de un gráfico requiere de la identificación y comprensión de elementos que lo componen: 1) palabras o expresiones en el gráfico (por ej., título, etiquetas), 2) contenido matemático involucrado (por ej., densidad en un histograma) y 3) convenios de construcción para cada tipo de gráfico (por ej., representar las variaciones en un gráfico de líneas). Por ello, Friel *et al.* (2001) y Shaughnessy (2007), proponen una taxonomía de comprensión gráfica para identificar las habilidades necesarias para interpretar un gráfico estadístico:

- *Nivel 1. Leer los datos.* Implica la lectura literal de los datos explícitos en un gráfico o tabla, sin necesidad de interpretar la información. Por ejemplo, leer el título o la frecuencia de un valor de la variable.
- *Nivel 2. Leer dentro de los datos.* Comparar, interpretar e integrar información que no está explícitamente representada en el gráfico. Por ej., comparar o realizar cálculos sencillos con datos, relacionar datos o indicadores que derivan de los mismos.
- *Nivel 3. Leer más allá de los datos.* Predecir e inferir informalmente información que no está representada en el gráfico. Por ej., predecir tendencias a partir de los datos.
- *Nivel 4. Leer detrás de los datos.* Valorar críticamente la información representada, el uso del gráfico, la forma de recolección y organización de los datos, la validez y fiabilidad de estos y la integración de la información con el contexto. Por ej., cuestionar la calidad de los datos, o sugerir una posible explicación del comportamiento de los datos.

Componentes de las Tablas estadísticas

Si bien los gráficos son los más utilizados, en ocasiones se utilizan resúmenes tabulares. Así, Estrella (2014), identifica que una tabla debe incluir: *Título*, que des-

criba las variables representadas, y si es posible, el contexto del estudio. *Etiquetas en el margen lateral o primera columna*, que muestran las modalidades de la variable, según su escala de medición. *Etiquetas en el encabezado superior o primera fila*, que indica el contenido de las columnas. Por ej., tipo de frecuencias o modalidades de otra variable (en tablas de doble entrada). *El cuerpo de los datos*, la intersección de filas y columnas, que generalmente es información numérica, frecuencias o varios valores en la misma celda. Por su parte, Pallauta *et al.* (2020) identifican tres tipos de tablas: *Tabla de datos*. Con forma de matriz que contiene, para cada individuo, los valores observados de una o varias variables. *Tabla de distribución de frecuencias de una variable*. Con los valores observados de una variable asociados al número de individuos (frecuencia absoluta). *Tabla de doble entrada o de contingencia*. Permite el cruce de dos variables, conformado por frecuencias conjuntas sobre dicho cruce. De aquí se derivan las complejidades de los resúmenes, que hay que considerar a la hora de diseñar tareas de comprensión gráfica.

Metodología

La presente investigación es exploratorio-descriptiva, utilizando como técnica, el análisis de contenido (Mayring, 2000) de un cuestionario basado en resúmenes estadísticos publicados en informes oficiales. El instrumento, ha sido elaborado por las autoras y forma parte de una investigación más amplia. Para su construcción se consideraron las recomendaciones de Gal (2019), Inzunza Cazares (2015) y Estrella (2014). Así, se seleccionaron resúmenes de informes de organismos nacionales, a partir de los cuales se elaboraron las tareas que componen el cuestionario, con lo cual es un material inédito. El mismo está orientado a estudiantes de Ciencias Sociales, para ser aplicado al inicio de su primer curso universitario de Estadística, lo cual permite obtener evidencias sobre la comprensión gráfica inicial y monitorear, junto a otras tareas evaluativas no analizadas aquí, la evolución de las trayectorias de los estudiantes.

El primer bloque del cuestionario, recolecta datos demográficos de los sujetos y el segundo, incluye 7 tareas con gráficos y tabla, con distintos objetivos: leer gráficos, comparar distribuciones de frecuencias, interpretar, analizar tendencias en

series de tiempo y, elaborar conclusiones y argumentos (Pérez Echeverría *et al.*, 2009). Se incluyen preguntas cerradas y abiertas (algunas del tipo verdadero-falso), y en la mayoría se solicitan argumentaciones que aportan evidencias sobre la comprensión gráfica.

Discusión de resultados

A continuación, se ejemplifica el análisis de contenido previo realizado sobre tres tareas seleccionadas para el presente trabajo. Las mismas se eligieron de modo de incluir distintos tipos de resúmenes, para ejemplificar distintos niveles de comprensión gráfica y relaciones posibles entre elementos de AE. Este análisis previo, servirá en trabajos futuros, para evaluar la comprensión gráfica evidenciada por los estudiantes a los que se ha aplicado el instrumento.

Análisis de contenido de la Tarea 1

En la Imagen 1, se presenta la tarea 1, que se centra en la interpretación de un gráfico de barras simples. El gráfico 1 presenta una complejidad específica pues implica comprender que, cada categoría presentada proviene de datos asociados a una tabla de contingencia, en la que en las filas se incluirían las categorías de la variable 1: “Género de cada inscrito a carreras de grado o pregrado en Argentina, 2019” y, en las columnas, las categorías asociadas a la variable 2: “Rama de las ciencias de la carrera a la que se inscribió cada ingresante a una carrera de pregrado o grado, en Argentina, en 2019”. Y, a partir de la distribución condicional según las categorías de la variable 2, se calculan las frecuencias porcentuales asociadas con el total de inscritos en carreras correspondientes a cada rama de las ciencias. Esto implica reconocer que, por ejemplo, cada 1000 personas inscritas en carreras de Ciencias Aplicadas, 364 de ellas son mujeres, mientras que, de cada 1000 personas inscritas en Ciencias de la Salud, 742 son mujeres. La situación sería distinta si se calculara el porcentaje de mujeres inscritas en cada rama, obtenido sobre el total de mujeres inscritas entre todas las carreras. En este caso, se trataría de una distribu-

ción de frecuencias de una variable y, por lo tanto, la suma de los porcentajes sería igual a 100, lo cual no ocurre en el gráfico 1.

Tarea 1. En el Gráfico 1 tomado del sitio del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC), al comparar los valores marcados con un redondel, ¿qué se puede indicar al respecto?

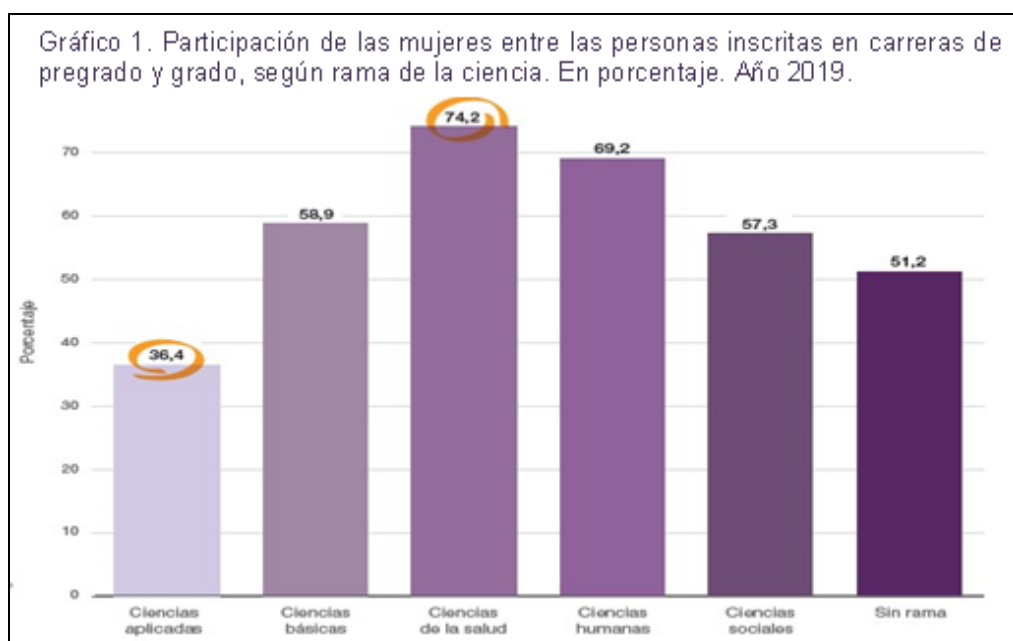


Imagen 1: Contenido de la tarea 1. Elaboración propia

En consecuencia, en la tarea se ponen en relación *conocimiento estadístico y matemático*, como frecuencias relativas porcentuales, distribución bivariada, distribución univariada, distribución condicional, tipos de variables, resúmenes (gráficos y tabulares -de manera implícita-), categorías de una variable cualitativa, indicadores (porcentajes), escala numérica en el eje vertical y convenciones de construcción de un gráfico. Este conocimiento se asocia con distintas *habilidades de alfabetización*, especialmente la *alfabetización documental y numérica* (Gal, 2019), que es el nexo para conectar el conocimiento estadístico con el conocimiento del contexto y habilita *habilidades críticas*, que podrían llevar a preguntarse sobre la manera en que han sido obtenidos los porcentajes sobre los que realizar la comparación pedida y sobre su significado. Así, dado que la tarea implica comparar, interpretar e integrar información que no está explícitamente representada en el

gráfico, se espera un nivel de comprensión gráfica asociado al Nivel 2 (leer dentro de los datos).

Análisis de contenido de la Tarea 4

En la Imagen 2 se presenta la tarea 4, que incluye una tabla de doble entrada (Pallauta *et al.*, 2020), que resume las distribuciones de frecuencias porcentuales de la edad de cada persona que vivía en Argentina, en los censos de 1914 y 2010, respectivamente. Aquí, es preciso aclarar que, si bien el resumen presentado corresponde a una tabla de doble entrada, la misma no corresponde a una tabla de contingencia, porque no se cruzan dos variables, sino que se presenta una sola variable cuantitativa continua (la edad de cada persona), observada en dos momentos diferentes. En este sentido, se observa que plantea una situación complementaria a la tarea 1, porque presenta una tabla estadística y una aplicación a otro contexto y situación.

En la Tabla 1 se realiza una comparación de la población argentina según datos de los censos 1914 y 2010. ¿Cuál es la diferencia más relevante entre los dos censos?

Tabla 1. Distribución porcentual de la población argentina por grupos de edad. Total del país.

Grupo de edad	1914	2010
	%	
Hasta 14 años	38,4	25,5
15 a 64	59,3	64,3
65 y más	2,3	10,2

Fuente: INDEC, elaborado por la Dirección de Estadísticas Sectoriales a partir de datos del Programa de Análisis Demográfico, obtenidos de los censos nacionales de población 1914 y 2010.

Imagen 2: Contenido de la tarea 4. Elaboración propia

La información de la tabla permite hacer distintas comparaciones: entre el porcentaje de personas según edad en un mismo censo, o para cada rango etéreo entre

censos. La consigna implica esta última comparación y tener *habilidades críticas*, para preguntarse si se debe comparar entre porcentajes de las distintas modalidades (o valores) de la variable o entre frecuencias de cada modalidad en los dos momentos de medición (Estrella, 2014). Reconocer la variable bajo estudio y las distribuciones univariadas, implica relacionar *habilidades de alfabetización y conocimiento estadístico*, que lleva a comprender: el significado de los porcentajes en el contexto, que la suma de los porcentajes por columna debería ser igual a 100 (por ser frecuencias de distribuciones univariadas) y entender el significado de los títulos y etiquetas. También surge un *conocimiento matemático* básico para comprender el significado de los intervalos de la variable “Edad de cada persona”. Por todo ello, se considera que esta tarea implica un *Nivel 2 de comprensión gráfica (leer dentro de los datos)*.

Análisis de contenido de la Tarea 6

En la Imagen 3 se presentan las consignas de la tarea 6, que incluyen distintas afirmaciones sobre las que se requiere analizar su verdad o falsedad, fundamentando la decisión, a partir de la información de las pirámides poblacionales incluidas.

Así, las consignas 1 y 5 implican un *Nivel 2 (leer dentro de los datos)* de comprensión gráfica. Esto es así, porque en ambos casos, una respuesta adecuada implicará *habilidades de alfabetización* que ayudarán en la lectura de la información: intervalos de edades, origen, años de los censos y frecuencias, pero además, implica interpretar que las afirmaciones refieren a valores absolutos, mientras que en las pirámides se presentan frecuencias porcentuales, y dado que no se conoce el tamaño de las poblaciones, no hay evidencia suficiente como para decir si las afirmaciones son verdaderas o falsas, lo cual debería quedar explícito en las argumentaciones brindadas. Todo ello, implica disponer de *habilidades críticas* para hacerse preguntas sobre el alcance de la información y también de una *postura crítica*, que será la que permita argumentar sobre la falta de evidencia para dar una respuesta.

También las afirmaciones 2 y 3, implican un *Nivel 2* de comprensión gráfica, porque en ambas se deben realizar comparaciones, pero tienen un nivel de dificultad menor que las anteriores, porque implica relaciones más sencillas entre elementos de AE. En ambas, se deben leer los intervalos que intervienen (60 años o más,

en la afirmación 2 y los intervalos de 0 a 4 y de 5 a 9 años, en la afirmación 3), junto a las frecuencias porcentuales respectivas. Ello implica *habilidades de alfabetización, conocimiento estadístico y matemático y habilidades críticas* para identificar la evidencia adecuada que permite dar un argumento coherente con la decisión tomada.

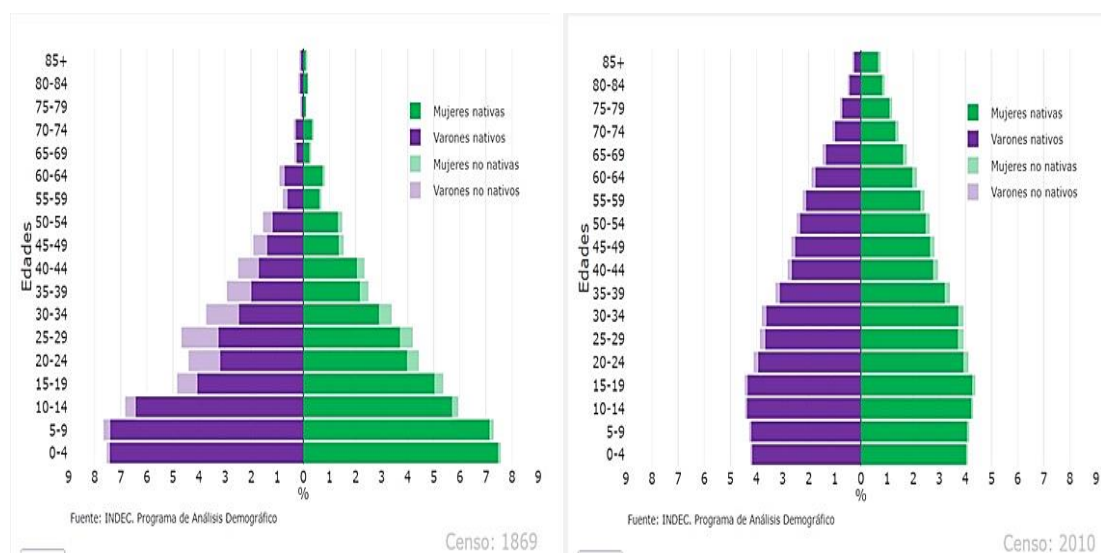
Por el contrario, las afirmaciones 4, 6 y 7, exigen un nivel de comprensión gráfica más avanzado. Las afirmaciones 4 y 7, están íntimamente relacionadas, dado que se expresa de distinta forma la misma tendencia, que implica analizar que, en 2010, hay una proporción mayor de personas de 60 años o más y, específicamente, la proporción de personas de 80 años o más, es alrededor de un 5% mayor en 2010 que en 1869, observándose una diferencia aún mayor en las mujeres. Esta información, asociada con las diferencias porcentuales entre los dos censos para los niños de 0 a 9 años, que se reduce casi a la mitad en el censo del 2010, permiten inferir informalmente, una tendencia de envejecimiento y también de una mayor esperanza de vida. Con la consigna 7, se busca constatar la congruencia en la decisión y argumentación de 4. En consecuencia, ambas consignas implican un *Nivel 3 de comprensión gráfica (leer más allá de los datos)* y relacionar elementos de AE, asociados con el conocimiento estadístico, matemático, habilidades de alfabetización, habilidades críticas y una postura crítica que habilitará el análisis y cuestionamiento sobre las tendencias.

Los gráficos siguientes fueron obtenidos del apartado de indicadores demográficos de la página web del INDEC y representan las edades de la población argentina según origen, en los censos de 1869 y 2010. Con base en esta información, indica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas y fundamentar la decisión.

1. En 1869, había mayor cantidad de niños entre 0 y 9 años que en 2010.
2. En 2010, ha crecido la población de 60 años o más.
3. La proporción de niños entre 0 y 9 años, era mayor en 1869.
4. La población argentina se ha envejecido respecto a 1869.
5. En 2010, había mayor cantidad de mujeres que de varones.
6. En 1869, había mayor porcentaje de hombres no nativos que de mujeres no nativas, ello se debió a que las mujeres se morían más jóvenes.

7. La esperanza de vida ha aumentado.

Distribución de edades de la población argentina (Censos 1869 y 2010). Fuente: INDEC



NOTA: los colores representan: Verde: mujeres nativas - Lila: varones nativos - Verde claro: mujeres no nativas - Lila claro: varones no nativos

Imagen 3: Contenido de la tarea 6. Elaboración propia

Por último, la afirmación 6, implica un *Nivel 4 de comprensión gráfica (leer detrás de los datos)*, debido a que para dar una respuesta adecuada (decisión y argumentación), se deben identificar las 4 distribuciones implícitas en cada gráfico (para nativos y no nativos, según género), comparar las frecuencias de las edades que corresponden a los jóvenes, decidir qué edades se consideran en la categoría “jóvenes” debido a que no está especificado y, realizar la comparación. Además, se debe valorar críticamente la información representada y el alcance de la misma, para poder valorar si es adecuado concluir que las diferencias observadas son consecuencia de que las mujeres morían más jóvenes. La integración de toda la información disponible con el contexto, permitirá llegar a la conclusión que los datos proporcionados no son suficientes para obtener tal conclusión. Así, en términos de los elementos de AE, se ponen en relación *habilidades de alfabetización*, especialmente *alfabetización documental y numérica, conocimiento estadístico, habilidades críticas* y distintas actitudes de cuestionamiento basadas en la *postura crítica*.

El análisis aporta más evidencia sobre la complejidad semiótica de los gráficos y tablas, mostrando que los mismos implican extraer información de cada recurso, analizarla y relacionarla a través de la identificación de datos y frecuencias relevan-

tes, hacer comparaciones, analizar tendencias y cambios de una variable respecto del tiempo, además de conectar con el contexto de donde provienen los datos, tal como lo expresan Bertin (1967), Insunza Casares (2015) Estrella (2014) y Gal (2019).

Reflexiones finales

Se ha presentado el análisis de contenido de tareas que conforman un instrumento que permite relevar los conocimientos previos de estudiantes universitarios en relación con la comprensión gráfica. Las tareas analizadas permiten integrar teorías (extra e intra estadísticas), conceptos, enfoques (metodologías de indicadores) e ideas, tal como expresan Pérez Echeverría *et al.* (2009). Es importante tener en cuenta esta complejidad, cuando se diseñan los procesos de enseñanza y de evaluación.

Cabe aclarar que las tareas han sido aplicadas, y se está realizando el análisis de las respuestas para identificar el nivel de comprensión gráfica de cada estudiante.

Bibliografía

- Bertin, Jacques** (1967). *Semiologie graphique*. Gauthier-Villars.
- Brandi, Juan** (2018) Los gráficos en la enseñanza y el aprendizaje. Una reflexión desde la práctica docente. *Trayectorias universitarias*, 4(7), 75–81.
- Curcio, Frances** (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Estrella, Soledad** (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23.
- Estrella, Soledad y Estrella, Patricia** (2020). Representaciones de datos en estadística: de listas a tablas. *RECHIEM*, 12(1), 21–34.
- Friel, Susan, Curcio, Frances y Bright, George** (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

- Gal, Iddo** (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- García-García, Jaime, Encarnación Baltazar, Eder y Arredondo, Elizabeth** (2020). Exploración de la comprensión gráfica de estudiantes de secundaria. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, 11, e925.
- Inzunza Cazares, Santiago** (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos. *Revista mexicana de investigación educativa*, 20(65), 529-555.
- Mayring, Philipp** (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung Forum: Qualitative Social Research*, 1(2). <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>
- Pallauta, Jocelyn, Gea, María y Batanero, Carmen** (2020). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en libros de texto chilenos. *Zetetiké*, 28, 1-18.
- Pérez Echeverría, María del Puy, Postigo, Yolanda, López Manjón, Asunción y Marín, Cristina** (2009). Aprender con imágenes e información gráfica. En M. Pérez Echeverría (Ed.), *Psicología del aprendizaje universitario: la formación de competencias* (pp. 134- 138). Ediciones Morata S.L.
- Shaughnessy, Michael** (2007). Research on statistical learning and reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Information Age Publishing.
- Tauber, Liliana** (2010) Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas*, 8(01), 53-74.
- Tauber, Liliana** (2022) Cultura Estadística para profesionales críticos. En: J. Bernik *et al.* (Eds.), *Conversaciones entre la enseñanza y el campo didáctico* (pp. 73-91). Ediciones UNL.

Análisis de contenido de una tarea basada en datos sociales que vincula elementos de la Alfabetización estadística

MARÍA CECILIA BERTERO

mcecilia.bertero@unraf.edu.ar

Universidad Nacional de Rafaela (UNRaf)

LILIANA MABEL TAUBER

estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral (UNL)

Resumen

En el presente trabajo se describen los resultados de un análisis previo de una tarea diseñada con el objetivo de ser aplicada en estudiantes universitarios de primer año. Se realiza un análisis de contenido basado en los elementos de alfabetización estadística (definidos por Gal) y en las ideas estadísticas fundamentales. El análisis de contenido permitió mostrar la complejidad conceptual de la tarea y reflexionar sobre las múltiples relaciones que pueden establecerse entre elementos de alfabetización estadística e ideas estadísticas fundamentales. Se reflexiona sobre la necesidad de fomentar la enseñanza de la Estadística centrada en preguntas que derivan de contextos reales y en la que se fomente el análisis crítico de la información, evitando la aplicación mecanizada de los conceptos estadísticos.

Palabras clave: estadística cívica/ alfabetización estadística / estudiantes universitarios / análisis de contenido

Introducción

La estadística es fundamental en la formación de todo estudiante para su desarrollo profesional porque muy frecuentemente su actividad está vinculada con el análisis e interpretación de su realidad, así como hacer mediciones para la toma de decisiones y valoración de riesgos. Sin embargo, su incorporación no es una tarea fácil en los cursos de Probabilidad y Estadística, por su complejidad formal y gran número de contenidos. Además, todavía es frecuente que profesor y estudiantes den prioridad al aspecto formal y algorítmico por sobre los significados. Esto tiene como consecuencia que, aunque los estudiantes aprueben sus cursos, es posible que no sean capaces de abordar críticamente la información que se presenta en su entorno profesional y ciudadano (Pinto *et al.*, 2017).

Esta realidad descrita por Pinto *et al.* (2017), se reproduce en distintos países, incluida la Argentina (Tauber, 2022), donde es escasa la investigación que se centre en el diseño y análisis sistemático de dispositivos didácticos que buscan introducir la Estadística desde un enfoque centrado en problemáticas sociales.

El diseño de propuestas didácticas basadas en datos sociales queda fundamentado por distintos autores (Nicholson *et al.*, 2018; Engel, 2019; Engel *et al.*, 2021; Engel *et al.*, 2022; Tauber, 2022), ya que las estadísticas sociales o cívicas se ponen a disposición del público a través de múltiples canales de comunicación (organismos oficiales, ONG, etc), y ello provoca la necesidad de que los ciudadanos comprendan tal información, de manera que puedan participar activa y razonadamente en las sociedades democráticas. Un antecedente directo de nuestro trabajo es el de Bolatti y Tauber (2021), donde se analizan las dimensiones y facetas de la Estadística Cívica en un dispositivo didáctico orientado al trabajo con indicadores sociales. En el mismo se describe la red compleja de relaciones entre conceptos, ideas fundamentales y conocimientos de contextos y problemas sociales, habilitando el trabajo desde múltiples enfoques y a partir de análisis estadísticos multivariados.

Es por ello que, en el presente trabajo, se persigue el objetivo de aportar fundamentos didácticos sobre una tarea basada en datos sociales, especialmente diseñada para proponer en cursos universitarios introductorios de Estadística. Así, se analizan las potencialidades y limitaciones de una tarea que se centra en datos publicados por el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) y recogidos en la Encuesta Permanente de Hogares (EPH). El análisis pretende aportar evidencia

sobre los elementos de alfabetización estadística (Gal, 2019) que se integran en una propuesta orientada a la formación de ciudadanos alfabetizados estadísticamente, que busca fomentar el análisis crítico de información y acercar a los estudiantes a un tratamiento de la Estadística, que evite la mera aplicación de fórmulas sin significado conceptual.

Marco de referencia

La Alfabetización Estadística y su relación con los datos sociales

Siguiendo a Gal (2019), la alfabetización estadística (AE) refiere a la comprensión y al compromiso con los mensajes estadísticos que aparecen en los medios de comunicación, en el trabajo y en otros contextos de la vida. En este sentido, el autor, presenta un modelo conceptual que integra los elementos que componen la alfabetización estadística, los cuales se resumen en la Imagen 1.

Elementos de conocimiento	Elementos disposicionales
Habilidades de alfabetización	Creencias y actitudes
Conocimiento estadístico	Postura crítica
Conocimiento matemático	
Conocimiento del contexto	
Habilidades críticas	
Alfabetización estadística	

Imagen 1: Un modelo de Alfabetización Estadística (Gal, 2019)

Así, es posible indicar que la alfabetización estadística no es un simple conjunto de técnicas básicas, sino que es una competencia compleja e independiente en la que se relacionan diversos elementos únicos (Gal, 2019). El elemento principal es el conocimiento del contexto, ya que es la piedra angular de todas las actividades que se desarrollen en el aula, dado que es lo que les da sentido a las formas de recolección de datos, al análisis de los mismos y sobre todo, a la toma de decisiones basada en evidencia confiable. Por ello, el contexto debe ser auténtico y de interés para los actores que participan de la tarea que se propone. Asimismo, las preguntas que se

planteen deben ser pertinentes, deben provocar una “necesidad de saber” (Tauber, 2023).

A partir del contexto y una vez tomadas las decisiones sobre las formas de recolección de datos, se deriva la necesidad del análisis de los mismos, de manera de aportar información que permita regresar al contexto con el objetivo de responder preguntas y tomar decisiones sobre el mismo. Es aquí donde intervienen y se integran los demás elementos. Asimismo, la alfabetización documental es la que habilita un proceso donde se integra el conocimiento que se deriva de la lectura de documentos metodológicos (por ejemplo, el documento que explica las variables que se incluyen en la EPH), con el conocimiento estadístico y matemático, que es necesario para realizar los distintos resúmenes y análisis estadísticos y valorar su adecuación para dar respuestas a preguntas asociadas al contexto. En este sentido, la búsqueda de respuestas a partir del análisis estadístico, requerirá de poner en relación una actitud de permanente interrogación, que habilita las habilidades críticas y permite reflexionar sobre qué parte de la realidad es posible describir a partir de los datos. Todo ello, implica adoptar una postura crítica que permita autocuestionar las propias creencias y actitudes sobre la información.

Según Engel (2019), además del conocimiento y las competencias derivadas de la AE, las estadísticas sociales requieren de conocimiento sobre política, ciencias sociales, educación, etc. Comprender qué temas son importantes en una sociedad y poder analizar los complejos y multivariados problemas con los que se trabaja, es de gran relevancia para fomentar la participación informada de una sociedad democrática. El estudio de situaciones que tratan fenómenos propios de la vida cívica (salud, desempleo, (des)igualdad, ambiente, entre otros), puede favorecer tanto al conocimiento estadístico como a la participación de los ciudadanos y a la formación de profesionales críticos.

En este sentido, trabajar con datos sociales implica características diferentes a las del tratamiento tradicional de la Estadística (Nicholson *et al.*, 2018), ya que implica el estudio de fenómenos multivariados, con datos agrupados de diversas formas en lugar de medidas de variables simples, p.e., el Índice de Desarrollo Humano; también implica el uso de datos dinámicos que se obtienen de forma periódica o sobre una base comparativa para analizar tendencias a lo largo del tiempo. Asimismo, las estadísticas sobre la sociedad se presentan a través de textos (publicados por organismos oficiales en medios digitales o redes sociales. Esto provoca que, el público deba comprender diferentes géneros de escritura y requiere la

necesidad de habilidades para comprender los datos presentados en formas novedosas, por ejemplo, las infografías.

Siguiendo a Batanero (2023), es común que los docentes se enfoquen en una perspectiva teórica de la ciencia basada en la enseñanza de técnicas estadísticas utilizando datos solo para proporcionar un contexto en el que las técnicas puedan aplicarse, pero sin darle relevancia al contexto en sí. Un enfoque basado en los elementos de la AE y en la Estadística con datos sociales puede mejorar esa tradición, y así, favorecer el razonamiento estadístico sobre las problemáticas sociales proporcionando un contexto conceptual a la enseñanza de las técnicas estadísticas.

Ideas Estocásticas Fundamentales (IEF)

De manera complementaria, y para propiciar la integración del conocimiento de conceptos estadísticos con los demás elementos de la AE, se debe buscar la integración de los mismos con los razonamientos y argumentos estadísticos que se derivan de lo que Burrill y Biehler (2011) denominan las ideas estocásticas fundamentales (IEF). Estos autores, sugieren que es importante, a la hora de pensar el diseño de las tareas para el aula, que se identifiquen cuáles son las IEF sobre las cuales se centrará cada tarea. Ello permitirá que se identifiquen cuáles son los conceptos que se desprenden de esas ideas fundamentales y que, generalmente pueden pensarse como una red conceptual que aporta distintos aspectos a la o las ideas fundamentales núcleo de la tarea. Así, Burrill y Biehler (2011), identifican las siguientes IEF:

1. *Datos*: los datos y el contexto del cual derivan son fundamentales para todo el proceso estadístico. Como indica Moore (1998), los datos son números, pero números en un contexto y son el corazón de la Estadística. Sin datos, no hay Estadística.
2. *Resúmenes*: son esenciales en la organización, descripción y análisis de datos.
3. *Variación*: identificarla y medirla permite predecir, explicar, identificar las causas, para luego identificar los modelos que permitan controlarla.
4. *Distribución*: El razonamiento distribucional implica conectar los datos (distribución de datos), la población de donde se tomaron (distribución de probabilidad) y las posibles muestras de la misma (distribución muestral), por lo tanto, es insoslayable.
5. *Asociación y correlación*: permite reconocer la naturaleza de las relaciones entre variables estadísticas en ambientes de incertidumbre.

6. *Probabilidad*: Es el fundamento de los modelos aleatorios y su complejidad radica en que no hay una única acepción (distintas concepciones de probabilidad).

7. *Muestreo e inferencia*: relacionar las características de las muestras con las de la población que representan, es el principal fin de la Estadística y permite decidir qué datos recoger para obtener conclusiones con algún grado de confiabilidad.

Método

La metodología utilizada es de corte descriptivo-interpretativo, centrado en el análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990). El mismo se realiza sobre una tarea vinculada con datos de la EPH y pretende evaluar el potencial de la misma, por lo que se basa en la identificación de categorías basadas en las Ideas Estocásticas Fundamentales y en los elementos de la Alfabetización estadística.

Como sugieren Nicholson *et al.* (2018) y Engel (2019), para el diseño de la tarea, se consideró un problema de interés social, asociado con el estudio de los ingresos, en los hogares de 31 aglomerados urbanos de Argentina. Se buscó que la tarea permitiera el trabajo con distintas variables, indicadores, resúmenes y argumentaciones de modo de relacionar paulatinamente distintos conceptos asociados con las IEF de: Datos y muestreo, Distribución, resúmenes y variación. Para ello, se tuvieron en cuenta recomendaciones de Cabrera *et al.* (2020), en el sentido de utilizar distintos tipos de resúmenes publicados, por ello, se diseñaron consignas basadas en el informe de la Distribución del Ingreso (INDEC, 2023) del cuarto trimestre del año 2022. Así, se incluyeron un gráfico, una tabla y una infografía publicada en el mencionado informe.

La tarea completa persigue la construcción de la IEF de Distribución, ya que es la que habilita distintos conceptos de estadística descriptiva e inferencial, tal como se plantea en Bertero (2022).

Contexto de aplicación

La tarea está pensada para estudiantes de primer año de una Licenciatura en Administración y Gestión de la Información, quienes han cursado previamente un

“Taller de Estadística y Cálculo”, donde tienen un primer acercamiento a la Estadística Descriptiva, por lo cual han trabajado con distintos tipos de resúmenes estadísticos. La intención es utilizar la tarea para recuperar los conocimientos previos; profundizarlos e integrarlos en distintos análisis estadísticos.

La Tarea

La EPH se basa en una muestra probabilística, estratificada, que releva hogares de 31 aglomerados urbanos y cuyos datos se registran de manera trimestral. Las variables que se consideran permiten procesar información sobre indicadores de empleo, precariedad laboral, pobreza, indigencia, educación, ingresos, vivienda y condiciones de vida de los hogares. Para la presente tarea se tomaron datos del Informe Técnico, del 4º trimestre de 2022 (publicado el 05-04-2023). El tamaño de la muestra es de 26.110 viviendas. Observa detenidamente las dos Imágenes y el cuadro que se presentan a continuación. Luego, responde lo que se pide.



Imagen 1: Ingresos totales por fuente

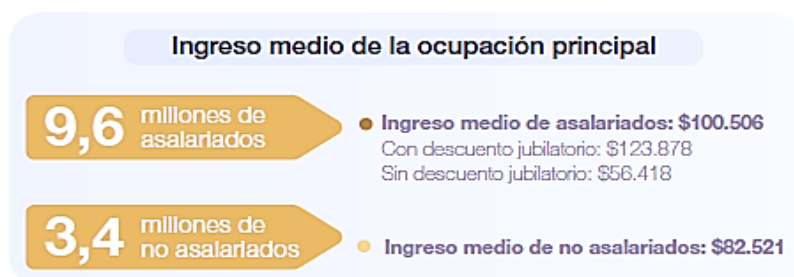


Imagen 2: Ingreso medio de la ocupación principal

Cuadro 1. Población según escala de ingreso per cápita familiar. Total 31 aglomerados urbanos. Cuarto trimestre de 2022

Decil	Escala de ingreso		Población		Ingreso per cápita familiar				
	Desde	Hasta	Población por decil	Porcentaje de personas	Ingreso total por decil (en miles)	Porcentaje del ingreso	Ingreso medio por decil	Ingreso medio por estrato	Mediana por decil
	\$	\$		%	\$	%	\$	\$	\$
1	0	17.000	2.927.666	10,0	34.156.936	2,0	11.667		13.333
2	17.000	23.217	2.926.350	10,0	58.548.149	3,4	20.007		20.000
3	23.217	30.000	2.929.528	10,0	77.192.564	4,5	26.350		26.333
4	30.000	36.000	2.927.602	10,0	97.107.627	5,7	33.170	22.799	33.333
5	36.000	44.000	2.923.764	10,0	116.593.796	6,8	39.878		40.000
6	44.000	52.000	2.929.134	10,0	140.833.112	8,2	48.080		48.500
7	52.000	65.000	2.927.270	10,0	168.713.233	9,8	57.635		57.500
8	65.000	82.500	2.925.494	10,0	212.402.971	12,4	72.604	54.550	72.000
9	82.500	115.000	2.926.048	10,0	280.685.892	16,4	95.927		95.000
10	115.000	1.766.667	2.926.575	10,0	527.915.149	30,8	180.387	138.160	153.333
Población total (*)			29.269.431	100,0	1.714.149.430	100,0	58.564	58.564	44.000

(*) Las diferencias en los totales de población y de ingresos entre los distintos cuadros se deben al uso de los diferentes ponderadores correspondientes en cada caso.

Fuente: INDEC, Dirección de Encuesta Permanente de Hogares.

Cuadro 1: Población según escala de ingreso per cápita familiar

Parte I: Identificación de características de la muestra

- ¿El relevamiento es en todas las provincias? ¿En todos los hogares?
- ¿Cómo se seleccionaron los hogares sobre los que se relevan los datos?
- ¿Cuántas viviendas participaron de la encuesta? La cantidad de viviendas, ¿coincide con la cantidad de hogares? Si no hay coincidencia, ¿a qué se debe? ¿Es suficiente esa cantidad para concluir respecto de los *ingresos totales por fuente de todos los argentinos*?

- ¿Sobre quiénes se obtiene la conclusión luego del análisis de los datos relevados?

Parte II: Identificación de información en resúmenes

- A partir de las Imágenes 1 y 2, define las variables que se analizan y clasifícalas.

- ¿Por qué crees que se presenta la información en un gráfico de torta y no en otro? Si consideras que se podría representar la información de otra manera, indícala y compara con el gráfico de la Imagen 1, analizando alcances y limitaciones.

Parte III: Interpretación de la información

- A partir de la Imagen 2, explica con tus palabras a qué se refiere cuando habla de *ingreso medio*.

- Si alguien te dijera que la información presentada es suficiente para brindar una conclusión sobre el ingreso de todos los argentinos, ¿qué le responderías? Indica qué evidencia estadística o metodológica utilizarías para fundamentar tu respuesta.

i) ¿Qué resumen gráfico consideras que podría ser adecuado para resumir la información de la Imagen 2? Fundamenta tu elección. ¿Es suficiente la información brindada para concluir sobre los ingresos medios de la ocupación principal? ¿Por qué?

Parte IV: Interpretación de medidas

j) Las siguientes consignas se basan en el Cuadro 1 “Población según escala de ingreso per cápita familiar. Total 31 aglomerados urbanos. Cuarto trimestre de 2022”. Allí se hace referencia a los deciles, si no recordás qué significan y cómo se obtienen, te invitamos a que investigues de qué se trata y elabores un párrafo de no más de 5 líneas en el que los expliques (recordá citar la fuente de donde obtuviste la información).

I. Define, clasifica la variable que se analiza y determina su escala de medición.

II. Interpreta la información contenida en la fila del decil 1 y del 9.

III. ¿Dónde se encuentra la mediana? ¿Qué información aporta?

IV. ¿Qué significa el valor \$ 72.604 de la columna “ingreso medio por decil”?

V. ¿Qué significa el valor \$ 26.333 de la columna “mediana por decil”?

VI. ¿Qué valoraciones puedes hacer sobre la distribución de los ingresos?

Parte V: Adoptando el rol de un profesional crítico

k) Supón que eres un periodista y que, a partir de la información existente, debes escribir un artículo para un diario. ¿Qué título pondrías a la noticia de manera que invite a leer el artículo? ¿Cuál es la información que consideras más relevante para comunicar?

l) Según la valoración de toda la información del Cuadro 1, ¿consideras que la misma es confiable y útil para tomar decisiones sobre toda la Argentina?

m) ¿Qué conceptos estadísticos consideras que se pusieron en relación al analizar las Imágenes, el cuadro y en tus respuestas?

Imagen 2: Enunciado de la tarea. Fuente: Elaborado por las autoras

Resultados obtenidos del análisis de contenido de la tarea

En las Tablas 1 y 2, se presenta una síntesis del análisis de contenido realizado, a partir de los elementos de la Alfabetización estadística y de las Ideas Estocásticas

Fundamentales, respectivamente. Cabe aclarar que en la Tabla 2, no se incluyen las IEF sobre asociación y correlación y probabilidad, identificadas previamente porque en esta tarea no se ha tenido como objetivo poner en relación dichas ideas.

Elementos de la AE presentes en la tarea	Partes de la tarea				
	Parte I	Parte II	Parte III	Parte IV	Parte V
Elementos de conocimiento					
Habilidades de alfabetización	X	X	X	X	X
Conocimiento estadístico	X	X	X	X	X
Conocimiento matemático	X		X		X
Conocimiento del contexto	X	X	X		X
Habilidades críticas	X	X	X	X	X
Elementos disposicionales					
Creencias y actitudes	X	X	X	X	X
Postura crítica	X				X

Tabla 1: Fuente: adaptada de Bolatti y Tauber (2021)

Ideas estocásticas fundamentales presentes en la tarea	Partes de la tarea				
	Parte I	Parte II	Parte III	Parte IV	Parte V
Datos	X	X	X	X	X
Resúmenes		X			X
Variación			X	X	X
Distribución		X	X	X	X
Muestreo e Inferencia	X		X	X	X

Tabla 2: Fuente: elaboración propia

De lo expresado en la Tabla 1, se observa que las partes I y V de la tarea, son las que demandan mayor esfuerzo cognitivo debido a que se relacionan todos los elementos de la Alfabetización Estadística. En estas partes, se propicia la indagación sobre el tipo de muestreo que utiliza el INDEC para recolectar los datos y sobre su representatividad.

En la parte II es necesario que el estudiante les dé significado a algunos conceptos estadísticos para responder a las preguntas y se pone en juego su habilidad crítica para decidir sobre la conveniencia de usar otro tipo de representación para resumir la información.

En la parte III, se propicia el trabajo con otras representaciones y la transnumeración de la información que se presenta de manera textual, habilitando la alfabetización documental. En la pregunta vinculada al ingreso medio, se busca la reflexión sobre la necesidad de conocer alguna información complementaria (por ejemplo, la valoración del promedio según la variación de los datos y las características de la distribución).

En la parte IV, se presenta información basada en el cálculo de deciles, para ello se requiere de un conocimiento estadístico específico para realizar el análisis. Las preguntas habilitan la interpretación de un resumen tabular y la elaboración de conclusiones que exige cruzar información que deben buscar en documentos metodológicos. Todo ello permite interpretar el contexto y habilitar nuevas formas de alfabetización documental que requieren, además, integrar conocimientos previos.

En la parte V, se busca poner al estudiante en el lugar de un profesional crítico, que pueda decidir a partir de la información analizada, que tenga en cuenta el contexto y pueda comunicar conclusiones válidas.

El conocimiento estadístico está presente en todas las partes de la tarea, así como las creencias y actitudes. Esto último puede evidenciarse en la parte V, cuando se pide adoptar un rol de comunicador.

En lo referido a las ideas estocásticas fundamentales (Tabla 2), dado que esta tarea se centró en el análisis exploratorio de datos y de indicadores, habilitó la transnumeración entre distintos tipos de datos y de resúmenes. Se propició la IEF asociada al muestreo y la inferencia, a través de una postura crítica, que se hace necesaria para poder responder a las preguntas sobre la pertinencia del muestreo para realizar generalizaciones sobre todos los argentinos (Partes I, III, IV y V). Los datos están presentes en toda la tarea, el análisis de resúmenes y de distribución aparecen como ejes vertebradores de la tarea y la IEF de distribución surge asociada a la de variación.

Reflexiones finales

El análisis de contenido de la tarea permite mostrar diversas conexiones entre elementos del conocimiento estadístico con el contexto. Los conceptos estadísticos emergen del estudio de la distribución del ingreso de los argentinos y se propicia el análisis crítico de la información, tal como proponen Engel (2019), Engel *et al.* (2021) y Engel *et al.* (2022). Además, la tarea fomenta el trabajo con datos reales, textos enriquecidos y propicia la necesidad de indagar a partir de visualizaciones e informes metodológicos diversos que habilitan el carácter integrador de los conceptos estadísticos y, en suma, la postura desde distintos roles, tanto desde el análisis estadístico como en el marco de un comunicador, siguiendo sugerencias brindadas

por Gal (2019). Asimismo, se propicia una enseñanza de la Estadística que no se limite a la aplicación mecanizada de conceptos en la que prevalecen los cálculos por sobre la interpretación de la información y se amplía lo analizado en Bolatti y Tauber (2021).

Aunque aún no se ha implementado la tarea, queda el compromiso de hacerlo y de analizar las producciones de los estudiantes, de modo de obtener mayor información sobre el alcance real y práctico de la misma.

Reconocimiento

Al proyecto CAI+D 2020: Estudio exploratorio de las relaciones entre Cultura Estadística y Alfabetización Científica y Tecnológica en dispositivos didácticos basados en el enfoque STEAM. UNL.

Bibliografía

- Batanero, Carmen** (2023, 26 de enero). Sentido estocástico: su consideración en el currículo español. [Video de Youtube]. <https://www.youtube.com/live/A2gXo7Y-iRA?feature=share>
- Bertero, María Cecilia** (2022). *Exploración del tratamiento de distribuciones de datos en libros de texto de nivel superior* (trabajo final integrador de especialización). Universidad Nacional del Litoral. <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/handle/11185/5913>
- Bolatti, Fátima y Tauber, Liliana** (2021). Análisis de una tarea basada en el enfoque de la Estadística Cívica. En: L. Tauber, C. Vásquez Ortiz y J. Pinto Sosa. *Tendencias y nuevos desafíos de la investigación en Educación Estadística en Latinoamérica*, (pp. 146-154). Facultad de Humanidades y Ciencias. UNL.
- Burrill, Gail y Biehler, Rolf** (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana y Fernández, Elina** (2020). Educación estocástica para pensar estadísticamente. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(2), 89-109. <https://journals.uco.es/index.php/mes/article/view/12903/11745>
- Cohen, Louis y Manion, Lawrence** (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla.

- Engel, Joachim** (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Engel, Joachim, Ridgway, Jim, Weber Stein, Florian** (2021). Educación Estadística, Democracia y Empoderamiento de los Ciudadanos. *Paradigma*, 42(e1), 01-31. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p01-31.id1016>
- Engel, Joachim, Schiller, Achim y Martignon, Laura** (2022). Estadística Cívica en la formación de profesores de matemáticas. En: A. Salcedo y D. Díaz- Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 21-46). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule.
- Gal, Iddo.** (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Instituto Nacional de Estadística y Censos -INDEC-** (2023). *Evolución de la distribución del ingreso (EPH). Informes técnicos, V. 7, n°67. Trabajo e ingresos. Vol. 7, n° 4. Cuarto trimestre de 2022.*
- Nicholson, James, Gal, Iddo, y Ridgway, Jim** (2018). Understanding civic statistics: A conceptual framework and its educational applications. *A product of the ProCivicStat Project*. http://iase-web.org/islp/pcs/documents/Conceptual_framework_long.pdf?1543033025
- Pinto, Jesús, Tauber, Liliana, Zapata-Cardona, Lucía, Albert, Armando, Ruiz, Blanca, Mafokozi, Josep.** (2017). Alfabetización Estadística en la Educación Superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 227-235.
- Tauber, Liliana** (2022). Cultura Estadística para profesionales críticos. En J. Bernik, V. Baraldi, O. Lossio y V. Luna (Comps.), *Conversaciones entre la enseñanza y el campo didáctico* (pp. 73-91). Ediciones UNL.
- Tauber, Liliana** (2023). Análisis de una propuesta evaluativa a la luz de la Estadística Cívica. En M. Kistemann Junior y C. Giordano (Eds.), *Educacao Financeira. Olhares, incertezas e possibilidades V. 2* (pp. 211-238). Editora Akademy.

Representaciones de datos cuantitativos cruzados construidas por ingresantes de Psicología

MARIANO CASTELLARO

castellaro@irice-conicet.gov.ar

NADIA SOLEDAD PERALTA

nperalta@irice-conicet.gov.ar

JUAN MANUEL CURCIO

curcio@irice-conicet.gov.ar

MARÍA AGUSTINA TUZINKIEVICZ

tuzinkievicz@irice-conicet.gov.ar

Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IRICE-CONICET-UNR) /
Facultad de Psicología (UNR)

Resumen

Se analiza la construcción de representaciones de datos cuantitativos cruzados, en ingresantes de Psicología. Participaron 74 sujetos (edad, $M=20,35$; $DE=2,57$). La tarea proponía construir una tabla que vinculara las frecuencias de dos variables, sobre un conjunto primario de datos. También se compararon tres variaciones de la consigna básica: simple, con explicitación del formato esperado, con explicitación del formato esperado y un diagrama de barras adicional. Predominaron las producciones tabulares, específicamente, de recuentos de frecuencias. A su vez, éste prevaleció en la condición sin información adicional. Los hallazgos se discuten a la luz de antecedentes referidos a niveles educativos previos y similares. También se reflexiona sobre el valor de la alfabetización estadística en carreras sociales, como es el caso de la Psicología.

Palabras clave: alfabetización estadística / tablas / sistemas externos de representación / universidad

Introducción

El estudio de las tablas y gráficos ha sido objeto de interés para la investigación educativa (Estrella *et al.*, 2018). Éstos constituyen recursos necesarios para la vida en sociedad (Engel, 2019; Estrella y Estrella, 2020) y para la formación del pensamiento. Desde una mirada psicológica (Martí, 2009), han sido entendidos como sistemas externos de representación, que poseen una materialidad y especificidad inherentes, incluso irreducibles a los procesos cognitivos internos de referencia. Esto implica pensarlos como auténticas herramientas y soportes de los procesos psicológicos superiores (Pérez Echeverría *et al.*, 2010; Pozo, 2017), lo que trasciende una mera función de facilitación.

Desde el nivel educativo primario, interpretar, construir, usar y/o comunicar información estadística es un elemento relevante en los programas. Ello implica la formación de una ciudadanía estadística o estadística cívica (Engel, 2019; Gal, 2002; Geiger *et al.*, 2023). Dicha relevancia también se presenta en el nivel universitario, y no solo en relación a carreras tradicionalmente enmarcadas como “exactas-naturales”, sino también con aquellas consideradas como “humanísticas-sociales”.

En este trabajo en particular, el foco está puesto en estudiantes ingresantes de la carrera de Psicología. La representación del conocimiento a través de sistemas gráficos, como pueden ser las tablas y diagramas cartesianos, constituye un aspecto de relevancia dentro la ciencia psicológica (Pérez Echeverría *et al.*, 2010). Ello alcanza su máxima expresión en el propio proceso de investigación, especialmente en el procesamiento de datos y/o comunicación de resultados.

En los últimos años, nuestro grupo de investigación ha desarrollado estudios sobre la comprensión y construcción de tablas de frecuencias, pero en estudiantes de sexto y séptimo grado de primaria (Castellaro *et al.*, en prensa; 2023; Castellaro y Roselli, 2019, 2020). Una de las principales conclusiones de tales estudios fue que, más allá de las variables sociales y cognitivas mediadoras, la comprensión y producción de dichos sistemas son procesos complejos y desafiantes. Incluso, estas dificultades se observan independientemente del nivel educativo, por ejemplo, entre primaria y secundaria (Gabucio *et al.*, 2010; Martí *et al.*, 2011). Ahora bien, ¿qué ocurre con estos procesos en el ingreso a la universidad, más particularmente, en carreras sociales como Psicología? ¿Cómo se puede entender a la alfabetización es-

tadística en este sentido? Este tipo de interrogantes están en la base de algunos ejes de nuestras investigaciones actuales. Si bien es innegable que buena parte de la formación psicológica en las universidades argentinas se basa en textos escritos (por ejemplo, libros o ensayos), las preguntas anteriores encuentran legitimación por su relación con la formación específica en investigación en Psicología, es decir, en asignaturas de metodología de la investigación, psicometría y afines, que también forman parte de la currícula. En tal sentido, se considera que este tipo de habilidades son competencias fundamentales en la formación de cualquier carrera universitaria, basada en el pensamiento científico.

En este trabajo, nos enfocamos en estudiar la construcción de sistemas representacionales estadísticos, específicamente, de tablas de contingencia, en ingresantes de la Carrera de Psicología. La literatura predominante se centró en la comprensión de tablas (por ejemplo, Cañadas, 2013, o García-García *et al.*, 2019, en educación universitaria), pero mucho menos en su construcción. Un antecedente central, que inspira directamente esta presentación, es Martí *et al.* (2011). Dicha investigación, si bien estuvo referida a estudiantes de sexto y séptimo grado, sentó las bases para pensar teóricamente diferentes tipos de producciones para el ordenamiento de datos cruzados (se detalla en marco teórico). Pallauta *et al.* (2021; 2022b) también analizaron la construcción de tablas en estudiantes españoles de nivel secundario. Por ejemplo, éstos debían interpretar un diagrama de barras que reportaba información sobre el sexo y tipo de deporte preferido de un grupo de casos. En base a esa información, los estudiantes debían cargar las frecuencias absolutas cruzadas correspondientes en las celdas de un sistema tabular predefinido. Sin embargo, en dicho antecedente, lo que se entiende como “construcción” es un proceso que ocurre sobre un formato tabular de base (filas, columnas y celdas) aportado por la propia consigna de la tarea. En este caso, el foco está en analizar, por ejemplo, la traducción de los datos presentes en un gráfico hacia una tabla, en forma de valores de frecuencia, pero no la creación del formato base como se pretende incluir en el presente estudio. En cambio, en el trabajo aquí presentado, interesa especialmente captar la producción “espontánea” o “desde cero” del sistema, incluyendo al propio formato de base. Por tal motivo, tiene sentido, por ejemplo, diferenciar producciones tipo lista o tablas (Martí *et al.*, 2011), como se plantea a continuación.

Marco teórico

Listas y tablas estadísticas. Martí *et al.* (2011) y Estrella y Estrella (2020) identificaron dos formatos principales en la producción de sistemas de ordenamiento de datos cuantitativos: listas y tablas. Desde esta perspectiva, una lista se caracteriza por presentar información en una manera secuencial y lineal; enumera una serie de elementos; éstos se organizan en base a una única dimensión espacial, que puede ser horizontal (por ejemplo, dividiendo los elementos con comas o guiones) y/o vertical (por ejemplo, con guiones verticales). Por su parte, el objeto “tabla” presenta información en una manera combinada o cruzada; no enumera sino que combina valores de recuento de categorías; se organiza en base a la combinación de las dimensiones horizontal y vertical; implica un mayor nivel de selección y síntesis que la lista. Este criterio es la base de la categorización propuesta en este trabajo (Cfr. “Análisis de las producciones”).

El concepto de tabla estadística refiere a una estructura gráfica rectangular bidimensional, integrada por filas y columnas, que permite representar los datos de una o más variables, y/o la relación entre éstas (Estrella, 2014). Dentro de esta generalidad, Lahanier-Reuter (2006), luego Pallauta *et al.* (2022a) diferencian tres sub-tipos: (a) tablas de datos, coincidente con la noción clásica de matriz de datos; (b) tabla univariada, representa los valores de frecuencia de cada modalidad; (c) la tabla de doble entrada o de contingencia, representa la relación cruzada entre las frecuencias de dos variables, en general, categóricas. Las modalidades de una variable se cargan en el sentido de las filas y los de la otra en el sentido de las columnas. Las celdas contienen los valores de frecuencia resultantes del cruce de ambas variables. Además, contiene celdas marginales con los totales de frecuencia. Este último tipo es que el interesa especialmente en esta presentación. Éstas últimas son el foco de interés del trabajo.

Alfabetización estadística y pensamiento transnumerativo. Particularmente, entendemos a la lectura, interpretación y construcción de tablas estadísticas (Gea *et al.*, 2022; Pallauta *et al.*, 2023) como una dimensión del concepto global de alfabetización estadística (Callingham y Watson, 2017; Watson, 2009; Watson y Callingham, 2003). Las tablas sirven como herramientas efectivas para resumir, organizar, comunicar y analizar datos (Estrella *et al.*, 2018; Garfield y Gal, 1999; Pallau-

ta *et al.*, 2022a). También, este proceso es entendido como una dimensión del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999), referida específicamente a la transnumeración de datos, es decir, la representación de éstos en niveles de mayor complejidad y/o de mayor precisión o síntesis (Chick, 2004; Chick *et al.*, 2005).

Chick (2004) identificó una serie de técnicas transnumerativas. Las principales son: (a) clasificación: los datos se organizan según un criterio (no surgen nuevas variables); (b) agrupación: los datos se agrupan según un criterio, como intervalos de clase (esto genera una nueva variable derivada de la original); (c) selección de subconjunto: se elige un subconjunto específico de datos para una transnumeración adicional; (d) cambio de tipo de variable: una variable numérica se presenta en términos categóricos, o una categoría se presenta en términos numéricos u ordinales; (e) cálculo de frecuencias: se determinan las frecuencias de categorías o valores de una variable (las frecuencias pueden considerarse como una nueva variable); (f) cálculo de proporciones: frecuencias en relación con un todo, creando una nueva función variable; (g) graficación: se grafican o tabulan algunas o todas las variables (en la forma actual).

Objetivo del trabajo. El objetivo principal del trabajo es analizar los sistemas representacionales construidos por estudiantes ingresantes de Psicología, como formas de ordenamiento de datos cuantitativos. Esto se estudia en el marco de una consigna que explícitamente solicita la construcción de una tabla que vincula las frecuencias de dos variables, presentes en un conjunto mayor de datos. A su vez, como objetivo secundario, se consideran las producciones en dos variaciones adicionales a la consigna básica. En un caso, se analiza si agregar en la consigna un apartado que explicita el formato convencional esperado para una tabla de contingencia facilita producciones más avanzadas. En el otro caso, a lo anterior también se le agrega un diagrama de barras adicional que ya aporta un primer ordenamiento gráfico de los valores de frecuencia cruzados entre las dos variables a resumir (García Milá *et al.*, 2014).

Metodología

Participantes. Participaron 74 estudiantes de primer ($n=23$) y segundo ($n=45$) año de Psicología de la Universidad Nacional de Rosario ($n=6$ omitieron

informar ese dato). La edad promedio era de 20,35 años ($DE=2,57$), con predominancia de mujeres (86%). Durante la carrera universitaria, los estudiantes no habían trabajado formalmente en contenidos de estadística, aunque no se contó con este dato en el caso de su formación secundaria previa. Se trató de un muestreo no probabilístico por disponibilidad.

Materiales y procedimientos. Los participantes dieron su consentimiento informado. La tarea utilizada fue adaptada de Martí *et al.* (2011). La consigna inicial proponía: “La siguiente lista presenta los datos de un grupo de estudiantes que asisten a una escuela. Con esos datos **CONSTRUYE UNA TABLA** que muestre cuántos estudiantes de sexto grado y cuántos estudiantes de séptimo grado miden menos de 130 cm. de altura, cuántos miden de 130 a 149 cm., cuántos miden de 150 a 169 cm., y cuántos miden más de 169 cm”. Ese conjunto primario de datos estaba ordenado en forma de lista, integrada por 25 estudiantes. En relación a cada caso se especificaba: número ordinal dentro de la lista, nombre y apellido, grado escolar, edad y altura (Imagen 1).

	Nombre	Apellido	Grado	Edad	Altura
1	Ana	Aliaga	Sexto	11 años	126 cm.
2	Pablo	Blanco	Sexto	13 años	170 cm.
3	Ismael	Jiménez	Sexto	12 años	165 cm.
4	Oriana	García	Séptimo	13 años	171 cm.
5	Marta	Fernández	Sexto	12 años	154 cm.
6	Fátima	García	Sexto	12 años	148 cm.
7	Lucas	De los Santos	Sexto	12 años	172 cm.
8	Miguel	Gisbert	Séptimo	13 años	173 cm.
9	Andrés	Guillén	Sexto	12 años	156 cm.
10	Marcelo	Molero	Sexto	12 años	147 cm.
11	Nuria	Gómez	Séptimo	12 años	157 cm.
12	Silvia	Cano	Séptimo	12 años	165 cm.
13	Morena	Martín	Sexto	12 años	142 cm.
14	Juan	Planas	Sexto	11 años	134 cm.
15	Aldana	Grisales	Séptimo	12 años	146 cm.
16	Enrique	Molina	Séptimo	12 años	141 cm.
17	Eva	Molina	Sexto	11 años	128 cm.
18	Alicia	Moreno	Sexto	12 años	151 cm.
19	Víctor	Paredes	Séptimo	12 años	167 cm.
20	Sara	Peiro	Sexto	11 años	144 cm.
21	Joana	Martínez	Séptimo	12 años	134 cm.
22	Julia	Romero	Sexto	12 años	139 cm.
23	Francisco	Sánchez	Séptimo	12 años	149 cm.
24	Antonio	Toledo	Séptimo	13 años	160 cm.
25	Sergio	Vega	Séptimo	12 años	155 cm.

Imagen 1: Conjunto de datos primarios a ordenar (tomado de Martí *et al.*, 2011). Fuente: Elaboración propia

A partir de esta consigna general, se analizaron tres variaciones. La primera ($n=24$) fue similar a la planteada en el párrafo previo, sin agregar elemento adicional. En la segunda ($n=24$) se agregó una explicitación acerca del formato convencional (estructura y organización) que se espera *culturalmente* para una tabla de doble entrada. Dicha explicitación era: “(!) *PARA TENER EN CUENTA... Recuerda que una TABLA (como la que debes construir) permite ordenar la información en filas (horizontales) y columnas (verticales). La combinación de esas filas y columnas forman celdas o espacios, que te mostrarán cuántos estudiantes de cada grado miden determinada altura*”. Finalmente, la tercera variación de la actividad ($n=26$) implicó dos elementos adicionales: la explicitación del formato convencional de una tabla de doble entrada (similar a la condición 2), más el agregado de un diagrama de barras adicional que ya presentaba un ordenamiento de los datos acorde a lo requerido en la consigna (Imagen 2).

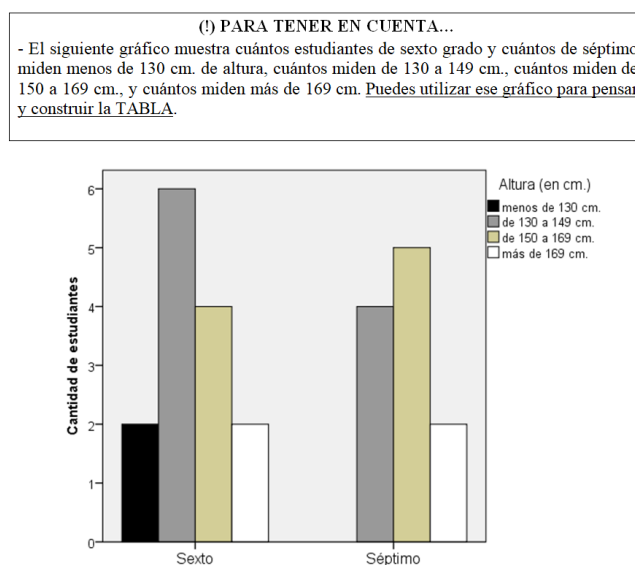


Imagen 2: Gráfico de barras como información adicional (condición 3). Fuente: Elaboración propia

Análisis de las producciones

Las producciones se categorizaron a partir de una adaptación de Martí *et al.* (2011). Se identificaron dos tipos principales de producción, listas y tablas, sumado a otras categorías complementarias.

Lista reproducción (LR). Reproducción literal de la lista original de datos que integra la consigna.

Lista ordenada según curso (LC). Ordenamiento de los casos según una única dimensión (horizontal o vertical), sin un intento de tabulación cruzada y diferenciados según el grado escolar (sexto o séptimo).

Lista ordenada según altura (LA). Ordenamiento de los casos según una única dimensión (horizontal o vertical), sin un intento de tabulación cruzada y diferenciados según intervalos de altura.

Lista ordenada según curso e intervalos de altura (LCA). Ordenamiento de los casos según una única dimensión (horizontal o vertical), sin un intento de tabulación cruzada y diferenciados según altura y grado escolar.

Tabla cruzada con nombres (TN). La información se presenta en celdas, resultantes del cruce de intervalos de altura y grado escolar. Sin embargo, éstas contienen los nombres de los casos y no un valor de frecuencia o recuento de resumen.

Tabla de frecuencias cruzadas (TF). La información se presenta en celdas, resultantes del cruce de intervalos de altura y grado escolar. Éstas contienen valores de frecuencia o recuento, como resumen de casos (tabla convencional de doble entrada).

Gráfico (G). El formato del sistema producido corresponde con un diagrama de barras o gráfico de torta.

Otro (O). El criterio de ordenamiento utilizado para producir el sistema no coincide con las categorías propuestas, o no es identificable.

No respuesta (NR). Tarea sin realizar o de incipiente producción (inconclusa).

Resultados

En general, cerca de la mitad del total de producciones (40,5%) correspondieron a Tablas cruzadas, predominando aquellas basadas en recuentos de frecuencias (26 de 30). Además, otros dos formatos con una presencia marcada fueron Gráfico (24,3%) y Listas ordenadas por curso (17,6%). El resto de las producciones se observaron con menor frecuencia, mostrando distribuciones más o menos similares entre sí.

Ahora bien, si se considera las producciones al interior de las tres variaciones de la tarea, se observan asociaciones descriptivas específicas (Imagen 3).

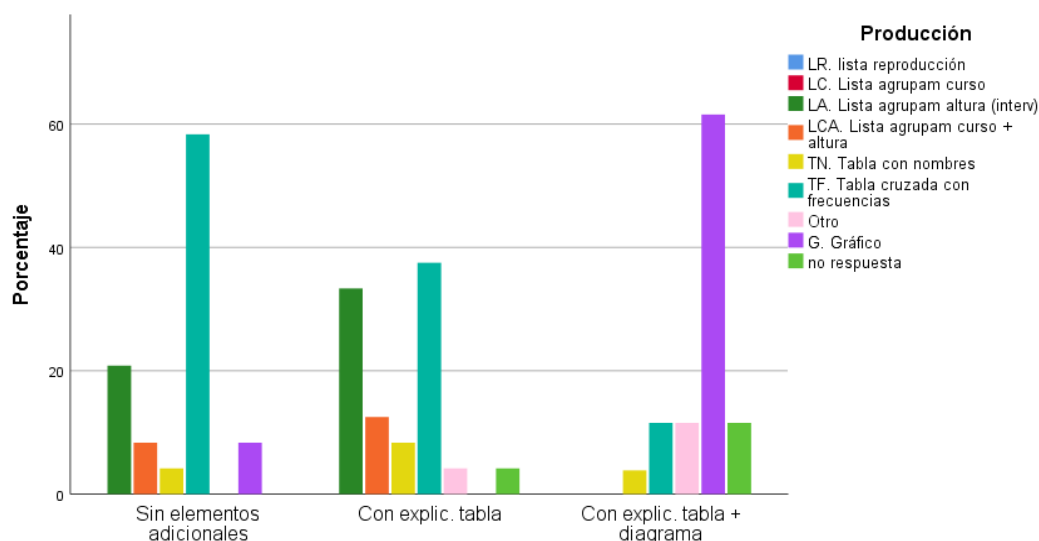


Imagen 3: Proporción de tipos de producciones en las tres variaciones de la actividad (porcentajes al interior de cada condición). Fuente: Elaboración propia

La mayor proporción de tablas cruzadas de frecuencias se observó en la condición 1 (58,3%), seguido por la condición 2 (37,5%) y finalmente por la condición 3 (11,5%). Esta tendencia se mantiene si se suman las producciones tabulares basadas en casos particulares (no en frecuencias): 62,5%, 45,8% y 15,3% respectivamente.

Por su parte, fue marcada la proporción de producciones en formas de gráfico o diagrama en la condición 3, en la que precisamente se aportaba este tipo de facilitación como parte de la consigna.

En cuanto a los formatos en forma de lista (basados en una única dimensión espacial), en la condición 2 predominaron los basados en intervalos de altura y/o en la combinación entre éstos y curso. Sin embargo, esta mayor proporción, en comparación con las condiciones restantes, fue menos marcada que en los formatos analizados previamente (por ejemplo, tabulares o gráficos).

Vale aclarar que, si bien estas asociaciones registraron valores significativos según la prueba chi cuadrado ($[X^2(12)=49,04, p<0,001]$, esto no se tuvo en cuenta por incumplimiento de supuestos básicos (por ejemplo, más de 25% de las casillas registran frecuencias esperadas menores que 5), incluyendo la no aleatoriedad de la muestra. Por lo tanto, el criterio básico de análisis fue descriptivo.

Discusión y conclusiones

El objetivo principal del trabajo fue analizar los sistemas representacionales construidos por estudiantes ingresantes de Psicología, como formas de ordenamiento de datos cuantitativos. Esto se consideró en el marco de una consigna que explícitamente solicita la construcción de una tabla que vincule las frecuencias de dos variables, presentes en un conjunto mayor de datos.

El hallazgo más importante fue la predominancia general de formatos categorizables como tablas de contingencia en sentido estricto. Esto es, una producción que implica diferentes técnicas transnuméricas (Chick, 2004), incluso las más avanzadas como la transformación de casos en valores de frecuencias. Si bien el estudio refiere a educación superior, los antecedentes disponibles relativos a nivel primario y secundario anunciaban importantes dificultades para acceder a este tipo de producción, predominando los formatos tipo lista (Castellaro *et al.*, en prensa; Martí *et al.*, 2011). Además, debe considerarse que se trata de estudiantes de una carrera social (Psicología), que podría sugerir una mayor dificultad en este aspecto, lo cual no condice con lo hallado. Por todo esto, podría considerarse que el nivel general de producción fue avanzado.

Por otro lado, también resultan interesantes las diferentes producciones observadas según la variación de la tarea. Contrariamente a lo esperado, la mayor proporción de tablas de contingencia se dio en la condición simple, sin facilitaciones. Se suponía que explicitar en la consigna el formato culturalmente esperado para una tabla de doble entrada (condición 2), o aportar un ordenamiento gráfico inicial de las variables a clasificar (condición 3), incrementaría este tipo de formatos. Sin embargo, en el primer caso, predominaron las producciones tipo lista, lo cual no termina de comprenderse con claridad. En el caso del segundo, la predominancia de producciones en forma de gráfico podría entenderse como una especie de efecto de “influencia perceptual”, y no de facilitación, en el sentido de que la producción final termina reproduciendo dicho recurso, en lugar de lo solicitado en la consigna (construir una tabla que vincule las frecuencias de las dos variables en cuestión).

El trabajo permitió una aproximación general a un aspecto particular de la alfabetización estadística de ingresantes de Psicología, aunque –por supuesto– con sus limitaciones. Entre muchos aspectos, cabe mencionar que la asignación de los

casos a cada variación de la tarea no fue aleatoria sino por disponibilidad; por su parte, sería importante evaluar previamente la habilidad o competencia matemática específica, incluidos los trayectos de formación secundaria, como variable interviniente en este sentido. Más allá de ello, se considera que la relevancia de este tipo de estudios radica en intentar profundizar en un aspecto poco atendido en el marco de las carreras “sociales”, como es la alfabetización estadística, indispensable para la propia formación universitaria, como para fomentar ciudadanos y profesionales críticos (“estadística cívica”) para la vida en sociedad. En esa dirección apuntan los próximos trabajos.

Bibliografía

- Callingham, Rosemary y Watson, Jane** (2017). The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 181-201.
- Cañadas, Gustavo, Batanero, María del Carmen, Gea, María Magdalena y Contreras, José Miguel** (2013). Comprensión de frecuencias asociadas a las tablas de contingencia por estudiantes de Psicología. *Uni-pluri/versidad*, 13(3), 97-108.
- Castellaro, Mariano, Peralta, Nadia y Curcio, Juan Manuel** (2023). Competence symmetry in peer collaboration: A micro-sequential approach. *European Journal of Psychology of Education*. Advance online publication.
- Castellaro, Mariano, Peralta, Nadia, Tuzinkievicz, María Agustina y Curcio, Juan Manuel** (en prensa). Between lists and tables: In what ways sixth and seventh grade students represent quantitative data? *Journal for the Study of Education and Development / Infancia y Aprendizaje*
- Castellaro, Mariano y Roselli, Néstor** (2019). Simetría-asimetría cognitiva y afinidad socioafectiva en la comprensión colaborativa de tablas de frecuencias. *Liberabit*, 25(2), 213-231.
- Castellaro, Mariano y Roselli, Néstor** (2020). Comprensión individual y diádica de tablas de frecuencias en alumnos de escolaridad primaria. *Pensamiento Psicológico*, 18(1), 57-70.
- Chick, Helen** (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*, 167-174.
- Chick, Helen, Pfannkuch, Maxine y Watson, Jane** (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. *Curriculum Matters*, 1, 87-108.

- Engel, Joachim** (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Estrella, Soledad** (2014). El formato tabular: Una revisión de literatura. *Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23.
- Estrella, Soledad, Olfos, Raimundo, Vidal-Szabó, Pedro, Morales, Sergio y Estrella, Patricia** (2018). Competencia metarepresentacional en los primeros grados: Representaciones externas de datos y sus componentes. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 143-163.
- Estrella, Soledad y Estrella, Patricia** (2020). Representaciones de datos en estadística: De listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(1), 21-34.
- Gabucio, Fernando, Martí, Eduardo, Enfedaque, Jesús, Gilabert, Sandra y Konstantinidou, Aikaterini** (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Infancia y Aprendizaje*, 22(2), 183-197.
- Gal, Iddo** (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51.
- García-García, Jaime, Imilpán Rivera, Isaac, Arredondo, Elizabeth y Fernández Coronado, Nicolás** (2019). Comprensión de una tabla estadística por estudiantes universitarios en México y Chile. *REVEMAT*, 14, 1-16.
- García-Milá, Mercé, Martí, Eduardo, Gilabert, Sandra y Castells, Marina** (2014). Fifth through Eighth grade students' difficulties in constructing bar graphs: Data organization, data aggregation, and integration of a second variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 201-233.
- Gea, María Magdalena, Pallauta, Jocelyn, Batanero, María del Carmen y Valenzuela-Ruiz, Silvia** (2022). Statistical tables in Spanish primary school textbooks. *Mathematics*, 10, 2809.
- Geiger, Vince, Gal, Iddo y Graven, Mellony** (2023). The connections between citizenship education and mathematics education. *ZDM—Mathematics Education*, 55, 923–940.
- Lahanier-Reuter, Dominique** (2006). Listes et tableaux: Mise en perspective. *Pratiques*, 131-132, 174-186.
- Martí, Eduardo** (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. Pérez y E. Teubal (Eds.), *Representational Systems and Practices as Learning Tools* (pp. 133-148). Sense Publishers.
- Martí, Eduardo, García-Milá, Mercé, Gabucio, Fernando y Konstantinidou, Katerina** (2011). The construction of a double-entry table: A study of primary and

secondary school students' difficulties. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 215-234.

Pallauta, Jocelyn, Arteaga, Pedro y Garzón-Guerrero, José (2021). Secondary school students' construction and interpretation of statistical tables. *Mathematics*, 9, 3197.

Pallauta, Jocelyn, Arteaga, Pedro, Gea, María Magdalena y Begué, Nuria (2022a). Understanding statistical tables: a survey of research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 38(2).

Pallauta, Jocelyn, Batanero, María del Carmen y Gea, María Magdalena (2023). Un instrumento para evaluar la comprensión de tablas estadísticas en educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(3), 89-112.

Pallauta, Jocelyn, Gea, María Magdalena, Batanero, María del Carmen y Arteaga, Pedro (2022b). How secondary school students build frequency tables? *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. hal-03751840

Pérez-Echeverría, María Puy, Postigo, Yolanda y Marín, Cristina (2010). Las habilidades gráficas de los estudiantes universitarios: ¿cómo comprender las gráficas los estudiantes de Psicología? *Cultura y Educación*, 22(2), 215-229.

Pozo, Juan Ignacio (2017). Aprender más allá del cuerpo: De las representaciones encarnadas a la explicitación mediada por representaciones externas. *Infancia y Aprendizaje*, 40(2), 219-276.

Watson, Jane (2009). The development of statistical understanding at the elementary school level. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 89-109.

Watson, Jane y Callingham, Rosemary (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46.

Wild, Chris, y Pfannkuch, Maxine (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

Eje 6. Educación estadística

Reflexiones y experiencias para el aula

¿Qué ves cuando me ves? Propuesta de enseñanza de estadística descriptiva

CECILIA DE CORTAZAR

cecilia.decortazar@ing.unlp.edu.ar

ANYELEN DI PAOLANTONIO

adipaolantonio@bba.unlp.edu.ar

MARÍA VALERIA CALANDRA

maria.calandra@ing.unlp.edu.ar

UIDET GAMEFI, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (UNLP)

Resumen

Se presenta el desarrollo de una actividad de extensión llevada a cabo por docentes de la Facultad de Ingeniería de la UNLP en un curso de una escuela de enseñanza media, donde se abordan temas de probabilidades y estadística. En esta propuesta, se realizó un análisis estadístico descriptivo de una base de datos, utilizando la Paradoja de Simpson como recurso didáctico. La experiencia generó una discusión sobre la importancia del análisis estadístico riguroso y sus implicaciones en la interpretación de los datos. Se resaltó el papel de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el aprendizaje de la estadística para profundizar en los métodos estudiados en clase. Esta actividad ilustra cómo el uso adecuado de gráficos estadísticos es fundamental no solo para comunicar, sino también para analizar un conjunto de datos.

Palabras clave: estadística descriptiva / paradoja de Simpson / software R / aplicaciones móviles

Introducción

La propuesta que se describe se llevó a cabo como parte de una actividad de extensión de docentes de la cátedra de Probabilidades y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Este proyecto fue diseñado para ser implementado en el Colegio Nacional Rafael Hernández (pregrado), que también depende de la UNLP, con 60 estudiantes (divididos en dos comisiones) de sexto año que cursan una materia optativa llamada "Big Data", la cual abarca temas de estadística. El propósito educativo de esta actividad fue fortalecer las habilidades de pensamiento analítico y crítico de los estudiantes, fomentando la toma de decisiones fundamentadas en el análisis estadístico. A menudo, estas decisiones pueden verse influenciadas por interpretaciones incorrectas de los datos o por la omisión de variables importantes que podrían ser significativas en la situación analizada. El pensamiento crítico se caracteriza por ser, según Ennis:

Un pensamiento racional y reflexivo interesado en qué hacer o creer acerca de algo (Ennis, 1985, p. 44)

Para desarrollar este tipo de pensamiento, coincidimos con Contreras y otros (2012) en que:

Una herramienta didáctica posible es utilizar algunas de las paradojas clásicas para crear situaciones didácticas que sirvan para enfrentar a los estudiantes con sus intuiciones incorrectas y hacerlas evolucionar en forma positiva. (Contreras y otros, 2012, p. 1)

La enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y la estadística en la educación secundaria puede proponer desafíos interesantes para fomentar el razonamiento analítico, crítico y deductivo de los y las estudiantes además de ser una herramienta muy útil para conectar los conocimientos escolares con la vida cotidiana. Por otro lado, las oportunidades que nos ofrece la tecnología en la actualidad permiten que las propuestas abordadas en el aula requieran menos cálculos, lo que potencia el análisis de la situación. En este sentido, consideramos que nuestra labor es diseñar actividades que fomenten la lectura y el análisis de la información estadística disponible en Internet, entre otras opciones.

En este caso, se optó por utilizar la Paradoja de Simpson, también conocida como efecto Yule-Simpson, como recurso didáctico. Este fenómeno refiere a la situación en la cual una tendencia observada en varios grupos de datos desaparece cuando se combinan estos grupos con otra variable, surgiendo en su lugar una tendencia opuesta. Este efecto contradictorio fue descubierto por Simpson (Simpson, 1951) y ha sido ampliamente estudiado en el contexto de la toma de decisiones (Maronna, 2021, Pearl, 2000) y en la investigación médica (Bonovas y Piovani, 2023). En el ámbito de la enseñanza de la estadística, la Paradoja de Simpson puede utilizarse para discutir diversos temas (Maronna, 2021, Bickel y otros, 1975).

Metodología

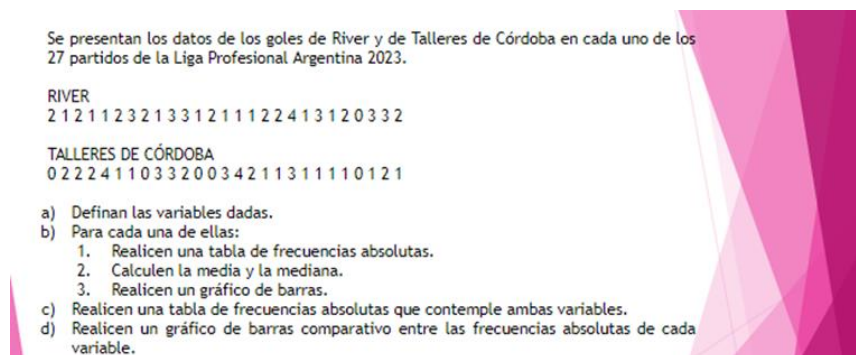
Para el trabajo con la paradoja, en este caso, se decidió abordar parte del estudio propuesto por Taylor y Mickel (2014) en el cual se utilizó un base de datos reales del Departamento de Servicios de Desarrollo del estado de California responsable de asignar fondos que apoyan a más de 250.000 residentes con discapacidades (denominados "consumidores"). La base de datos consta de 1.000 de estos consumidores con la siguiente información: número de seguro social, edad, edad dividida en cohortes, género, origen; y los datos del gasto que le insume al Estado cada consumidor, es decir, el monto anual en dólares que el mismo gasta en cada consumidor para apoyar a estas personas y sus familias.

La actividad se planificó para llevarse a cabo en dos encuentros con los estudiantes, cubriendo un total de 6 horas cátedra. Para el análisis descriptivo de la base de datos, se utilizó la aplicación para dispositivos móviles y web: Run R Script - Online Statistical Data Analysis - Version 1.1 Build 226-208 – Android (Liila Tech, 2018). La misma está disponible para descargar en dispositivos móviles con sistemas operativos Android 13.0 e iOS y/o se puede utilizar desde la web (www.rcommand.com) para cualquier sistema operativo. Esta aplicación proporciona a cada usuario una cuenta en la nube, lo que permite ejecutar el software sin necesidad de tenerlo instalado localmente, facilitando así el trabajo en tiempo real y permite programar usando el lenguaje R versión 3.5.2. Posee un entorno de desarrollo integrado (IDE) en línea, el cual incluye una consola, un editor de código que admite la ejecución directa del mismo, así como herramientas, archivos de datos

definidos por el usuario y almacenamiento de código en la nube. Este software genera una cuenta en la nube para cada usuario, donde se almacenan los códigos que desee el mismo, con el fin de ser compartidos con los usuarios mediante diferentes métodos (redes sociales, email, etc.). Se propone, en este caso, compartir con los alumnos en el aula la base de datos mediante un código QR que “encripte” el link a la dirección web a la misma en forma directa, para luego poder trabajar en línea sobre la misma.

Desarrollo de la actividad

Dado que, hasta el momento en el curso regular, los estudiantes solo habían realizado representaciones gráficas o análisis descriptivos de datos de forma manual o utilizando hojas de cálculo Excel en las computadoras proporcionadas por la institución, el objetivo del primer encuentro fue familiarizarse con el uso del lenguaje de programación R a través de la aplicación Run R Script. Para ello, se les presentó una breve actividad que involucraba un conjunto de datos sobre los resultados reales de los partidos de River y Talleres de Córdoba en la Liga Profesional Argentina del año 2023 (ver Imagen 1). Estos datos ya habían sido analizados sin el uso de la aplicación en clases anteriores por los profesores de la materia. En principio, se presentaron los datos de los goles en cada uno de los 27 partidos, así como los pasos de la actividad previamente realizada en clase sin el uso de Run R Script (ver Imagen 1).



Se presentan los datos de los goles de River y de Talleres de Córdoba en cada uno de los 27 partidos de la Liga Profesional Argentina 2023.

RIVER
2 1 2 1 1 2 3 2 1 3 3 1 2 1 1 1 2 2 4 1 3 1 2 0 3 3 2

TALLERES DE CÓRDOBA
0 2 2 2 4 1 1 0 3 3 2 0 0 3 4 2 1 1 3 1 1 1 1 0 1 2 1

- Definan las variables dadas.
- Para cada una de ellas:
 - Realicen una tabla de frecuencias absolutas.
 - Calculen la media y la mediana.
 - Realicen un gráfico de barras.
- Realicen una tabla de frecuencias absolutas que contemple ambas variables.
- Realicen un gráfico de barras comparativo entre las frecuencias absolutas de cada variable.

Imagen 1: Enunciado de la actividad del Primer Encuentro

Para resolver esta propuesta, se empleó el lenguaje de programación R a través del sitio web <https://rcommand.com/main.html>. Se proporcionó a los estudiantes un código QR que los dirigía al sitio donde ya se habían cargado los datos para su lectura con R. En la parte a) de la actividad 1, se les pidió que definieran con palabras las variables aleatorias y determinen si eran variables aleatorias continuas o discretas. Para la parte b) 1) y 2), se les proporcionó una presentación que detallaba los pasos a seguir, de modo que pudieran implementar los comandos necesarios para crear una tabla de frecuencias absolutas en sus dispositivos móviles, así como calcular las medidas de tendencia central trabajadas en clase, como la media y la mediana. Luego, se procedió a explicar cómo crear un gráfico de barras para cada muestra por separado. También se abordó la forma de realizar un diagrama de barras simultáneo que permitiera comparar el comportamiento de ambos equipos a partir de la construcción de una tabla de frecuencias absolutas de ambos equipos. Por último, se les solicitó que compartieran sus producciones con la aplicación a través de una casilla de mail desde la aplicación.

En el segundo encuentro, se procedió a trabajar con la muestra del Departamento de Servicios de Desarrollo del estado de California, brindando a los estudiantes la oportunidad de asumir el rol de "investigadores". Esto implicó formular hipótesis, analizar los datos y llegar a conclusiones que pudieran ser ajustadas a medida que avanzaban en el proceso. Inicialmente, se presentó un gráfico de barras que ilustraba el gasto medio anual en dólares que cada grupo de consumidores origina al estado de California (ver Imagen 2). La información publicada oportunamente generó una denuncia por discriminación étnica por parte de los consumidores, en especial por los individuos de origen hispano que representaban aproximadamente un 40% de los individuos.

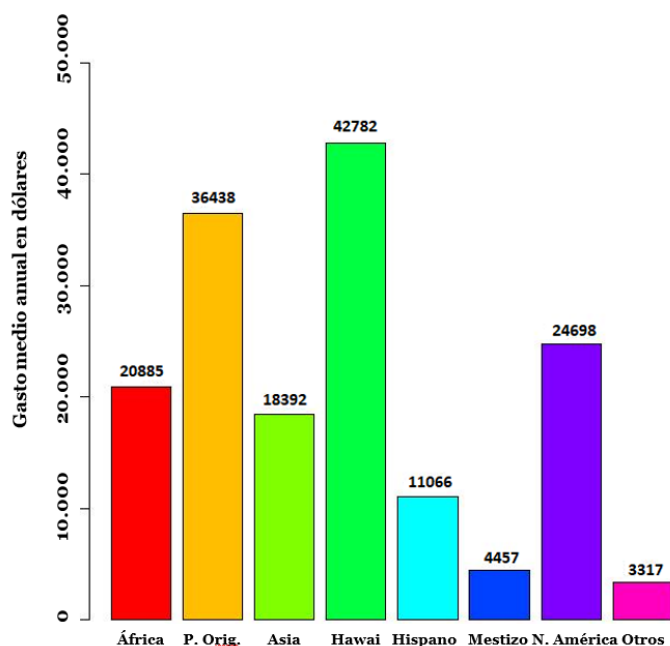


Imagen 2: Reproducción del gráfico publicado por el estado de California

Después de mostrar el gráfico, se les planteó a los estudiantes dos preguntas: ¿Qué comunidades tienen asignados los mayores gastos medios? y ¿Consideran que algunas comunidades podrían estar siendo favorecidas por el estado?

Del análisis del gráfico se deduce que hay algunas comunidades a las que el estado asigna mayores recursos medios. A partir de las respuestas obtenidas, se les propuso realizar un análisis más detallado utilizando otra variable disponible en la base de datos. El objetivo era poder explicar, corroborar o refutar las acusaciones de discriminación étnica dirigidas contra el estado de California. La planificación de la actividad incluía guiar a los estudiantes en el cálculo de otras medidas descriptivas de la muestra, así como en la creación de tablas de distribución de frecuencias y otros gráficos de barras para profundizar en el análisis. Surgieron algunas preguntas durante este proceso, como: ¿cuál es la cantidad de individuos de cada etnia?, ¿Cuál es la proporción de individuos de cada etnia? y ¿cuál es el porcentaje de individuos por etnia?

Como soporte pedagógico para responder estos interrogantes con el software, se les proporcionó un documento con un código QR que les dirigía a la base de datos completa llamada "obs" en el script de la aplicación, junto con una guía sobre cómo crear los gráficos necesarios (ver Imágenes 3 y 4).



Imagen 3: Código QR que contiene las etnias de cada consumidor

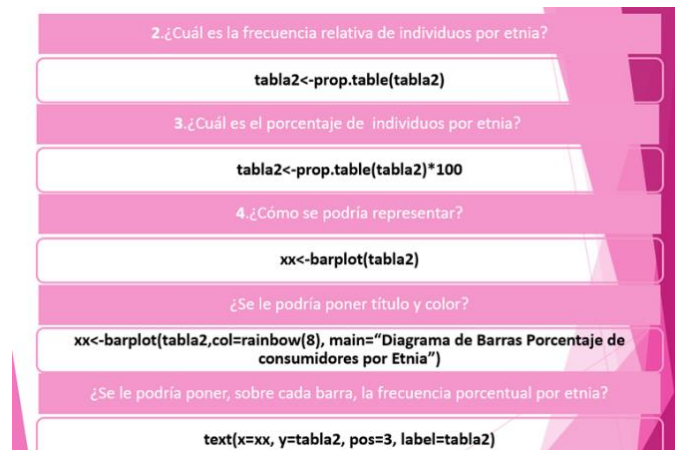


Imagen 4: Comandos de R para hacer tablas de frecuencias relativas, porcentuales y diagrama de barras

A partir del gráfico de barras de frecuencias porcentuales elaborado por los estudiantes con la ayuda pertinente, se pudo observar que la mayoría de los consumidores asistidos por el estado eran de origen norteamericano, representando el 40,1 %, seguidos por aquellos de origen hispano, con el 37,6 % (ver Imagen 5). Además, se observó que el grupo de pueblos originarios (o amerindios) representa una proporción muy baja de individuos en la muestra, junto con los hawaianos, mestizos y otros (ver Imagen 5).

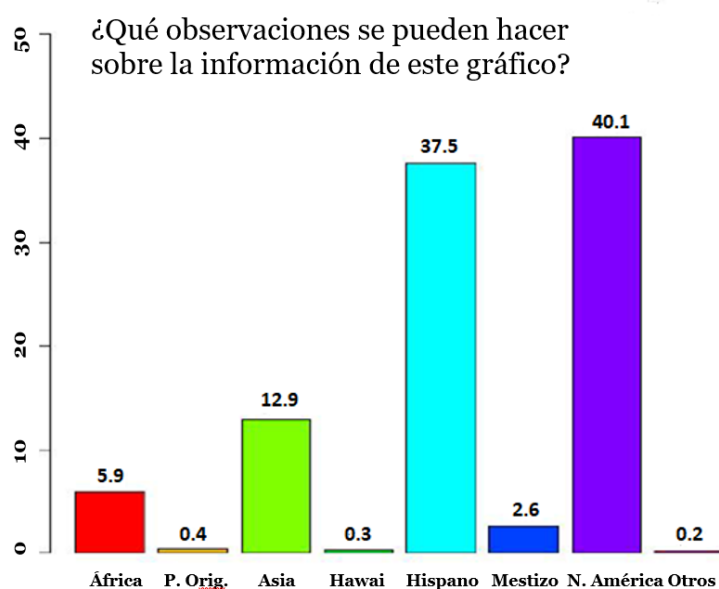


Imagen 5: Diagrama de barra del porcentaje de consumidores por etnia

En una segunda etapa de este encuentro, se les propuso a los estudiantes analizar y contrastar los porcentajes de individuos de cada grupo étnico con los porcentajes de gastos que destinó el estado para cada comunidad, con el fin de profundizar en el estudio de la acusación de discriminación. Para ello se les pidió que realicen una tabla a mano, sin el software, en el que pusieran una primera columna con el origen de los consumidores, otra con el porcentaje de gastos por etnia (redondeado al entero más cercano) y otra columna con el porcentaje de individuos por etnia (redondeados al entero más cercano), ya que era fácil de realizar dada la información calculada en los pasos anteriores de la actividad. Luego, se compartió mediante un código QR con la tabla introducida en la aplicación (ver Imagen 6). Esta tabla permitió realizar con el software el diagrama de barras simultáneo que compara los porcentajes de gastos por etnia con los porcentajes de consumidores por etnia.

Se muestra la proporción de gastos del estado y la proporción de individuos de por Etnia.



Etnia	Gastos	Consumidores
P.Orig	1	0
Asia	13	13
Africa	7	6
Hispano	23	38
Mestizo	1	3
Hawai	1	0
Otros	0	0
N.Americano	55	40

Imagen 6: Código QR con el enlace de la tabla de la derecha incorporada en un script en la aplicación

Luego se completó el Script de la **Imagen 6** para poder realizar el diagrama de barras simultáneo con los datos de la tabla, y que nos permitiría continuar con análisis (ver Imagen 7). Dicho comando es:

```
a<-barplot(x1,beside=TRUE, col=c('blue','red'), name=obs$Origen)
```

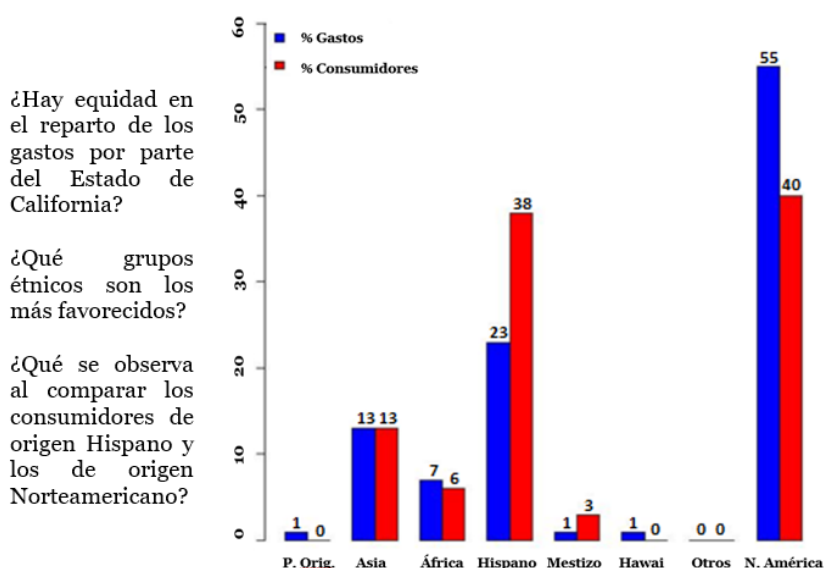


Imagen 7: Gráfico de barras compartido por los docentes con la información de la tabla armada por los alumnos

Las preguntas que planteamos para iniciar el análisis tenían la intención pedagógica de destacar que, según los datos estadísticos presentados, había una clara discriminación por parte del Estado hacia los consumidores de otras etnias en comparación con los norteamericanos. Los estudiantes llegaron a la conclusión, a partir de un gráfico de barras comparativo, que se asignaba más dinero, en porcen-

taje, a los consumidores norteamericanos que a los hispanos y que ambas comunidades tenían casi el mismo porcentaje de consumidores. Por lo tanto, se profundizó el análisis entre esas dos comunidades. Para ello se les mostró la información resumida por cohorte etaria, dividida entre hispanos y norteamericanos (ver Imagen 8), junto con un gráfico que compara los promedios de gastos de estas etnias según la edad (ver Imagen 9).

Se muestra el promedio de gastos del estado divididos por etnia y cohorte etaria.

Cohorte	PGHispanos	PGNorteamericanos
0-5	1393	1367
6-12	2312	2052
13-17	3955	3904
18-21	9960	10133
22-50	40924	40188
51+	55585	52670



Imagen 8: Información resumida por cohorte etaria, dividida entre Hispanos y Norteamericanos

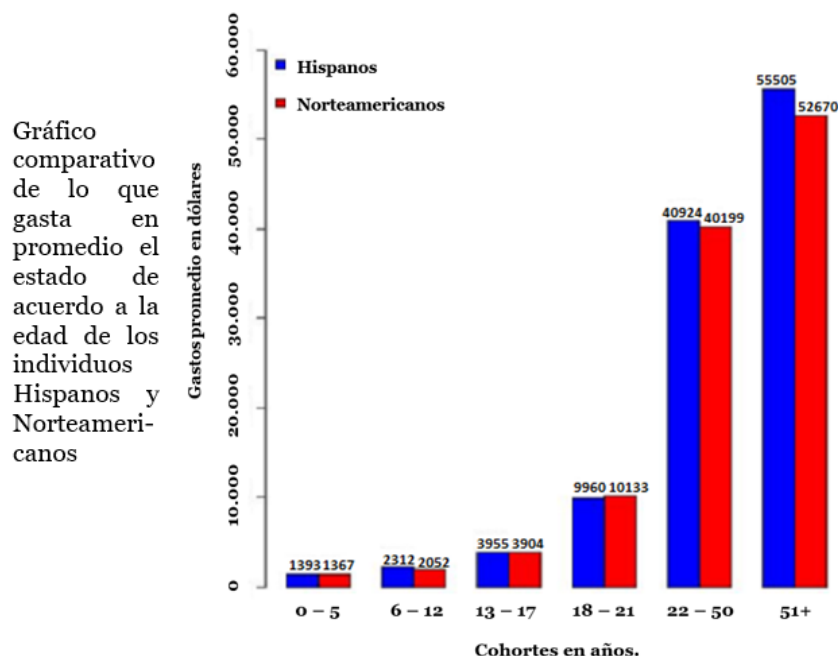


Imagen 9: Gráfico de barras que compara los promedios de gastos de estas etnias según la edad

Al analizar la información de esta manera (Ver Imagen 9), se observó que, en promedio, los gastos del estado asignados a los consumidores hispanos eran mayores que los de los norteamericanos, excepto en el grupo de edad de 18 a 21 años en el que se observa una pequeña diferencia a favor de los norteamericanos. Aquí es donde surge el efecto de la Paradoja de Simpson (o efecto Yule-Simpson). Este fenómeno representa una contradicción entre una tendencia inicial, que se observa en varios grupos de datos, y otra que surge cuando estos se combinan con otra variable.

Resultados y discusión

Los resultados de la actividad revelaron que muchos estudiantes inicialmente interpretaron incorrectamente los datos, creyendo erróneamente que el Estado de California no distribuía equitativamente los fondos. Sin embargo, a medida que avanzaba el análisis y se fomentaba la discusión en clase, los estudiantes comenzaron a comprender las complejidades de los datos y a cuestionar sus propias conclusiones. Esto se debió a la aparición de la paradoja de Simpson. Se observó un aumento en la participación y el interés de los estudiantes a medida que se desarrollaba la actividad. Esta experiencia demostró la importancia del uso adecuado de gráficos estadísticos no solo para comunicar, sino también para analizar conjuntos de datos, sistematizar información, determinar relaciones entre variables y tomar decisiones. El uso de la tecnología en línea no supuso un problema para los estudiantes, ya que se adaptaron rápidamente al uso de los comandos para crear diferentes tipos de gráficos de barras y construir tablas de distribución de frecuencias. Esto dio lugar a generar y agilizar una gran cantidad de gráficos para el desarrollo de la propuesta, lo que a su vez permitió a los alumnos desarrollar una comprensión más profunda del comportamiento de los datos y así como también una mirada crítica sobre la información y sus características.

En las escuelas de educación media, la enseñanza y el aprendizaje de la estadística generalmente se han centrado en realizar cálculos manuales o utilizando calculadoras científicas, Excel o GeoGebra. Sin embargo, consideramos que las Tecnologías de la Información y la Comunicación desempeñan un papel fundamental para realizar un análisis más profundo de las variables estadísticas, reduciendo el tiempo

de procesamiento de la información y permitiendo centrar el trabajo en la lectura e interpretación de esta.

Conclusiones

Esta propuesta permitió utilizar el software R en un aula de una escuela de enseñanza media, sin necesidad de utilizar computadoras. El uso de la aplicación móvil y/o en línea permitió profundizar en los métodos estadísticos abordados en clase utilizando muestras de tamaños que requerirían más tiempo de análisis con las metodologías tradicionales. Consideramos que introdujo a los estudiantes en técnicas de programación. La experiencia generó una discusión sobre la Paradoja de Simpson y las implicaciones de no realizar un análisis estadístico riguroso de los datos, teniendo en cuenta todas las variables y sus interacciones. Esta actividad involucró a los estudiantes en un aprendizaje activo, donde tuvieron la oportunidad de aplicar conceptos estadísticos en un entorno práctico y colaborar con sus pares en la resolución de problemas. Además, promovió el pensamiento crítico al desafiarlos a pensar de manera creativa y analítica, y al proporcionarles la oportunidad de analizar datos reales, cuestionar suposiciones y llegar a conclusiones fundamentadas en evidencia.

Se recomienda seguir explorando la Paradoja de Simpson en diferentes contextos educativos y desarrollar nuevas actividades didácticas que fomenten el pensamiento crítico y el análisis de datos. Es importante proporcionar a los estudiantes herramientas y recursos tecnológicos que faciliten el aprendizaje de la estadística y promuevan una comprensión más profunda de los conceptos estadísticos.

Bibliografía

Bickel, Peter John, Hammel, Eugene Alfred y O'Connell, J. William (1975). Sex bias in graduate admissions: Data from Berkeley. *Science*, 187(4175), 398-404.

<https://doi.org/10.1126/science.187.4175.398>

Bonovas, Stefanos y Piovani, Daniele (2023). Simpson's Paradox in Clinical Research: A Cautionary Tale. *Journal of Clinical Medicine*, 12(4), 1633.

<https://doi.org/10.3390%2Fjcm12041633>

- Contreras, José Miguel, Batanero, Carmen, Cañadas, Gustavo Raúl y Gea, María Magdalena** (2012). La paradoja de Simpson. *Suma*, 71, 27-34.
- Ennis, Robert Hugh** (2005). Pensamiento crítico: un punto de vista racional. *Revista de psicología y educación*, 1(1), 47-64. <https://www.revistadepsicologiayeducacion.es/pdf/5.pdf>
- Lila Tech** (2018). Run R Script - Online Statistical Data Analysis - Version 1.1 Build 226-208 – Android.
- Maronna, Ricardo Antonio** (2021). *Probabilidades y Estadística Elementales para Ciencias e Ingeniería*. Exacta.
- Pearl, Judea** (2000). *Causality: Models, Reasoning, and Inference*. Cambridge University Press.
- Simpson, Eduard Hugh** (1951). The Interpretation of Interaction in Contingency Tables. *Journal of the Royal Statistical Society (Series B)*, 13, 238–241. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1951.tb00088.x>
- Taylor, Stanley y Mickel, Amy** (2014). Simpson's Paradox: A Data Set and Discrimination Case Study Exercise. *Journal of Statistics Education*, 22(1), <https://doi.org/10.1080/10691898.2014.11889697>

CONVERSATORIO

Corolarios de la Especialización: discusiones y reflexiones didácticas producidas en el marco de la EDM

El problema de la construcción del sentido de los saberes matemáticos

Matemática en función de un café

MELINA MONUTTI

monuttimelina@gmail.com

VALENTINA ALBRECHT

valealbrecht21@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral (UNL)

Sede: Universidad Nacional del Litoral

Nivel educativo: Secundario

Resumen

En el recorrido de la Especialización en Didáctica de la Matemática, y en el marco del curso “*Las funciones como instrumento de articulación*”, tuvimos que proponer un problema y presentar su resolución, reflexionando respecto de sus potencialidades de implementación en la escuela secundaria, como así también describiendo los momentos, decisiones, preguntas y conjeturas que surgían en el grupo al abordar el contexto. Nos tocó el contexto “*enfriamiento de café*”. Estuvimos un tiempo pensando cómo implementarlo y decidimos que la actividad debía promover procesos de investigación, experimentación y construcción, dado que la propuesta del curso consistía en proponer una actividad de modelización matemática. Es por ello que ideamos la siguiente situación problemática:

En la escuela se rompió el dispenser de agua. La preceptora pasó por los salones a comunicar dicha situación y dijo que el que desee tomar café deberá traerlo preparado en sus vasos térmicos para tomarlo en el recreo. Algunos de los chicos manifestaron que eso no será posible porque si ingresan a las 7:30 hs. y el primer recreo es a las 8.50hs., el mismo estará frío. ¿Será cierto? Realizar un análisis de la situación y responder las siguientes preguntas:

¿Se mantendrá caliente? ¿Cómo puedes asegurarlo?

¿Existe una relación funcional entre el tiempo transcurrido desde que se preparó el café y la temperatura del mismo? Si crees que no, explica los motivos. Si piensas que sí hay una relación, escribe la función que mejor se ajusta a la situación.

Consideramos que la actividad promueve una visión modelizadora de la matemática ya que es un recorte de la realidad, en la que los estudiantes hacen propio el problema, pues deben realizar estimaciones, analizar la situación planteada y tomar una decisión en relación al contexto. Por lo que, realizan la actividad matemática necesariamente en un contexto de representación y, mediante el enunciado, se instala la representación verbal del concepto de función.

Adoptamos una perspectiva realista ya que, según clasifica Font (2011), consideramos el significado del concepto función en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático y trabajamos una línea semántica, es decir, la construcción del significado.

Además, asociado a este concepto de función, podemos ver, según los aportes de Herrera (2014) que existen subconceptos del mismo, como ser el de parámetro (en la expresión simbólica de la función), variable (continua o discreta), variable independiente, variable dependiente, dominio e imagen; que podrán analizarse al trabajar con este problema.

Consideramos que los estudiantes no podrán responder al problema solo con el enunciado del mismo, sino que necesitarán realizar otras acciones para convertir la información de una representación a otra. Estas acciones de conversión, propuestas por Janvier (1987), permiten dar respuesta a la actividad dado que, por ejemplo, si solo se quedan en la representación verbal es muy probable que no puedan dar respuesta al problema; sino que necesitan convertir el enunciado del problema (verbal) en una tabla, gráfica o en un modelo.

Una herramienta muy eficaz para poder hacer ese tipo de conversiones es la utilización del software Geogebra, pues promueve la representación tabular, gráfica y simbólica. Luego, será tarea del estudiante interpretar las conversiones y pensar la representación verbal.

Finalmente, creemos que este problema tiene muchas potencialidades. Algunas de ellas son:

- La necesidad de emplear diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones y conversiones entre ellas son fundamentales para la comprensión del concepto función y, por lo tanto, para su enseñanza y aprendizaje.
- Permite que los estudiantes exploren, analicen la situación, determinen variables, encuentren relaciones entre ellas, determinen si es continua o discreta, analicen si existen factores que influyen en el enfriamiento del café, representen en Geogebra, aproximen los datos a una función. Por lo que el estudiantado adquiere un rol activo y permite darle sentido al concepto de función.

- El docente adquiere un rol de “guía” dado que acompaña el proceso de producción de los estudiantes, principalmente realizando preguntas que permitan la reflexión de sus pensamientos para luego ampliarlos y/o mejorarlos.
- Al hacer el experimento en varios grupos de trabajo, se puede trabajar el margen de error como así también potencializar el trabajo colaborativo.
- Puede trabajarse de forma interdisciplinaria, y a su vez, vincularse con otros temas afines.

Palabras clave: función / modelización / acciones de conversión

Bibliografía

- Font, Vicenc** (2011). Funciones. En J. M. Goñi (Ed.), *MATEMÁTICAS: Complementos de formación disciplinar*. Graó.
- Herrera Naranjo, Yeimi Paola y Muñoz Díaz, Vicente Elisban** (2014). *Propuesta Didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelación matemática* (trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional.
- Janvier, Claude** (1987). Translation processes in mathematics education. En Janvier, C. (Ed.), *Problems of representation in the teaching of mathematics*. Lawrence Erlbaum A.P.

Sobre conceptualizaciones de la pendiente de una recta en estudiantes universitarios

CLAUDIA GRACIELA REYES

claudia.reyes@faeauncoma.com.ar

Universidad Nacional del Comahue (UNCOMA)

Sede: Universidad Nacional de San Luis

Nivel educativo: Superior

Resumen

En la Universidad Nacional del Comahue, docentes de las carreras relacionadas con la Economía y Administración manifiestan que, mayoritariamente, los estudiantes novés no pueden explicar o interpretar una variación lineal. Esto nos lleva a estudiar cuestiones relacionadas con la enseñanza y con el aprendizaje de las funciones lineales. Así, encontramos que diversos investigadores (Stump, 2001; Birgin, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2013, Rivera *et al.*, 2019) reportan dificultades en los estudiantes universitarios al momento de enfrentar tareas que involucran a la pendiente de una recta en sus diferentes representaciones. Entre ellas, interpretarla como una razón cuando su valor es un decimal o un número entero; interpretar funciones lineales y sus gráficas, conectar gráficas con ecuaciones lineales y conectar gráficas con la noción de tasa de cambio. Borji *et al.* (2018) aducen que esto se debe a que, durante sus estudios secundarios no llegaron a comprender el concepto ni a trabajarlo en profundidad.

Como docentes de Matemática 1, asignatura donde se enseñan funciones lineales, compartimos el diagnóstico sobre las dificultades mencionadas. Asimismo, estamos interesados en comprender a qué podría deberse esta problemática atendiendo a que el concepto de pendiente es importante para trabajar con la tasa de cambio más básica con la que se encuentran los estudiantes. Además, es fundamental para afrontar conceptos como los de derivadas e integrales en Cálculo y la recta de mejor ajuste en Estadística (Birgin, 2012; Cho y Nagle, 2017; Rivera *et al.*, 2019, Stanton y Moore-Russo, 2012).

En el caso que nos ocupa, la pendiente aparece específicamente en conceptos relacionados con la carrera elegida, tales como las variaciones en el comportamiento de la oferta, la demanda o el ahorro, o cuando se quiere ajustar un conjunto de datos con un modelo de regresión lineal.

Stanton y Moore-Russo (2012) presentan y describen once *conceptualizaciones de la pendiente* que podrían ponerse en juego en el aprendizaje y uso de las funciones lineales. Compartimos aquí la denominación propuesta: relación geométrica, razón algebraica, propiedad física, propiedad funcional, coeficiente paramétrico, concepción trigonométrica, concepción del cálculo, situación del mundo real, propiedad determinante, indicador de comportamiento y constante lineal.

En este marco, en el Trabajo Final Integrador de la Especialización en Didáctica de la Matemática nos propusimos conocer las conceptualizaciones sobre la pendiente que ponen en juego estudiantes de Matemática 1 luego de haber estudiado funciones lineales. Sería útil también, identificar aquellas conceptualizaciones que favorecen el aprendizaje de la variación lineal en el contexto de carreras de economía. Con este conocimiento, los docentes encargados de dictar esa asignatura podríamos diseñar actividades pertinentes y apropiadas para favorecer la comprensión de la variación lineal.

En esta presentación compartiremos precisiones sobre las once conceptualizaciones que son el centro del Marco Teórico del trabajo, daremos detalles del instrumento utilizado para recabar datos y mencionaremos el avance alcanzado luego del trabajo de campo realizado a fines de 2023.

Palabras clave: pendiente de una recta / conceptualizaciones sobre la pendiente de una recta / enseñanza de la variación lineal / educación matemática en carreras de economía

Bibliografía

- Birgin, Osman** (2012). Investigation of eighth-grade student's understanding of the slope of the linear function. *Bolema*, 26(42a), 139–162. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100008>
- Borji, Vahid, Alamolhodaei, Hassan y Radmehr, Farsad** (2018). Application of the APOS-ACE Theory to improve Students' Graphical Understanding of Derivate. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 2947–2967. <https://doi.org/10.29333/ejmste/91451>
- Cho, Peter y Nagle, Courtney** (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135-150.

- Nagle, Courtney y Moore-Russo, Deborah** (2013). Slope: a network of connected components. *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 127–135.
- Rivera, Martha, Salgado, Gerardo y Dolores, Crisólogo** (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema* 33(65), 1027–1046. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03>
- Stump, Sheryl** (2001). High School Precalculus Students' Understanding of Slope as Measure. *School Science and Mathematics* 101(2), 81–89. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x>
- Stanton, Michael y Moore-Russo, Deborah** (2012). Conceptualizations of slope: A Review of State Standars. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270-277. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00135.x>

Procesos de generalización algebraica en la construcción del pensamiento computacional

MARÍA MARTA NOVAIRA

mnovaira@dc.exa.unrc.edu.ar

FLAVIA BUFFARINI

fbuffarini@exa.unrc.edu.ar

FRANCISCO BAVERA

pancho@dc.exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto

Nivel educativo: Superior

Resumen

En el marco del Trabajo Final Integrador (TFI) de la Especialización en Didáctica de la Matemática, carrera de posgrado dictada por las Universidades Nacionales de Río Cuarto (UNRC), Universidad Nacional de San Luis (UNSL) y Universidad Nacional del Litoral (UNL), se propuso realizar un estudio didáctico-matemático en relación al problema de la construcción del sentido de los saberes matemáticos, en particular el sentido del símbolo, y en general del álgebra, vinculado a los procesos de generalización y el pensamiento computacional.

En el curso La Construcción del sentido del Álgebra de la Especialización, se explicita la potencia del álgebra como una herramienta de modelización y validación. Así se pudo develar el poder de los símbolos para descubrir la estructura de un problema y atrapar nuevas relaciones. En el álgebra el estudio de variable, parámetro y posibles transformaciones entre ellos, permite transitar un camino hacia la generalización de relaciones a partir de su funcionamiento dialéctico, aspecto esencial del trabajo algebraico que aporta a construir el sentido del símbolo como menciona Buffarini (2005).

El TFI se enfoca en el análisis didáctico-matemático de una clase de problemas algebraicos que favorecen el desarrollo de habilidades relacionadas a los procesos de generalización y al pensamiento computacional. El estudio se desarrolla en el marco de la Diplomatura Superior en Didáctica de las Ciencias de Computación para la Docencia dictada por la Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de la UNRC. Se centrará especialmente en el curso Introducción a la resolución de problemas y el

pensamiento computacional. La Diplomatura está dirigida a la formación continua de docentes de nivel primario y secundario.

Según Wing (2006), Brennan (2012) y Czismadia (2015) el pensamiento computacional es un proceso de solución de problemas que incluye características tales como formular estrategias de resolución de problemas de una manera que permite su solución; representar datos a través de abstracciones, tales como modelos o simulaciones; identificar patrones; automatizar soluciones usando pensamiento algorítmico; identificar, analizar e implementar posibles soluciones con el objetivo de conseguir la combinación de pasos y recursos más eficiente; generalizar y transferir este proceso de solución a otros problemas.

En el marco de este TFI se estudian problemas que posibilitan la construcción del pensamiento computacional y se realiza un análisis didáctico-matemático que aborda bajo qué condiciones favorecen el desarrollo del pensamiento computacional. En este sentido, un asunto central en las situaciones que se estudian es encontrar una expresión general-fórmula en un proceso que guarda una regularidad definida de un modo explícito. A su vez, dichos problemas permiten un tipo de trabajo en torno a la construcción de las nociones de parámetro, de variable y la relación entre ellas; la noción de dependencia entre dos magnitudes, todo inherente a los procesos computacionales. Buffarini (2018a, 2018b y 2019) fundamenta que la producción de la fórmula funciona como punto inicial para abordar cuestiones constitutivas del lenguaje algebraico que permite la construcción de soluciones algorítmicas que contribuyen al desarrollo y fortalecimiento del pensamiento computacional.

Específicamente los objetivos que se persiguen son:

- Realizar un análisis didáctico-matemático de *clases de problemas* que posibilitan la construcción del pensamiento computacional
- Hacer un análisis didáctico de dos propuestas de trabajos finales que elaboren los estudiantes del curso Introducción al Pensamiento Computacional y la Resolución de Problemas de la Diplomatura Superior en Didáctica de las Ciencias de la computación para la Docencia.
- Ajustar, si fuera necesario, las dos propuestas a partir de la investigación junto con los profesores que la diseñaron.
- Implementar dichas propuestas en el aula junto con los profesores.
- Analizar a posteriori dicha implementación.
- Analizar en qué sentido la capacitación en el marco de la diplomatura mencionada aporta al trabajo profesional docente.

Es importante resaltar que las circunstancias que motivan la realización de este TFI, a la estudiante, tienen su origen en la práctica cotidiana como docente del Departamento

de Computación de la UNRC y la experiencia en la participación en el dictado de formaciones y/o capacitaciones para docentes sobre la temática de estrategias para la enseñanza de la programación.

Palabras clave: generalización / álgebra / problema / pensamiento computacional

Bibliografía

- Brennan, Karen y Resnick, Mitchel** (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, 1.
- Buffarini, Flavia** (2005). *La dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación: las interacciones como medio de su evolución* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Buffarini, Flavia, Rosso, Fabiana, Bavera, Francisco y Daniele, Marcela** (2019). La entrada a los procesos de generalización. Una clase de problemas que favorece su construcción. *ERUMA*, Encuentro Regional UMA, Universidad Nacional de Santiago del Estero.
- Buffarini, Flavia, Rosso, Fabiana, Bavera, Francisco y Daniele, Marcela** (2018a). La construcción del pensamiento computacional: una propuesta desde la Didáctica de la Matemática. XLI Reunión de Educación Matemática, Universidad Nacional de La Plata.
- Buffarini, Flavia, Rosso, Fabiana, Bavera, Francisco y Daniele, Marcela** (2018b). El rol de la Didáctica de la Matemática en la construcción del pensamiento computacional. VII Simposio Internacional de Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas, Universidad del Norte.
- Csizmadia, Andrew, Dorling, Mark, Ng, Thomas y Selby, Cynthia** (2015). *Computational thinking-a guide for teachers*. Computing at School.
- Wing, Jeannette** (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35. <https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>

El proceso de modelización algebraico-funcional en la formación de profesores en matemática

NATALIA GISEL LEIRIA

nleiria@exa.unrc.edu.ar

FLAVIA BELIA BUFFARINI

fbuffarini@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto

Nivel: Superior

Resumen

En la institución escolar se identifica el álgebra con el uso de *lenguaje algebraico* o simbólico. Una de las consecuencias de esto es la ausencia del álgebra como instrumento de modelización en la matemática que se estudia en la escuela secundaria. (Ruíz Munzón *et al.*, 2010). Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se postula que el álgebra debe interpretarse como un instrumento de modelización de *praxeologías* u organizaciones matemáticas. (Ruíz Munzón *et al.*, 2010)

La separación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje funcional se pone de manifiesto en el uso casi exclusivo de las fórmulas como escrituras abreviadas de reglas de cálculo, lo que conlleva en no poder interpretarlas como relaciones funcionales entre variables y utilizar así los modelos funcionales resultantes para estudiar propiedades de los objetos usando las técnicas matemáticas asociadas.

Con la TAD como sustento, se puede sintetizar el amplio problema de la formación del profesorado como sigue: ¿Cuáles son las cuestiones cruciales que deben afrontar los profesores en su práctica docente? ¿Qué se puede hacer en la formación inicial y continua para construir respuestas satisfactorias a estas cuestiones?

Cirade (2006) pone en evidencia que las dificultades con las que se encuentran los docentes en el ejercicio de su profesión están profundamente relacionadas con la problematicidad (matemática) de *las matemáticas por enseñar* (las que se proponen para enseñar en los distintos niveles educativos), enfatizando la necesidad de revisar y reconstruir lo que denominan *las matemáticas para la enseñanza* (el conocimiento matemático necesario para la profesión docente).

Por todo esto, el problema de la modelización matemática y, en particular el de la modelización algebraico-funcional, junto con la búsqueda de herramientas que permitan articular y dotar de sentido los contenidos matemáticos de la escuela, constituyen un problema didáctico de suma importancia.

En este sentido, con la intención de resignificar a las funciones como instrumento de modelización, en el trabajo final integrador (TFI) enmarcado en la Especialización en Didáctica de la Matemática, se elabora una propuesta didáctica sobre funciones en la entrada al nivel universitario, donde el modelo matemático que resuelve el problema no sea dado *a priori*, sino que éste se construya a partir de cuestiones que se plantean, y que para abordarlas sea necesario transitar un proceso de modelización algebraico-funcional.

Desde este marco, se elige como sistema inicial una organización matemática (OM) en torno a la modelización funcional: se elabora una propuesta de trabajo que apunta a resignificar el proceso de *modelización algebraico-funcional* en la formación de profesores. Para esto, en primer lugar, se hace un estudio didáctico-matemático de una propuesta de estudio pensada para ser implementada con estudiantes de la carrera del Profesorado en Matemática de la UNRC. Esta investigación está situada en el momento en el que la comunidad de estudio dispone, como *equipamiento praxeológico inicial*, de las técnicas y las tecnologías necesarias para analizar las características principales de las funciones, tales como el dominio, la imagen y los extremos. Se asume, también, que se cuenta con las técnicas de derivación, junto a la tecnología asociada, así como de las técnicas necesarias para realizar el estudio algebraico de funciones polinómicas, racionales y exponenciales elementales y de sus representaciones gráficas.

Es de destacar que en la fase de diseño y análisis *a priori* de la propuesta de estudio, se distingue una dimensión de análisis matemático, de caracterización de los objetos matemáticos y de la actividad que se realizará en torno a ellos. También se incluye una dimensión de análisis didáctico, sobre cómo hacer emerger y sostener la actividad pretendida en el aula, a través del estudio de una o varias cuestiones problemáticas y del proceso de indagación a las que estas dan lugar.

Palabras clave: modelización / funciones / formación de profesores en matemática

Bibliografía

- Cirade, Gisèle** (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (tesis de doctorado). Universidad de Provenza Aix-Marsella I.

Ruiz Munzón, Noemí, Bosch, Marianna y Gascón, Josep (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Una propuesta de estudio para reconstruir el sentido de las ecuaciones lineales de una variable

FLORENCIA ABELLA

florencia_95_29@hotmail.com

FLAVIA BUFFARINI

fbuffarini@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto

Nivel educativo: Secundario

Resumen

Este documento presenta un plan de trabajo correspondiente al Trabajo Final Integrador (TFI) de la Especialización en Didáctica de la Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC).

A partir de la reflexión sobre la propia práctica en el nivel secundario, nos propusimos producir un estudio didáctico-matemático en torno a una problemática de enseñanza abordada en un trayecto formativo de la especialización.

Generalmente se observa, en los espacios curriculares correspondientes a las ciencias exactas; que los estudiantes no sólo muestran desinterés al trabajar con ecuaciones, sino también, que en la resolución de las mismas presentan errores en la transposición de términos al despejar la incógnita. Esto puede atribuirse a las debilidades de las propuestas de enseñanza centradas en el aprendizaje de un conjunto de técnicas.

Para abordar la problemática, proponemos rediseñar:

Una propuesta didáctica para la introducción de las ecuaciones en la escuela secundaria basadas en la noción programa de cálculo que permite materializar las etapas del proceso de construcción de la modelización algebraica a través de ecuaciones lineales y pseudo lineales. (Bastán, Rosso y Buffarini, 2012, p. 214)

Para ello, consideramos los problemas que allí se presentan y realizamos el análisis a priori, considerando el trabajo final del curso: El Problema Del Sentido Del Álgebra, de Abella y Pizarro (2022b); como así también, su análisis didáctico, a partir del tipo de práctica desarrollada por un grupo de estudiantes y los aspectos del álgebra puestos a

funcionar en sus resoluciones, retomando el trabajo de Formación Práctica I, de Abella y Pizarro (2022a). Estos dos últimos trabajos, nos permiten realizar consideraciones para seleccionar, incorporar y/o modificar los problemas para una nueva propuesta, en base al tipo de actividad matemática que promueven y cómo se sostuvo en el aula.

El objetivo no es introducir a los estudiantes en el álgebra, sino resignificar el álgebra como herramienta modelizadora, a partir de una serie de problemas que permitan vislumbrar la limitación de los recursos aritméticos, producir nuevas técnicas, advertir las ventajas que ofrecen las modelizaciones algebraicas respecto a otras herramientas y descubrir el poder de los símbolos para revelar la estructura de un problema y ver y proveer nuevas relaciones.

El TFI se desarrolla en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que nos proporciona instrumentos para pensar y rediseñar una propuesta desde la ingeniería didáctica. Una primera etapa en la metodología de investigación de la TAD, consiste en la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) del ámbito/s de la actividad matemática que se estén analizando. Mientras que un segundo momento, se centra en la búsqueda de otras formas de organizar la actividad matemática y los procesos de estudio en instituciones escolares, que permitan producir algunas transformaciones en relación a los fenómenos didácticos identificados. Desde esta teoría se plantea un modelo epistemológico general que considera a la actividad matemática como actividad modelizadora y describe el saber matemático en términos de *organizaciones matemáticas* (Chevallard *et al.*, 1997).

Se demuestra en Bolea (2003), que la interpretación epistemológica del álgebra escolar se caracteriza como una aritmética generalizada. Consiste en la identificación del álgebra elemental con el simbolismo algebraico, frente a un supuesto lenguaje aritmético. En relación a la problemática a estudiar asumimos el MER construido desde la TAD para repensar una propuesta de estudio que permita resignificar el sentido del álgebra que habitualmente vive en la escuela. Por ello contemplamos los objetivos, los principios, la metodología y el impacto atribuido al diseño de tareas que se plantean en García *et al.* (2019). Estas herramientas teóricas nos permitieron delimitar el siguiente plan de actividades que llevaremos a cabo:

- Realizar un análisis didáctico-matemático sobre las tareas de la propuesta abordada en Bastán *et al.* (2012).
- Rediseñar una propuesta didáctica para estudiantes de 3° año de Educación Secundaria, apuntando a la construcción del conocimiento en torno al trabajo con ecuaciones.
- Realizar un análisis a priori de la secuencia rediseñada caracterizando los objetos matemáticos puestos en juego y cómo generar y sostener la actividad planificada en el aula.

-Realizar un análisis a posteriori sobre las producciones de los estudiantes, analizando la intimidad del proceso de construcción de conocimientos en álgebra y el trabajo en interacción con la producción del otro.

Palabras clave: álgebra escolar / modelización matemática / ecuaciones

Bibliografía

- Abella, Florencia y Pizarro, Joana** (2022a). El Problema del Sentido del Álgebra (formación práctica de Especialización en Didáctica de la Matemática). Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Abella, Florencia y Pizarro, Joana** (2022b). Trabajo Final del curso El Problema del Sentido del Álgebra. Especialización en Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Bastán, Marta, Rosso, Fabiana y Buffarini, Flavia** (2012). La introducción de las ecuaciones en la escuela secundaria: una propuesta de estudio. *Propuestas para la enseñanza de las Matemáticas*. 213-220.
- Bolea, Pilar** (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano*, 29.
- Chevallard, Yves, Bosch, Marianna y Gascón, Josep** (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori.
- García, Francisco Javier, Barquero, Berta, Florensa, Ignasi y Bosch, Marianna** (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94.

La construcción de sentidos colectivos: una posibilidad para resignificar herramientas didácticas en la formación del profesor en matemática

MARÍA EUGENIA FERROCCHIO

mferrocchio@exa.unrc.edu.ar

SILVIA CATALINA ETCHEGARAY

setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto

Nivel educativo: Superior

Resumen

El presente escrito pretende compartir el estudio realizado en el marco del Trabajo Final Integrador (TFI) de la carrera de posgrado Especialización en Didáctica de la Matemática en la UNRC. El mismo se desarrolló en torno a una de las tipologías de las propuestas por la Junta Académica Local de la carrera que consiste en describir un problema de investigación de interés y plantear su justificación teórica-metodológica. En este marco, este TFI parte de reconocer -en nuestro contexto local- como preocupación compartida institucionalmente el problema de otorgar sentido a las herramientas didácticas en el marco de la Formación Inicial de futuros profesores de Matemática de la UNRC. Al respecto, en el trabajo llevado a cabo, se propuso y fundamentó la potencialidad de construir un nuevo espacio curricular mixto y horizontal que implique el trabajo reflexivo y colaborativo entre estudiantes de profesorado, docentes de escuelas secundarias y docentes investigadores de la Universidad. Para avanzar en esta dirección, fue necesario recuperar aportes teóricos específicos que provienen de diferentes tipos de prácticas de producción de conocimiento como son la investigación en Didáctica de la Matemática, la enseñanza de la Didáctica de la Matemática y las prácticas de enseñanza de la Matemática en el ámbito de la formación inicial de profesores en Matemática. La indagación del complejo juego de relaciones entre estos tres tipos de prácticas institucionales aportó elementos para reconocer/anticipar la discusión institucional, el análisis didáctico-matemático y la delimitación conceptual -en el ámbito de la

formación inicial de los profesores en Matemática- de un “nuevo espacio posible” que habilite indagar/matizar/resignificar la problemática de “otorgar sentido” a conocimientos didácticos. Ello, sumado a los aportes metodológicos y teóricos de Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, 2002, 2017, 2018), posibilitó la delimitación de un nuevo contexto de uso (Wilhelmi *et al.*, 2007) – conformado por estudiantes del Profesorado en Matemática, docentes de la escuela secundaria y docentes-investigadores de la universidad, en el cual “viven” y se desarrollan problemáticas de formación docente- y cuya exploración constituiría un aporte para la construcción de los significados parciales de herramientas didácticas que potencien la formación docente inicial de los profesores en Matemática. Se plantea –además- dicho aporte en el marco de un significado global de las herramientas didáctico-matemáticas, como modelo epistemológico y cognitivo de referencia (Wilhelmi *et al.*, 2007), para la construcción de una zona de interpretación que reúna e integre, en relación dialéctica, las prácticas de enseñanza de la matemática, la investigación en Didáctica de la Matemática y la enseñanza de la Didáctica de la Matemática; en el desafío de la problematización del conocimiento matemático y la producción didáctica, en un ambiente colaborativo.

Palabras clave: formación de profesores / contextos de uso / construcción de sentido / herramientas didácticas

Bibliografía

- Godino, Juan** (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2.3), 237- 284.
- Godino, Juan** (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf>
- Godino, Juan** (2018). Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. (Versión ampliada y revisada de la primera parte del trabajo titulado Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático). https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf

Wilhelmi, Miguel, Godino, Juan y Lacasta, Eduardo (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77-120.

La construcción de conocimiento didáctico-matemático en la formación de formadores.

Análisis de un problema en torno a la divisibilidad

MELINA SPOSETTI

sposettim@gmail.com

Universidad Nacional de San Luis (UNSL)

FLAVIA BUFFARINI

fbuffarini@gmail.com

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNCR)

Sede: Universidad Nacional de San Luis

Nivel educativo: Superior

Resumen

En este conversatorio pretendemos comunicar tanto las principales ideas como nuestra experiencia en el proceso de elaboración del Trabajo Final Integrador (TFI) correspondiente a la primera cohorte de la Especialización en Didáctica de la Matemática (UNSL), que lleva el mismo título que el presente escrito.

La situación problemática utilizada para este estudio de caso, que denominamos *el problema de la tabla infinita*, fué propuesta en Sadovsky (2005) y consiste en una secuencia de tareas que se plantean en torno a una tabla de seis columnas e infinitas filas donde se ubican el cero y todos los números naturales. En Sposetti (2024) se destaca que el contexto que brinda esta situación favorece la formulación y validación de conjeturas sobre la división entera, las cuales permiten aproximarnos a saberes de la aritmética de los números naturales. Asimismo, permite adentrarnos en la complejidad de cómo se articulan diferentes relaciones y estrategias que resuelven la situación. Estas son algunas de las características que brindan un escenario propicio para abordar el principal objetivo del trabajo que consiste en ahondar en el estudio de las relaciones, y por ende los conocimientos, que se pueden construir a partir de la resolución de dicha situación, lo que permitirá dar cuenta de la potencialidad del *problema de la tabla infinita* para la enseñanza en el nivel superior, más específicamente, para la formación de futuros formadores.

Adoptamos la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico, la cual nos brindó un modelo para realizar una reflexión teórica sobre cuáles son los procesos que dan lugar a la producción de conocimientos, qué características tienen los problemas que se trabajan, cómo se validan sus soluciones, qué roles juegan el docente, el estudiante y cómo son las interacciones entre ellos a propósito de sus interacciones con el medio. El constructo teórico de variable didáctica de esta teoría adquiere especial importancia en este estudio para analizar las tareas de la situación.

El marco metodológico se toma de la Ingeniería Didáctica (ID). El análisis a priori emerge como una herramienta metodológica clave para evidenciar de qué forma se articulan las relaciones con las estrategias que resuelven este problema y cómo ésta dialéctica habilita la construcción de conocimientos ya sean matemáticos o didáctico-matemáticos. Si bien en este trabajo sólo desarrollamos la fase del análisis a priori, el mismo tiene implicancias en la fase de experimentación. Es decir, disponer del análisis de las múltiples posibilidades de resolución de la situación facilita la toma de decisiones didácticas previa a la implementación en el aula.

Otra de las cuestiones que abordamos en el TFI consistió en cómo se puede seguir haciendo evolucionar la construcción de conocimiento matemático, y/o didáctico-matemático, a partir de tensionar el mismo problema con nuevas preguntas. Dependiendo del tipo de preguntas que le realizamos al problema se pudieron generar diversos problemas, ya sea para resignificar saberes matemáticos como para trabajar la construcción de conocimiento didáctico-matemático en el aula de formación docente.

En relación a la formación de la tesista, la investigación le dio la posibilidad de posicionarse por primera vez en el rol de docente investigadora, para lo cual debió correr el foco de su rol docente, pero no por ello perderlo de vista. Asimismo, implicó un aprendizaje en cuanto a cómo planificar, desarrollar y escribir un trabajo de investigación. El ejercicio de la escritura académica le permitió reconocer la importancia e incidencia que tienen en la práctica docente las concepciones que, tanto docentes como investigadores, tenemos sobre la educación, la disciplina que enseñamos, los procesos de enseñanza y de aprendizaje y los roles que ocupamos los diferentes agentes involucrados en la educación. Por todo lo expuesto, consideramos que el desarrollo de este Trabajo Final Integrador significó un aporte a su formación docente al mismo tiempo que podría habilitar nuevas posibilidades en su carrera profesional.

Palabras clave: construcción de conocimiento didáctico-matemático / divisibilidad / formación de formadores / didáctica de la matemática

Bibliografía

Sadovsky, Patricia (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos* (Vol. 1). Libros del Zorzal.

Sposetti, Melina (2024). *La construcción de conocimiento didáctico-matemático en la formación de formadores. Análisis de un problema en torno a la divisibilidad* (trabajo final integrador de especialización). Universidad Nacional de San Luis.

Modelo concreto vs entorno algebraico en la enseñanza de los números enteros

OSCAR ALBERTO ABALLAY

oscar.17.skr@gmail.com

AILÉN ROCÍO GODOY SÁNCHEZ

ailengodoysss@gmail.com

Universidad Nacional de San Luis (UNSL)

Sede: Universidad Nacional de San Luis

Nivel educativo: Secundario

Resumen

Las propuestas de libros de texto para la enseñanza de los números negativos, en su gran mayoría, se enmarcan en lo que Cid (2003) establece como modelos concretos: situaciones que simulan ser cotidianas para luego ser representadas por números enteros. En este trabajo se tomarán dos tareas referidas a modelos concretos tomadas del libro digital Hacer Matemática 1/2. Carmen Sessa (2017) para realizar un análisis *didáctico-matemático* que se centre en el cuestionamiento del abordaje de la enseñanza de los números enteros desde los modelos concretos, establecidos por Cid (2003), ante la pertinencia de la enseñanza desde el entorno algebraico determinada por Cid (2003) y Bolea y Cid (2010).

Cid y Bolea (2010) afirman que en el primer año de la escuela secundaria se aborda la enseñanza de los números enteros mediante modelos concretos. Además, sostienen que los estudiantes poseen cierta familiaridad con estos, ya que se representan con deudas y haberes o pérdidas y ganancias, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, etc. Cid (2003) asegura que “[...] a partir de su experiencia con el modelo, pueden conjeturar o, al menos, justificar, “dar sentido”, a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, por analogía, extenderlas al conjunto de los números enteros.” (p. 3).

Por otro lado, Cid y Bolea (2010) afirman que “Esta introducción se realiza en un entorno aritmético, dado que en ese momento todavía no se ha comenzado la enseñanza del álgebra, y se circunscribe inicialmente a los números enteros [...]” (p. 576). Sin embargo, según las autoras, el abordaje aritmético demanda de una permanente contextualización y no permite la justificación de la razón de ser de los números enteros, ya que se desdibuja su estructura algebraica, debido a que los estudiantes, mediante los

modelos concretos, suponen que estos resultan ser magnitudes negativas u opuestas. Además, el modelo aritmético fomenta dificultades vinculadas a la estructura algebraica de dichos números, sin permitir soluciones negativas a ecuaciones. En consecuencia, Cid y Bolea (2010) sugieren el modelo algebraico, ya que este atiende a las propiedades vinculadas a las operaciones o expresiones que se tengan por resolver. A partir de allí, Cid (2003) establece *Valencias* para los signos “+” y “-”, estas son:

- **Predicativos:** Indican la “positividad” o “negatividad” del número;
- **Operativos Binarios:** En representación de las operaciones binarias de suma o resta;
- **Operativos Unarios:** Indica la operación unaria que afecta al sentido “positivo o negativo”, manteniéndolo o transformándolo al sentido opuesto.

Finalmente, Cid (2002) propone dos tipos de modelos: de neutralización y de desplazamiento. El primero se debe a la existencia de entidades opuestas que se neutralizan entre sí, y el segundo se relaciona a lo que, en un principio Janvier (1983), define como el de la recta numérica refiriéndose a los desplazamientos, propiamente dichos, en dicho modelo matemático.

A continuación, presentaremos las actividades que debían ser analizada.

1. Respondé las preguntas según la información de la temperatura y pronóstico en la ciudad de El Calafate, Santa Cruz.

Jueves 9 de julio de 2015: Estado del tiempo a las 10:00 horas.		
Habiendo con precipitación a la vista		
-5,4 °C		
Mañana	Tarde/Noche	
Min: -4 °C	Máx: 2 °C	
Viernes		
Mañana	Tarde/Noche	
Min: -5 °C	Máx: 4 °C	
Sábado		
Mañana	Tarde/Noche	
Min: -1 °C	Máx: 6 °C	
Domingo		
Mañana	Tarde/Noche	
Min: -6 °C	Máx: 0 °C	

- ¿Cuál es la temperatura del jueves 9 de julio a las 10 en El Calafate?
- ¿Cuál es la temperatura máxima pronosticada para ese día?
- Entre el sábado y el domingo, ¿qué día se pronostica mayor temperatura?
- ¿Qué día se pronostica más frío?
- Ordená de menor a mayor las temperaturas mínimas pronosticadas para los días viernes, sábado y domingo.

Imagen 1: Página 60 del libro digital Hacer Matemática 1/2. Carmen Sessa (2017)

Aquí se debía clasificar al modelo concreto como de neutralización o de desplazamiento, como así también, el tipo de signo según las valencias.

Consideramos que nos enfrentamos a una tarea cuyo modelo concreto es el de desplazamiento puesto que se debe identificar la posición en la que se encuentra cada número (relacionados con temperaturas). Asimismo, este modelo contribuye a la comparación de números enteros mediante su ubicación en la recta numérica.

Continuando así, al observar temperaturas mínimas, máximas o “bajo cero”, afirmamos que el signo influyente en esta situación es el predicativo, puesto que a partir del signo que poseen las temperaturas se logra predecir cuán frío hace en El Calafate, particularmente.

4. Cecilia trabaja con una planilla de cálculo. En la columna A puso diferentes números. La columna C la definió como la suma de las columnas A y B, y quiere que en ella siempre aparezca el número 500.

- a. Completá la columna B para que al hacer la suma con el número correspondiente de la columna A, el resultado sea 500.



	A	B	C
1			$C = A + B$
2	100		500
3	200		500
4	300		500
5	400		500
6	500		500
7	600		500
8	700		500
9	800		500

- b. ¿Siempre es posible encontrar números para poner en la columna B? ¿Cómo los encontrás?

Imagen 2: Página 71 del libro digital Hacer Matemática 1/2. Carmen Sessa (2017)

Aquí se esperaba que se fundamente acerca del tipo de trabajo (aritmético o algebraico) que se debe realizar para la resolución de la tarea. Consideramos que se realiza un trabajo meramente algebraico debido a que se utilizan sumandos para los números enteros positivos (es decir, sumarle 400 al 100 para obtener 500); en segundo lugar, en la aparición de números enteros negativos surge la existencia propiamente dicha del “opuesto de un número”. Esta segunda situación, deja en evidencia que se deja de lado a sumandos y sustraendos que solo se circunscribe a un cálculo aritmético.

Palabras clave: números enteros / modelos concretos / entorno aritmético / entorno algebraico

Bibliografía

- Cid, Eva** (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *Pre-publicaciones del Seminario Matemático “García de Galdeano”*, 25.
- Cid, Eva y Bolea, Pilar** (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Difusser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (575-594). IUFM de l'académie de Montpellier.
- Janvier, Claude** (1983). The understanding of directed numbers, *Proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of PME*, 295-300.
- Sessa, Carmen** (Coord.) (2017). *Hacer matemática 1/2*. Estrada.

Construcción del sentido estadístico a través de la Inferencia Informal

ADRIANA MAGALLANES

amagallanes@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

LILIANA TAUBER

estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL - FHUC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto y Universidad Nacional del Litoral

Nivel educativo: Posgrado

Resumen

Diversos autores de Didáctica de la Estadística (Batanero, 2005; Valenzuela-Ruiz *et al.*, 2023) proponen la introducción del razonamiento inferencial informal como una forma de dar sentido a los conceptos exploratorios y descriptivos, previos a la inferencia, con el objetivo de brindar sustento conceptual a las metodologías y procedimientos que se aplican cuando se realizan estimaciones o cuando se prueban hipótesis.

Asimismo, otros investigadores propician la introducción de actividades de inferencia informal en etapas tempranas (Alsina y Vásquez Ortiz, 2016), para favorecer la interacción de razonamientos estocásticos, que habilitan distintas habilidades inmersas en el pensamiento crítico (Garfield, Zieffler y Ben-Zvi, 2014; Gal, 2019; Weiland, 2017, Tauber *et al.*, 2022). Al mismo tiempo, Pfannkuch, Ben-Zvi y Budget (2018) reconocen que la modelización estadística, está emergiendo como un ambiente fértil desde el cual promover y aprender sobre los procesos de razonamiento estadístico de los estudiantes. Este enfoque, permite establecer relaciones con significado entre las ideas fundamentales del análisis exploratorio de datos y de la inferencia estadística, permitiendo construir paulatinamente el sentido de conceptos asociados con la Probabilidad (Batanero *et al.*, 2019). Todas estas relaciones intervienen en los procesos de construcción del sentido estadístico y favorecen el pensamiento estadístico (Batanero *et al.*, 2013).

Para llevar adelante procesos de pensamiento estadístico es necesario alfabetizar estadísticamente, tanto a estudiantes como a profesores, y en ese proceso de alfabetización es necesario poner en funcionamiento distintos componentes cognitivos y actitudinales

que permitan avanzar en procesos de criticidad en torno a las metodologías y técnicas estadísticas (Gal, 2019). En este sentido, la modelización estocástica crítica busca desarrollar el compromiso de los estudiantes en las cuestiones políticas y sociales relevantes para su realidad como ciudadanos en una democracia (Magallanes, 2021).

Siguiendo estos lineamientos y contemplando los distintos constructos didácticos que se ponen en relación a través de los enfoques referidos, se han organizado y planificado dos cursos, de 20 horas cada uno, que se desarrollan en el marco de la Especialización en Didáctica de la Matemática. Dichos cursos están vinculados con la construcción del sentido estocástico y con el problema de la vinculación de contenidos de Probabilidad y Estadística, y se planifican, desarrollan y evalúan de manera colaborativa entre dos equipos docentes de la Universidad Nacional del Litoral y de la Universidad Nacional de Río Cuarto, abonando al carácter interinstitucional de la Especialización.

Atendiendo a las recomendaciones de los autores referidos previamente, uno de los principales objetivos del primer curso es incentivar la reflexión y la problematización acerca del sentido que tiene enseñar y aprender conceptos e ideas estocásticas para un ciudadano y un profesional que utilice y produzca información en el mundo actual. En la misma línea, en el segundo curso se incentiva la reflexión y la problematización sobre la necesaria articulación de los conceptos estocásticos, de modo de propiciar una comprensión significativa de la inferencia estadística y de la toma de decisiones que se realiza con base en la misma.

Asimismo, ambos cursos se desarrollan en modalidad taller, transitando un continuo en el que, en el primer curso, se ilustran las ideas estocásticas fundamentales y sus relaciones conceptuales, a través de diversos proyectos o secuencias didácticas orientadas a distintos niveles educativos. Y, en el segundo curso, se particularizan conocimientos vinculados a las ideas fundamentales de distribución, variabilidad y muestreo aleatorio, como base de la inferencia estadística, a través de la modelización estocástica como proceso articulador.

Para la aprobación del primer curso, se debe diseñar una tarea o un proyecto de modelización para la enseñanza de Estadística, centrado en algunas ideas estocásticas fundamentales y en conceptos asociados a las mismas, de manera que pueda ser implementada en un curso en el que los docentes desempeñan su labor. Además, se debe realizar un análisis de contenido desde el punto de vista didáctico, utilizando constructos y categorías desarrolladas en el curso, así como también un análisis conceptual, desde la Estadística propiamente dicha. Para la aprobación del segundo curso, se debe seleccionar o elaborar una tarea o proyecto de modelización que promueva la integración de distintos tipos de razonamientos asociados con la Inferencia Estadística Informal. También, los cursantes deben realizar un análisis de la misma desde las distin-

tas dimensiones del razonamiento y/o pensamiento estadístico, reconocidas en el campo de la Educación Estocástica.

Palabras clave: sentido estocástico / modelización estocástica crítica / razonamiento inferencial informal / ideas estadísticas fundamentales

Bibliografía

- Alsina, Angel y Vásquez Ortiz, Claudia** (2016). La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 46-52.
- Batanero, Carmen** (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Batanero, Carmen Díaz, Carmen, Contreras, José y Roa, Rafael** (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Batanero, Carmen, Begué, Nuria, Gea, María Magdalena y Roa, Rafael** (2019). El muestreo: una idea estocástica fundamental. *Suma*, 90, 41-47.
- Gal, Iddo** (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.
- Garfield, Joan, Zieffler, Andrew y Ben-Zvi, Dani** (2014). Developing students' reasoning about samples and sampling variability as a path to expert statistical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 327-342. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9541-7>
- Magallanes, Adriana Noemí** (2021). *Empoderamiento de estudiantes en el contexto de un Escenario de Modelización Estocástica Crítico* (tesis de doctorado). Universidad Nacional de Córdoba.
- Pfannkuch, Maxine, Ben-Zvi, Dani y Budgett, Stephanie** (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM Mathematics Education*, 50 (7), 1113-1123. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2>
- Tauber, Liliana, Redondo, Yanina, Santellán, Silvana y Cravero, Mariela** (2022). Dimensiones del pensamiento estadístico asociada a la exploración de índices sociales. *ICOTS 2022 Proceedings. International Association for Statistical Education*. https://iase-web.org/icots/11/proceedings/pdfs/ICOTS11_178_TAUBER.pdf?1669865531
- Valenzuela-Ruiz, Silvia, Batanero, Carmen, Begué, Nuria, Garzón-Guerrero, José** (2023). Conocimiento didáctico-matemático sobre la distribución de la media

muestral de profesorado de bachillerato en formación. *Uniciencia*, 37(1), 1-20.

<http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.3>

Weiland, Travis (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 33-47.

El campo aditivo de los números enteros en la matemática y su enseñanza

KAREN ANAHI DILEO

Karen.dileo@comunidad.unne.edu.ar

DIEGO FRANCISCO VILOTTA

diego.vilotta@comunidad.unne.edu.ar

Universidad Nacional Del Nordeste (UNNE)

Sede: Universidad Nacional del Litoral

Nivel educativo: Universitario

Resumen

El trabajo presentado surge del interés por estudiar el campo aditivo de los números enteros, teniendo en cuenta la construcción del sentido que realizamos en nuestra formación docente y, a su vez, en nuestro rol como formadores a la hora de decidir qué propuestas presentes en los libros de textos del nivel secundario tomar para llevarlas al aula. Es decir, qué relación hay entre lo que aprendemos en nuestro paso por la universidad y lo que necesitamos como profesionales para estar frente al aula.

Tenemos presente que estos conocimientos, en cualquiera de los niveles educativos, muchas veces “se presenta como un monumento con valor por sí mismo, que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan casi nada sobre sus razones de ser, ni actuales ni del pasado” (Chevallard, 2013, p.164). Al presentar el concepto de esta manera puede provocar que los estudiantes solo memoricen las reglas aportadas por el docente sin ningún tipo de interpretación, causando dificultades a la hora de emplearlos para resolver problemas, además de tener pocas herramientas para justificar los resultados obtenidos. En este sentido Eva Cid (2015, p46) en su tesis menciona que: “El olvido de dichas reglas y la ausencia de un modelo que les permita rehacerlas adecuadamente provoca reconstrucciones o reinterpretaciones erróneas en las que se aplican las reglas de una operación a otra distinta o sólo se recuerda parte de la regla, etc.”. Por otro lado, el uso de diferentes contextos - intra y extramatemático- para introducir o trabajar los números negativos, puede provocar la aparición de obstáculos para la comprensión y anticipación de las propiedades válidas en este nuevo conjunto, sumado a aquellos obstáculos epistemológicos derivados de las concepciones que ya tienen los es-

tudiantes sobre los números -naturales- y que de una u otra manera intentan hacer encajar con los números enteros.

Por eso, hablar del conjunto de los números enteros exige una reconstrucción del concepto de número. No se trata de añadir más información a la que ya se posee, sino de modificar sustancialmente el concepto de número que se tiene, asumiendo que muchas propiedades fundamentales, que eran válidas en el campo de números conocidos hasta ahora ya no lo son en el nuevo conjunto que se está estudiando.

Es por esto que estudiamos el modo en que se presentan los números enteros y sus operaciones en los libros del nivel superior, como en Gentile (1976) y Trejo (1968), y las propuestas de enseñanza que hay en libros de texto para la introducción de los números enteros en el campo aditivo. Para este último se consideraron varios libros del nivel secundario, entre ellos a Sessa (2015), Effenberger (2013), Broitman e Itzcovich (2017) y Kurzrok (2017).

Palabras clave: números enteros / contextos / números negativos / formación docente

Bibliografía

- Broitman, Claudia** (Coord.), **Itzcovich, Horacio** (Coord.) (2017). *Matemática en Secundaria 1.º CABA/2.º ES*. Santillana.
- Chevallard, Yves** (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.
- Cid Castro, Eva** (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números Negativos* (tesis doctoral). Universidad de Zaragoza.
- Effenberger, Pablo** (2013). *Matemática II*. Kapelusz.
- Gentile, Enzo** (1976). *Notas de álgebra I*. Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Kurzrok, Liliana** (Coord.) (2017). *Matemática 2: Nuevas Miradas*. Tinta Fresca.
- Sessa, Carmen** (Coord.) (2015). *Hacer Matemática*. Estrada.
- Trejo, César** (1968). *El concepto de número*. Departamento de Asuntos Científicos, Unión Panamericana.

El problema de la validación en Matemática

La validación de proposiciones en la entrada a la universidad: complejidad ontosemiótica de las prácticas de validación pretendidas

BETTINA MILANESIO

bettinamilanesio@gmail.com

MARÍA ELENA MARKIEWICZ

mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto UNRC

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto. UNRC.

Nivel educativo: Secundario y Superior

Resumen

Los procesos de validación constituyen una actividad inherente y fundamental del quehacer matemático, por lo que resulta crucial que los estudiantes se involucren en ellos en los diferentes niveles educativos (Balacheff, 2000; Barreiro *et al.*, 2009; Stylianides *et al.*, 2016). En línea con Balacheff (2000) concebimos los procesos de validación como una actividad que persigue asegurar la validez de una proposición mediante el uso de una explicación, prueba o demostración. La demostración, en particular, es considerada el tipo de prueba dominante en matemáticas, a partir de la cual se corrobora la veracidad de una proposición mediante argumentos deductivos (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019). Asimismo, la demostración es considerada un proceso difícil de enseñar y aprender (Stylianides y Stylianides, 2017).

En nuestra investigación partimos de una problemática asociada a las dificultades que evidencian estudiantes que ingresan al nivel universitario para validar proposiciones matemáticas y, en particular, para comprender y desarrollar demostraciones. Esta problemática, que hemos vislumbrado en la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) (Milanesio *et al.*, 2023; Peparelli *et al.*, 2011) también ha sido reconocida por diferentes investigadores en el área de Educación Matemática (Hanna y De Villiers, 2012; Mariotti *et al.*, 2018; Stylianides y Stylianides, 2017). Esto nos llevó en una primera instancia de la investigación a indagar los procesos de validación que desarrollan estudiantes del último año de escuelas secundarias de la ciudad de Río Cuarto (sexto año, 17-18 años) para poder caracterizarlos y comprender su relatividad contextual

(Markiewicz *et al.*, 2021). En este trabajo, utilizamos herramientas del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2019) para analizar los objetos y procesos emergentes de las prácticas logradas por dichos estudiantes, así como también, los conflictos semióticos puestos en evidencia. Los principales resultados muestran que los estudiantes mayormente desarrollan procesos de validación basados en la acción y la ostensión, lo cual nos permitió plantear unas primeras hipótesis sobre posibles distancias entre las prácticas de validación logradas por estos estudiantes respecto de las pretendidas en la entrada a la universidad.

Continuando con esta línea, para el presente trabajo nos propusimos profundizar en los significados institucionales pretendidos sobre los procesos de validación que se promueven en diversos materiales de asignaturas del primer año de las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática en la UNRC. Para ello, empleamos herramientas del EOS, fundamentalmente la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (utilizada en trabajos como Markiewicz y Etchegaray, 2017, 2018), ya que nos permite evidenciar la complejidad ontosemiótica de las prácticas de validación que se plantean en dicho contexto y proveer nuevas interpretaciones a las dificultades de los estudiantes.

Los principales resultados muestran un uso predominante de demostraciones en los materiales de trabajo, por lo que, seleccionamos y analizamos algunas demostraciones representativas que se promueven en cada asignatura. El análisis efectuado nos permitió evidenciar objetos, relaciones y procesos que, en muchas ocasiones, están ocultos en las prácticas planteadas en materiales que utiliza un docente, y que son necesarios movilizar para que los estudiantes puedan avanzar en la comprensión y construcción de las demostraciones pretendidas. Además, este estudio nos permitió constatar ciertas distancias entre los procesos de validación logrados por estudiantes del último año de escuelas secundarias (Markiewicz *et al.*, 2021) y el pretendido en el ingreso al nivel universitario. Particularmente, damos cuenta que, en este último nivel, no se recuperan, en general, los modos de validar que los estudiantes utilizan habitualmente en el nivel secundario, lo que plantea la necesidad de repensar las prácticas de validación que se pretenden en cada ámbito, con el fin de avanzar en una mayor articulación entre los dos niveles.

Finalmente, consideramos que este estudio constituye un paso inicial fundamental desde nuestra perspectiva para comprender las dificultades que enfrentan los estudiantes con la demostración y pensar así en procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva e instruccional en los primeros espacios del nivel universitario, a los fines de articular con lo que los estudiantes traen del nivel secundario.

Palabras clave: validación matemática / demostración matemática / enfoque ontosemiótico / estudiantes universitarios

Bibliografía

- Alfaro Carvajal, Cristian, Flores Martínez, Pablo y Valverde Soto, Gabriela** (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, 33(2), 55-75. <https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5>
- Balacheff, Nicolás** (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente. <https://hal.science/hal-00520133/document>
- Barreiro, Patricia, Falsetti, María Cristina, Formica, Alberto, Marino, Tamara y Mellincovsky, Diana** (2009). Estudio cualitativo del aprendizaje de la validación en matemática: avances en base al análisis de protocolos de clase. *Educación Matemática*, 23, 1-17. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8833108>
- Godino, Juan, Batanero, Carmen y Font, Vicent** (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Hanna, Gila y de Villiers, Michael** (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1
- Mariotti, María Alessandra, Durand Guerrier, Viviane y Stylianides, Gabriel** (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education* (pp. 75-89). Routledge. https://www.researchgate.net/profile/Maria-Alessandra-Mariotti/publication/331829127_Argumentation_and_proof/
- Markiewicz, María Elena y Etchegaray, Silvia** (2017). Análisis de objetos, procesos y conflictos semióticos en prácticas algebraicas de primer año de la universidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/45273>
- Markiewicz, María Elena y Etchegaray, Silvia** (2018). La comprensión de textos: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Contextos de Educación*, 24, 41-54. <http://www2.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos/article/viewFile/>
- Markiewicz, María Elena, Etchegaray, Silvia y Milanesio, Bettina** (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(62). <https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/232>

- Milanesio, Bettina, Burgos, María y Markiewicz, María Elena** (2023). Significados pragmáticos de la demostración matemática en estudiantes universitarios. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 371–378). SEIEM. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9519831>
- Peparelli, Susana, Zon, Nora, Bigolín, Sabina y Matos, Noelia** (2011). El pasaje del nivel medio al nivel universitario: un estudio en una asignatura de primer año del profesorado en matemática. *Educación Matemática*, (1), 38. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10229>
- Stylianides, Andreas, Bieda, Kristen y Morselli, Francesca** (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En A. Gutierrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *Second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 315-351). Sense Publishers. <http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/43604/1/102.pdf#page=333>
- Stylianides, Gabriel y Stylianides, Andreas** (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119-127. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-017-9782-3>

Análisis didáctico matemático de la actividad matemática generada por un problema que requiere la elaboración de una relación general

ELENA FERRO

evfo42@gmail.com

Universidad Nacional de la Patagonia Austral - UNPA

MARÍA ELENA MARKIEWICZ

mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto - UNRC

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto - UNRC

Nivel educativo: Secundario

Resumen

Si se parte de la premisa de que la resolución de problemas es un aspecto fundamental del quehacer matemático destacamos, en este trabajo, la importancia de aquellos problemas que habilitan la formulación de una conjetura, particularmente, de una relación general.

Ahora bien, el desarrollo del Trabajo Final Integrador de la carrera de Especialización en Didáctica de la Matemática se convierte así en un espacio de posibilidad de indagación y reflexión de este tipo de situaciones puestas a funcionar en el contexto específico de mi propio desarrollo profesional.

Desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Panizza, 2005, Markiewicz, 2005, Lakatos, 1978), así como desde los diseños curriculares de nuestro país, se destaca la importancia y la necesidad de plantear, en el ámbito escolar, situaciones que promuevan la formulación de conjeturas (en particular, afirmaciones de carácter general) y de crear condiciones para desarrollar un proceso de validación de las mismas, que comience ya desde su elaboración. Sin embargo, este tipo de situaciones son escasas en la mayoría de nuestras aulas, muchas veces por no contar con herramientas que nos permitan seleccionar los mejores problemas y otras veces por no tener herramientas para regular la producción de conocimiento en el marco de lo plausible.

Esto nos movilizó a centrar nuestra atención en un problema (el Torneo de Ping pong) particular, planteado por Chevallard *et al.* (1997), que habilita en su proceso de resolución, la construcción y validación de conjeturas. Este problema ha sido objeto de estudio tanto en el Módulo como en la Formación práctica del Trayecto II de la Especialización.

Nos propusimos como objetivo describir y analizar la actividad matemática que se genera en el marco de un tipo de problema que requiere la formulación de una relación general esperando lograr una comprensión profunda de las relaciones puestas en juego por los estudiantes al resolverlo, mediante un análisis ontosemiótico de sus prácticas. Como así también, poder identificar y explicar posibles dificultades de los estudiantes en este proceso de elaboración de conjeturas, en términos de conflictos semióticos (Godino, 20002).

Para ello, consideramos dos resoluciones propuestas por Chevallard *et al.* (1997) y tres resoluciones pretendidas para el nivel secundario a las cuales se les realizó dos niveles de análisis ontosemiótico, identificando objetos primarios, procesos duales y conflictos semióticos potenciales. Esto se constituyó en nuestro marco de referencia para luego llevar a cabo el análisis de las resoluciones de los estudiantes. Luego, con el objetivo de ampliar las explicaciones en torno a algunos tipos de prácticas que ponían de manifiesto ciertos bloqueos producidos por procesos duales no transitados o parcialmente transitados por los estudiantes, se llevaron a cabo entrevistas individuales.

El trabajo realizado nos mostró la gran complejidad ontosemiótica de este proceso de elaboración personal de una relación general, de una conjetura, permitiéndonos tomar conciencia de la variedad de objetos y procesos que los estudiantes pueden poner en funcionamiento. Sostenemos -en tanto docente de la escuela secundaria- que esto se torna necesario para ayudar a superar los posibles conflictos semióticos que se presentan así como para recuperar y poner en diálogo las diferentes resoluciones en el ámbito de la clase.

Palabras clave: conjeturas / análisis ontosemiótico / conflictos semióticos

Bibliografía

Chevallard, Yves, Bosch, Marianna y Gascón, Josep (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Horsori

- Godino, Juan** (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/O4_enfoque_ontosemiotico.pdf.
- Lakatos, Imre** (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Editorial.
- Markiewicz, María Elena** (2005). *El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática* (tesis de Maestría). Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Panizza, Mabel** (2005). *Razonar y conocer: aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Libros del Zorzal.

La validación en el aprendizaje de la Matemática en el nivel secundario

DIEGO ARMANDO RAMIREZ

diegoaramirez88@gmail.com

Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)

Sede: Universidad Nacional del Litoral - UNL

Nivel educativo: Secundario

Resumen

En la enseñanza, el término validación es introducido en el marco de la TSD, y posteriormente se fueron realizando precisiones respecto al significado. En Brousseau (2007, p.23), se define que en las situaciones de validación:

(...) los alumnos organizan enunciados en demostraciones, construyen teorías –en cuanto conjuntos de enunciados de referencia- y aprenden cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer sin ceder ni a argumentos retóricos ni a la autoridad, la seducción, el amor propio, la intimidación, etc. Las razones que un alumno pueda dar para convencer a otro, o las que pueda aceptar para cambiar de punto de vista, serán elucidadas progresivamente, construidas, puestas a prueba, debatidas y convenidas. El alumno no sólo tiene que comunicar una información, sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración.

Por tal motivo, en este trabajo pretendo indagar sobre la validación en las clases de matemática, en aulas del nivel secundario, preguntándome si se pueden identificar momentos de validación, qué rol cumplen, quién aparece como responsable de los mismos, qué recursos de validación se hallan presentes, etc. en relación con lo que menciona Panizza (2003, p.62):

Situaciones de **validación**: dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

Para ello, realicé el análisis de un registro de tres clases de una secuencia de introducción al álgebra a través de la generalización, correspondiente a un 2º año del nivel se-

cundario de la Provincia de Corrientes. La atención estuvo puesta en las características de las consignas y sus posibilidades para que puedan desarrollarse momentos de validación; en el papel que juegan los argumentos utilizados por los alumnos a la hora de validar sus producciones; en las diferentes intervenciones -explícita o implícitamente- que realiza el docente y su influencia a la hora de la toma de decisiones; y por último, en un modelo proporcional -que no corresponde a esta situación- que surge como método recurrente por parte de los alumnos y transcurre durante las tres clases.

Se concluye que, al planificar una secuencia de trabajo, es necesario tener en cuenta con qué recursos contarán los alumnos para validar sus producciones. Además, que validar no sólo puede significar conocer la respuesta correcta, sino también por qué otras no lo son. Finalmente se puede mencionar que es indispensable que, en el trabajo matemático en el aula, se incluya considerar el dominio de validez como uno de los elementos principales que caracterizan un procedimiento.

Palabras clave: teoría de las situaciones didácticas / validación matemática / didáctica de la matemática / análisis

Bibliografía

Brousseau, Guy (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Panizza, Mabel (2003). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y propuestas*. Editorial Paidós.

Análisis de los procesos de validación producidos por estudiantes de distintos años de carreras de la FaCENA- UNNE en el estudio de la paridad del producto de números naturales

LUZ MARÍA LUCRECIA MEZA

luzmeza795@gmail.com

Universidad Nacional del Nordeste- UNNE

Sede: Universidad Nacional del Litoral- UNL

Nivel educativo: Universitario

Resumen

En este trabajo se estudia el tipo de validación que utilizan los alumnos de primer año y último año de las carreras de profesorado de matemática, biología, ingeniería, entre otras, de la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura (FaCENA) a partir de preguntas sobre la paridad de un producto. Se analizan las producciones de estos alumnos, particularmente, sus procedimientos de validación.

El objetivo de este TFI fue detectar la evolución en los aprendizajes que los alumnos han logrado incorporar a lo largo de su trayectoria en el Nivel Superior en relación a la validación/demostración. Para ello, se realiza una comparación entre el tipo de validación empleado por los alumnos ingresantes y el utilizado por los más avanzados en las distintas carreras.

Si bien se observa una evolución positiva en los aprendizajes en los estudiantes del último año de FaCENA en relación a la validación de la propiedad de la paridad del producto de números naturales - evidenciada en los intentos por producir pruebas intelectuales en sus respuestas - es necesario resaltar que la demostración aún no se ha consolidado como la herramienta principal para validar las conjeturas formuladas.

Es necesario fomentar un trabajo de validación que vaya más allá de las constataciones empíricas que suponen las evaluaciones numéricas, a fin de que puedan reconocer la demostración como herramienta indispensable para establecer la validez de una proposición. Por este motivo, consideramos crucial presentar a los estudiantes situaciones que les exijan asumir la responsabilidad de la verdad y apelar a los saberes y conoci-

mientos matemáticos para convencer de manera efectiva, promoviendo así el desarrollo de su pensamiento crítico y su capacidad de argumentación matemática.

Palabras clave: paridad / validación / tipos de prueba / demostración

El problema de la articulación y organización de los contenidos matemáticos

Diseño y análisis de tareas para la enseñanza de las operaciones con racionales desde una mirada estocástica

ALEXIS HILGUERO

alexishilguero@gmail.com

Universidad Nacional del litoral UNL

Sede: Universidad Nacional del Litoral

Niveles educativos: Primario y Secundario

Resumen

La experiencia se enmarca en la presentación del trabajo integrador final de la Especialización en didáctica de la matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la UNL. La misma consiste en la elaboración de tareas para la enseñanza de las operaciones básicas con números racionales mediante nociones estocásticas. Además, se presenta el análisis didáctico de cada propuesta y el empleo de recursos para su abordaje. Las tareas han sido desarrolladas con una mirada constructivista del aprendizaje tomando elementos teóricos del enfoque ontosemiótico y de la teoría de las situaciones didácticas. Las tareas tienden a integrarse con otros marcos de la matemática como ser la geometría y promueven el paso de la aritmética al álgebra a partir de la observación de regularidades. La organización es a través de una secuencia didáctica en la que se integra a la probabilidad desde tres enfoques: empírico, frecuencial y subjetivo. A fin de propiciar el abordaje de los diferentes enfoques se incorporan tareas de experimentación, de simulación y de análisis deductivo. El trabajo está enfocado en estudiantes del segundo y tercer ciclo de la educación primaria y el ciclo básico de la secundaria, de allí que las tareas incorporen la manipulación de objetos y la observación como recursos de aprendizaje. A su vez, la secuencia didáctica promueve el registro como competencia para la validación de respuestas.

Cabe destacar que la propuesta tiene contemplado los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) y el diseño Curricular de la provincia de Santa Fe, es decir, las actividades se ajustan a las competencias que se prevé desarrollar en los niveles educativos para los que se la planteó. Asimismo, puede ser un insumo para los profesorados de Educación Primaria y de Matemática para la formación de futuros docentes.

El Trabajo Final Integrador incluye antecedentes desde lo que se nutren y gestan las actividades propuestas. Gran parte de las actividades articulan varios marcos de la matemática pensando desde el sujeto que aprende, partiendo de situaciones-problemas que poco a poco se van interrelacionando.

Se ha de destacar que el trabajo posee actividades diseñadas por el autor empleando herramientas disponibles en sitios web y que a la vez se puede reproducir en material concreto. Se promueven actividades personales y colaborativas, dando lugar al debate de los estudiantes, particularmente en la búsqueda de regularidades en las frecuencias relativas.

Con este trabajo se quiere compartir una alternativa a la enseñanza de los números racionales desde un enfoque estocástico. Finalmente, se presentan dos tablas para que el lector pueda buscar las tareas con los conceptos estadísticos abordados y los conceptos ligados a los números racionales.

Palabras clave: diseño de tareas / números racionales / análisis didáctico / abordaje estocástico

Bibliografía

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2009) Diseño Curricular para la Educación Primaria.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014) Diseño Curricular Educación Secundaria Ciclo Básico.

Ministerio de Educación de la Nación (2004) Núcleo de aprendizajes prioritarios.

La articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica. Un estudio en la formación del profesor en Matemática

NATALIA DE LOURDES HEREDIA

nataliaheredia818@gmail.com

Universidad Provincial de Córdoba. Sede Regional Bell Ville - UPC

CECILIA ELGUERO

ceciliaelguero02@gmail.com,

Universidad Nacional de Río Cuarto – UNRC

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto

Nivel educativo: Superior

Resumen

Este trabajo corresponde al Trabajo Final Integrador de la Especialización en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Actualmente, está en desarrollo y ha sido aprobado el Plan de Trabajo correspondiente.

El tema de la investigación se relaciona con la problemática de la articulación entre la geometría sintética (GS) y la geometría analítica (GA) en el ámbito de la Formación del Profesor en Matemática (FPM). El interés surge a partir de cuestionamientos relacionados con el qué enseñar y cómo enseñar la GA, tales como: *¿Cómo enseñar la GA sin que los conocimientos matemáticos aprendidos por los estudiantes no se reduzcan a un conjunto desarticulado de técnicas y nociones algebraicas teóricas? ¿Cuál es la razón de ser de la GA? ¿Es necesario articular esta Geometría con la GS? De ser así, ¿Cómo hacerlo?* En particular, en la FPM surgen además otras cuestiones que pueden describirse como: *¿Qué saberes matemáticos tiene sentido enseñar en la formación docente inicial y cómo realizarlo? ¿Cómo problematizar la enseñanza tradicional de la GA de modo de hacer visible el fenómeno de la desarticulación escolar de la GS y la GA?*

A partir de estos *problemas docentes* (Gascón, 2011), y desde el marco teórico y metodológico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se configura el problema de investigación en torno a la siguiente cuestión:

¿Cómo enseñar la Geometría Analítica en el ámbito de la Formación del Profesor en Matemática desde una perspectiva de articulación con la Geometría Sintética?

Tradicionalmente, una meta a alcanzar en la FPM es incrementar sus conocimientos geométricos con la rigurosidad propia del ámbito científico. Sin duda es necesario que todo profesor posea un conocimiento disciplinar que supere los contenidos específicos que deberá enseñar, pero puede correrse el riesgo de establecer una brecha muy grande entre la experiencia matemática vivida en su formación y la experiencia matemática que “puede vivir” en la escuela secundaria. Se considera en tal sentido, que es necesaria en la FPM estudiar en profundidad saberes matemáticos nodales, pero también, desarrollar una mirada crítica sobre ellos y sobre su *transposición didáctica*. Desde esta perspectiva se plantea problematizar qué reconstrucciones en torno a la GA se tendrían que proponer en la FPM para dar a los futuros docentes herramientas matemáticas y didácticas para analizar, proponer y desarrollar procesos de estudios que permitan recuperar *razones de ser* de este sector de la Geometría en la escuela secundaria. En base a ello, se formula el siguiente objetivo general:

Proponer elementos didácticos y epistemológicos que aporten al diseño y desarrollo de propuestas de estudio que posibiliten un abordaje articulado entre la GS y la GA en la FPM y que, a la vez, permitan hacer visible el problema profesional ligado al *por qué*, *para qué* y *cómo* articular dichas geometrías en la escuela secundaria.

Para la consecución de este objetivo, y desde el marco teórico metodológico de la TAD, se están delimitando principios y criterios constitutivos de un posible *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER). Esta delimitación se realiza a través de la revisión de investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática (entre ellos, Gascón, 2002, 2003; Gaita Iparraguirre, 2015; Elguero y Licera, 2016) y el estudio desde una perspectiva histórica y epistemológica de la GA: indagación de cuestiones que están en el origen y desarrollo de la GA (González Urbaneja, 2004, Boyer, 2007, Giovannini, 2013), y análisis de presentaciones de la GA en textos representativos de la matemática sabia (Rey Pastor, Santaló y Balanza, 1955; Lehmann, 1980).

En el conversatorio, se comparten avances realizados en la delimitación del MER a partir del estudio de fuentes consideradas.

Tomando como insumo lo objetivado en el MER se pretende continuar la investigación delineando algunos elementos matemáticos y didácticos que aporten al diseño y desarrollo de *procesos de estudio* para la FPM en torno a la articulación entre la GS y la GA, desde la perspectiva considerada en el objetivo general del trabajo.

Palabras clave: geometría sintética / geometría analítica / formación de profesores en matemática / articulación

Bibliografía

- Boyer, Carl** (1987). *Historia de la matemática*. Alianza editorial.
- Elguero, Cecilia y Licera, Rosa Mabel** (2016) La hipérbola. Una actividad de estudio e investigación desde la articulación entre geometría sintética y geometría analítica. En G. Astudillo, P. Willing y M. Dieser (Ed). *Memorias de la VI Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp 357- 365). EdUNLPam. https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2016/08/MemoriasVIREPEM2016_completas.pdf
- Gaita Iparraguirre, Rosa Cecilia** (2015). *El paso de la geometría sintética a la geometría analítica*. [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Valladolid.
- Gascón, Josep** (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.
<https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf>
- Gascón, Josep** (2003). Efectos del «autismo temático» sobre el estudio de la geometría en secundaria. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Suma*, 44, 25-34. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/44/025-034.pdf>
- Gascón, Josep** (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa, RELIME*, 14(2), 203-231. <https://relime.org/index.php/relime/article/view/259>
- Giovannini, Eduardo** (2013) *La concepción axiomática de la geometría de David Hilbert (1891-1905)*. [Tesis doctoral no publicada.] Universidad de Buenos Aires.
- Gonzalez Urbaneja y Pedro Miguel** (2004). *Los orígenes de la geometría analítica*. Fundación Orotava de Historia de la Ciencia.
- Lehmann, Charles** (1989). *Geometría Analítica*. (13° ed.) Limusa/NORIEGA Editores.
- Rey Pastor, Julio, Santaló, Luis y Balanzat, Manuel** (1959). *Geometría Analítica*. (4ta ed.) Kapelusz.

El proceso de modelización algebraico-funcional. Una propuesta didáctica para la educación secundaria

WILLIAMS NOEL URIBE

wiliams_uribe@hotmail.com

FLAVIA BUFFARINI

fbuffarini@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto – UNRC

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto – UNRC

Nivel educativo: Secundario

Resumen

La propuesta que se presenta corresponde al plan de trabajo del Trabajo Final Integrador (TIF) de la Especialización en Didáctica de la Matemática, desarrollado en el marco de un posgrado interinstitucional entre las Universidades Nacionales de Río Cuarto (UNRC), de San Luis (UNSL) y del Litoral (UNL). El problema de investigación de este TIF gira en torno a cómo diseñar una propuesta para los últimos años de la educación secundaria que, a partir de resignificar el trabajo en los dos primeros niveles de modelización algebraico-funcional, posibiliten la construcción de diferentes praxeologías y que, junto a las nuevas relaciones que se construyan, habiliten incluso a la ampliación de estos niveles.

Este plan de trabajo busca no solo abordar una problemática concreta en la enseñanza de la matemática, sino también contribuir al desarrollo teórico-metodológico en el campo de la didáctica de esta disciplina. El mismo se desarrolla en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que postula que toda actividad matemática puede expresarse mediante procesos de modelización y, para el trabajo de investigación que se pretende realizar, cobran protagonismo los recorridos de estudio e investigación (REI), como modelo de tipo de actividad que permite desarrollar procesos de estudio de las matemáticas que se organicen a través de cuestiones, dando lugar a procesos más amplios y articulados.

El trabajo tiene sus cimientos en tres antecedentes fundamentales: en primer lugar la Tesis Doctoral de Ruiz Munzón (2010), que en el ámbito de la Teoría Antropológica

de lo Didáctico (TAD) aborda las dimensiones epistemológica, ecológica y económica de la modelización algebraico-funcional; el trabajo de Fonsec *et al.* (2014), que presentan un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) buscando situar a la modelización algebraico-funcional como una herramienta que permite articular y dar sentido a la matemática escolar. Los autores describen tres niveles para caracterizar esta modelización y propone una posible organización de las praxeologías, lo que implica un desarrollo progresivo de las mismas y su relativa completitud a medida que se avanza en los distintos niveles de la modelización funcional. Por último, el trabajo final del curso "Las funciones como instrumento de articulación" de Canale *et al.* (2023), que implicaba el diseño y análisis de tareas relacionadas con la modelización algebraico-funcional.

Los objetivos del TIF incluyen realizar un análisis didáctico matemático de tareas relacionadas con la modelización algebraico-funcional, diseñar una propuesta didáctica para estudiantes de secundaria que permita la construcción de modelos matemáticos diferentes a los que se tienen disponibles, hacer interactuar diferentes modelos funcionales y los diferentes registros que los traducen, resignificar técnicas funcionales y gráficas, asignar nuevos significados a los parámetros de las funciones y promover la elaboración de nuevas relaciones como parte del proceso de modelización funcional. Se propone realizar dos tipos de análisis: uno a priori que permita caracterizar los objetos matemáticos y las posibles prácticas que se llevarán a cabo en relación con el MER asumido, centrándose en cómo provocar y sostener la actividad planificada en el aula; y otro a posteriori que evalúe las posibilidades de la propuesta implementada, en condiciones escolares, en cuanto a la construcción de conocimientos relacionados con la modelización funcional a partir de las producciones de los estudiantes.

Por último, el plan de actividades se divide en varias etapas que incluyen: adentrarse en el marco teórico de la TAD, profundizar el análisis didáctico realizado en el trabajo final del curso "Las funciones como instrumento de articulación", diseñar y analizar nuevas tareas, diseñar y analizar a priori una propuesta de estudio, tomando como marco los REI, que apunte a la construcción y modelización funcional, considerando el aula de matemáticas como espacio social de construcción de conocimiento, y finalmente, la implementación y evaluación de la propuesta didáctica en el aula.

Palabras clave: modelización algebraico-funcional / Teoría Antropológica de lo Didáctico / recorridos de estudio e investigación / análisis didáctico

Bibliografía

- Fonseca Bon, Cecilio; Gascón Pérez; Josep; Oliveira Lucas, Catarina.** (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 289-318. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1732>
- Ruiz Munzón, Noemi.** (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. (Tesis doctoral). Departamento de Matemática, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Canale, Dayana; Leiria, Natalia; Romero, Florencia; Uribe, Williams.** (2023). Las funciones como instrumento de articulación. Especialización en Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Río Cuarto. <https://docs.google.com/document/d/1bk-8X4HqDzCB-79sNwZRfdOv7JDE7Zz-lpcU-wjb4dw/edit>

Un estudio ontológico-semiótico para gestionar prácticas matemáticas: un caso de prácticas aritméticas-algebraicas

LÍA ANDREA VÁZQUEZ

lia_vqz@hotmail.com

Universidad Nacional de la Patagonia Austral. Unidad Académica Caleta Olivia. UNPA-UACO

SILVIA CATALINA ETCHEGARAY

setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto – UNRC.

Sede: Río Cuarto

Nivel educativo: Superior

Resumen

En el marco del trabajo de Formación Práctica III de la Especialización en Didáctica de la Matemática, se implementó -en un aula de la formación docente inicial del Profesorado en Matemática de la UNPA-UACO- una situación que permite abordar, mediante una reflexión sobre el quehacer matemático que los estudiantes despliegan, la compleja articulación aritmética álgebra, a saber: ¿Para qué valores de n , $n^3 - n$ es múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6? Para ello, en ese momento, se realizó un exhaustivo análisis de la misma, que contempló un diverso abanico de resoluciones posibles, desde las aritméticas más rudimentarias hasta las algebraicas más abstractas.

En dicha implementación se puso en evidencia una problemática docente asociada a la gestión de la clase que podría describirse como la dificultad para “poner en diálogo” las prácticas aritméticas y algebraicas emergentes en tiempo real al resolver la mencionada situación. Es entonces que surgieron los siguientes interrogantes:

¿Por qué todo lo anticipado sobre las posibles resoluciones de la situación no resultó suficiente a la hora de tensionar la validación de las prácticas (o de las conjeturas) construidas por algunos estudiantes a partir de un trabajo aritmético?

¿Otra manera de describir la articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas hubiera ayudado a fortalecer el análisis realizado?

¿Qué otras herramientas ofrece la didáctica de la matemática para ayudar a fortalecer la gestión docente que posibilite transitar por un tipo de trabajo matemático como el que se intenta desarrollar en estos espacios curriculares?

Para intentar responder los interrogantes planteados, y tomando herramientas que nos provee el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, (2012)), es que se decide ampliar el análisis a priori realizado, con un estudio ontológico-semiótico a tres tipos de prácticas matemáticas pretendidas. Godino (2003) define el análisis ontológico-semiótico como la indagación de los significados puestos a funcionar a partir de la transcripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer una práctica matemática, para un interpretante potencial (análisis a priori). Así mismo, Godino (2002, p.250) plantea que esto puede “permitir formular hipótesis sobre potenciales *conflictos semióticos*, los cuales son entendidos en el EOS, como una disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)”.

A partir de esto último se delinearon los objetivos del Trabajo Final Integrador:

- Poner en valor la importancia de un estudio ontológico-semiótico a diversas prácticas que genera una situación problema, como una manera de aportar al docente seguridad matemática y flexibilidad al momento de gestionar las interacciones entre las prácticas personales –actuativas y discursivas– que los estudiantes ponen a funcionar, durante el desarrollo de la clase.
- Explicar, por medio del análisis de conflictos semióticos potenciales, ciertas dificultades a las que podrían enfrentarse los estudiantes –futuros profesores– para validar algebraicamente conjeturas construidas a partir de tareas que se resuelven en el campo de la aritmética.

Las prácticas seleccionadas para realizar el estudio fueron tres, una que bascula entre los contextos numérico, aritmético y algebraico, una que “vive” en el contexto numérico con algunas transformaciones a lo aritmético, y por último, otra que se desarrolla completamente en el contexto algebraico.

El análisis ontológico-semiótico consistió en la división de cada práctica en diferentes unidades de análisis, detectando las funciones semióticas involucradas en cada una de ellas, lo que permitió poner al descubierto la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática desarrollada, así como también detectar potenciales conflictos semióticos en las mismas. De esta manera se trata de otorgar al docente, mayor seguridad y “flexibilidad” para gestionar los momentos colectivos de la clase y prever momentos de posibles diálogos entre estudiantes, basados en la superación de los conflictos potenciales detectados. Es decir, se intenta que este espacio colectivo posea el mayor grado de ido-

neidad epistémica e interaccional que favorezca a la apropiación de conocimiento matemático en un ambiente de producción colectiva.

Palabras clave: formación docente / análisis ontosemiótico / conflictos semióticos / articulación aritmética-álgebra

Bibliografía

- Godino, Juan** (2003). *Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad Nacional de Granada. <https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>
- Godino, Juan Díaz** (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 22, 237-284.
- Godino, Juan Díaz, Batanero, Carmen y Font, Vincent** (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En D. I. Calderón (Ed.), *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas* (pp.47-78). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://www.researchgate.net/publication/291345108_Un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_la_instruccion_matematica

Estudio de una propuesta didáctica en torno a la noción de máximo común divisor: una posibilidad de repensar la articulación entre la aritmética y el álgebra

DAYANA CANALE

dcanale@exa.unrc.edu.ar

MARÍA EUGENIA FERROCCHIO

mferrocchio@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto. UNRC

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto

Nivel educativo: Secundario

Resumen

La síntesis que aquí se presenta corresponde al plan del Trabajo Final Integrador (TFI) de la Especialización en Didáctica de la Matemática, carrera de posgrado cursada en la UNRC. En el mismo, se propone retomar el trabajo iniciado en el curso *El pasaje de la Aritmética al Álgebra: un problema de articulación*, dictado en el tercer trayecto de esta carrera, el cual se constituyó en una primera aproximación al estudio didáctico-matemático de una secuencia didáctica, que luego fue implementada en un aula de nivel secundario. Esto dio lugar a un primer análisis de prácticas personales que conformaron el trabajo final de Formación Práctica III. Dicha propuesta da cuenta de un recorrido de transformación de significados de ciertos saberes matemáticos correspondientes a la Teoría de la Divisibilidad, problematizando, específicamente, el proceso de algebrización del *divisor común mayor* (significado aritmético de este objeto), teniendo como “horizonte matemático” la construcción del objeto *Máximo Común Divisor* (MCD).

Los resultados obtenidos en espacios de análisis y reflexión sobre distintas tareas que conforman la propuesta, pusieron de manifiesto, por un lado, la fertilidad didáctica de dicha situación en tanto posibilidad de algebrización de ciertos conocimientos aritméticos y; por otro, la necesidad de indagar sobre la distancia existente entre lo que la tarea exige y lo que potencialmente habilita. Específicamente, se puso en evidencia ciertas incompatibilidades entre significados institucionales de los

“objetos de enseñanza” con los “significados personales” ligados al “objeto aprendido”. Así, cobra sentido, para el desarrollo del TFI, indagar el rol de las interacciones entre pares en el proceso de construcción y validación de conocimientos que requieren transitar por distintos *niveles de algebrización* (Godino *et al.*, 2014), las potencialidades y limitaciones de las tareas que se toman como motor de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y, principalmente, la complejidad epistémica que caracteriza al saber en cuestión y su relación con los tipos de problemas que resuelve.

Una primera delimitación de las cuestiones a indagar está regulada por los siguientes interrogantes: ¿Qué características tiene la relación aritmética-álgebra en la actividad matemática que esta propuesta habilita a desarrollar? ¿De qué manera el profundizar el análisis de una propuesta y de producciones de estudiantes aporta elementos para repensar la misma como posibilidad de algebrizar ciertos conocimientos aritméticos que viven en el campo de la Divisibilidad? ¿Será posible determinar criterios/indicadores que se deberían tener en cuenta para rediseñar una potencial situación problemática en pos de generar condiciones para la construcción de nociones específicas de la Divisibilidad?

De esta manera, el objetivo central del TFI gira en torno a la profundización del análisis de una propuesta específica como posibilidad de reconocer/delimitar elementos de significado y conflictos semióticos que ayuden a pensar la superación de las dificultades identificadas en su versión original, reconociendo en este proceso una gran oportunidad de aportar al abordaje del problema de la articulación entre la Aritmética y el Álgebra.

En este sentido, en primera instancia, se distinguieron dos “tipos” de antecedentes que aportan al objetivo explicitado: por un lado, los que permiten reconocer/caracterizar la articulación aritmética-álgebra como un problema didáctico de gran interés y necesidad de desarrollo investigativo -tomando como referencia los aportes de Godino *et al.* (2014), Saiz y Etchegaray (2016), Sadovsky (2003), entre otros- y, por otro, los que apuntan específicamente a develar la complejidad onto-semiótica del objeto emergente de esta secuencia: el MCD -Etchegaray (2001), y Etchegaray *et al.* (2005)-. A continuación, se prevé un recorrido de estudio y reflexión que recupere y ponga en relación los dos tipos de antecedentes mencionados para dar lugar a una reconstrucción del marco referencial desde el cuál se “volverá a interpelar” la propuesta didáctica en cuestión. Esto, tal como se anticipó, es con el fin de aportar conocimiento didáctico-matemático en torno a la compleja problemática de la articulación entre la Aritmética y el Álgebra y, en particular, profundizar el estudio de los elementos de significado que necesariamente

deberían transformarse en la propuesta, para avanzar en la construcción del objeto Máximo Común Divisor.

Palabras clave: articulación aritmética-álgebra / máximo común divisor / elementos de significado / propuesta didáctica

Bibliografía

- Etchegaray, Silvia.** (2001). *Análisis Epistemológico y Didáctico de nociones elementales de la teoría de Números*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Etchegaray, Silvia, Colombo, Silvia, y Paparelli, Susana,** (2005). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de máximo común divisor. En A. Contreras, L. Ordoñez, L. y Batanero, C. (Eds.), *Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 345 - 355). Servicios de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Godino, Juan. D., Aké, Lilia P., Gonzato, Margherita y Wilhelmi Miguel. R.** (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199-219. <https://ensciencias.uab.cat/article/download/v32-n1-godino-ake-gonzato-et-al/965-pdf-es/6105>
- Sadovsky, Patricia.** (2003). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. (Tesis de doctorado). Universidad Nacional de Buenos Aires.
- Saiz, Irma. y Etchegaray, Silvia.** (2016). Clase 1: Iniciación a un estudio didáctico-matemático de la Aritmética. Enseñanza de la Aritmética. Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria. Instituto Nacional de Formación Docente. Ministerio de Educación y Deportes de la Nación.

Escenario de modelización en una escuela secundaria: características y empoderamiento estudiantil

MARCELO JAVIER SOSA

xmarcelososax@gmail.com

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Nivel educativo: Secundario

Resumen

Un escenario de modelización estocástico busca hacer evidentes relaciones entre problemas de la vida diaria y el par estadística-probabilidad. Este escenario se inicia con una situación cotidiana donde el conocimiento estocástico permite observar, explorar, analizar y criticar aspectos relevantes de dicha situación (Magallanes y Esteley, 2022). Cuando este tipo de escenario no solo ofrece oportunidades para el aprendizaje, sino que además habilita espacios para el empoderamiento de los estudiantes, se lo denomina escenario de modelización estocástico crítico (Magallanes, 2021). Según Soler *et al.* (2014), el empoderamiento se entiende como un proceso que implica el crecimiento, fortalecimiento y desarrollo de la confianza individual y comunitaria para impulsar cambios positivos tanto a nivel individual como colectivo. En este conversatorio se comparten los primeros avances realizados en el marco de la elaboración del Trabajo Final Integrador (TFI) de la Especialización en Didáctica de la Matemática. De las opciones propuestas para el desarrollo del TFI, se elige la siguiente: describir una problemática de investigación didáctica relevante, fundamentando su selección tanto desde un punto de vista teórico como metodológico. El objetivo del TFI es describir las características de un escenario de modelización estocástico y analizar cómo se manifiestan los espacios y dimensiones para el empoderamiento estudiantil. Estas dimensiones incluyen lo matemático y/o estocástico, lo social y político, y lo epistemológico (Ernest, 2002; Magallanes, 2021). Se propone, además, examinar estas dimensiones en relación con cinco espacios específicos en los cuales analizar el empoderamiento: 1. Espacios para la expresión, 2. Espacios para la planificación, organización y toma de decisiones, 3. Espacios de acción, investigación y búsqueda de información, 4. Espacios pa-

ra la crítica, autocrítica y reflexión, y 5. Espacios para reformular y/o modificar enfoques y estrategias elegidas. Estos espacios y dimensiones proporcionan un marco integral para el desarrollo académico y el empoderamiento estudiantil en el contexto de una modelización estocástica crítica. Se opta por una metodología cualitativa basada en el Enfoque de la Educación Matemática Crítica, propuesto por Skovsmose y Borba (2004). Estos autores sostienen que la investigación crítica implica no solo explorar lo que es, sino también lo que podría ser. En una investigación crítica, se identifican y relacionan los siguientes elementos: situación dada (SD), situación imaginada (SI) y situación arreglada (SA). La situación dada presenta los aspectos problemáticos, mientras que la situación imaginada desarrolla posibles soluciones. La situación arreglada crea el escenario para implementar las soluciones propuestas. En general, una situación arreglada es una alternativa práctica emergente de la negociación entre el investigador, el docente, estudiantes y posiblemente especialistas, padres o administradores. Durante el curso "El problema de la articulación en probabilidades y estadística" realizado en el marco de la especialización mencionada, se diseña un escenario de modelización estocástico destinado a un sexto año de una escuela secundaria situada en la ciudad de Río Cuarto. Este diseño se constituye en la situación imaginada (Skovsmose y Borba, 2004) que guía el trabajo de campo en el marco del TFI. Esta situación imaginada se propone crear ambientes que faciliten el reconocimiento, por parte del estudiantado, de la utilidad de la estadística en el análisis del estado de salud de un grupo específico de personas. Las diferentes fases de un escenario de modelización estocástico crítico (Magallanes, 2021) estructuran y respaldan las tareas planificadas. En relación a los avances, se ha realizado el trabajo de campo y se encuentra actualmente en proceso de escritura sobre la descripción de lo acontecido en dicho escenario, apelando a las producciones de los estudiantes, filmaciones y notas de campo. Mientras se avanza en esta escritura, se van identificando y reconociendo las dimensiones y espacios para el empoderamiento de los estudiantes en las distintas fases del escenario de modelización vivenciado.

Palabras clave: modelización estocástica / empoderamiento estudiantil / investigación crítica

Bibliografía

Ernest, Paul (2002). Empowerment in mathematics education. *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, 15.

- Magallanes, Adriana** (2021). *Empoderamiento de estudiantes en el contexto de un Escenario de Modelización Estocástico Crítico*. (Tesis de doctorado). Universidad Nacional de Córdoba.
- Magallanes, Adriana y Esteley, Cristina** (2022). Caracterización de un escenario de modelización estocástico crítico y del ciclo de modelización vinculado. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, & A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS11 2022)*. International Association for Statistical Education. DOI: 10.52041/iase.icots11.T14F2.
- Skovsmose, Ole y Borba, Marcelo** (2004). Research methodology and critical mathematics education. En Valero, P. y Zevenbergen, R. (Eds.). *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 207-226). Kluwer.
- Soler, Pere, Planas, Anna, Ciraso-Calí, Anna y Ribot-Horas, Arantxa** (2014). Empowerment in the community: the design of an open indicators system from participatory 340 evaluation processes. *Pedagogía Social. Revista Interuniversitaria*, (24), 49-77. https://doi.org/10.7179/PSRI_2014.24.03

Un análisis didáctico-matemático de tareas que aportan al problema de la articulación entre la aritmética y el álgebra a través del tratamiento algebraico de lo numérico

DAYANA GISEL CANALE

dcanale@exa.unrc.edu.ar

FLORENCIA BELÉN ROMERO SERAFINI

fromeroserafini@gmail.com

URIBE WILIAMS NOEL

uribewiliams@gmail.com

Universidad Nacional de Río Cuarto – UNRC

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto – UNRC

Nivel educativo: Secundario

Resumen

La propuesta que se presenta corresponde al trabajo final del curso El pasaje de la aritmética al álgebra: un problema de articulación, correspondiente al tercer trayecto de la Especialización en Didáctica de la Matemática, carrera de posgrado cursada en la UNRC (Canale *et al.*, 2023).

El trabajo en el curso se organizó en torno a la problematización de la transición entre la Aritmética y el Álgebra poniendo al descubierto que se trata de un proceso complejo producto de transformación de significados de los objetos matemáticos, los cuales pueden ser desnaturalizados mediante el análisis y explicitación de, entre muchos otros aspectos, la progresiva algebrización de los objetos aritméticos.

Durante el desarrollo del mismo se trabajó con diversas situaciones -presentes actualmente en libros de texto del nivel secundario- cuyo análisis didáctico-matemático nos permitió reflexionar en torno al significado personal que le estábamos otorgando para alcanzar niveles superiores de algebrización, pues los conocimientos aritméticos funcionan como punto de partida o punto de apoyo en la configuración del trabajo algebraico que se pretende construir a lo largo de todos los niveles educativos.

Concretamente, el trabajo final de este curso consistió en realizar un análisis didáctico-matemático de dos tareas específicas, poniendo a funcionar las herramientas di-

dácticas emergentes del trabajo colectivo. Por un lado, la primera tarea se caracteriza por incluir en su enunciado ostensivos generales (letras) cuyo significado, como arithmo, se pretende transformar a variable, movilizado por los distintos interrogantes planteados. Asimismo, el análisis realizado permitió hacer explícito que, aún cuando ya en el enunciado aparece un ostensivo que daría la pauta de que se está en un contexto algebraico, las relaciones que se establecen son entre objetos aritméticos, poniendo al descubierto que la algebrización de los objetos aritméticos no solo está determinada por los ostensivos intervinientes sino por su funcionamiento en un determinado sistema de práctica, el cual puede ser descrito a partir del análisis de las relaciones establecidas entre otros tipos de objetos (uso de propiedades, lenguaje, definiciones, argumentaciones, etc.) y los procesos cognitivos transitados en dicha resolución.

Por otro lado, la segunda tarea propone analizar bajo qué condiciones expresiones del tipo “ $m \cdot c + k$ ”, con c variable y, m y k parámetros, cumplen determinadas propiedades (ser impar, ser múltiplo de), poniendo en valor un trabajo con cuantificadores, regulado por el proceso particularización-generalización (Godino *et al.*, 2007), pues el tipo de preguntas planteadas muestra cómo el significado de variable se va enriqueciendo y, consecuentemente, se va avanzando en niveles de algebrización (Godino *et al.*, 2014). Tal tarea requiere de distintos niveles de explicaciones: las respuestas “para todo valor” o “para ningún valor” están asociadas a argumentos generales apoyados en la lectura de información y, para poder responder “para algunos valores” es necesario explicitar las condiciones que tienen que cumplir esos valores, lo que implica avanzar en niveles de algebrización dado que se determinan propiedades sobre nuevos ostensivos.

Podemos decir que el tipo de análisis realizado nos permitió, en primer lugar, explicitar la complejidad ontosemiótica que aporta al estudio del problema de la articulación entre la Aritmética y el Álgebra y, a su vez, reconocer qué tipos de problemas podrían constituirse en escenarios idóneos para la algebrización progresiva de los conocimientos aritméticos que viven en los primeros años del nivel secundario. En este sentido, el abordaje de estas problemáticas institucionales se constituye en algo sumamente necesario de tensionar para poner en evidencia el modo en que estamos entendiendo, como docentes, la producción matemática y su enseñanza.

Palabras clave: articulación aritmética-álgebra / niveles de algebrización/ tratamiento algebraico de lo numérico / transformación de significados

Bibliografía

- Canale, Dayana, Romero, Florencia, Uribe, Williams.** (2023). *El pasaje de la aritmética al álgebra: un problema de articulación*. (Trabajo Final Especialización en Didáctica de la Matemática). Universidad Nacional de Río Cuarto. <https://docs.google.com/document/d/1sDWcJopP5csCcTWOWbsCUOpf4TuiI7iUOZm5NPxjY4U/edit>
- Godino, Juan, Batanero, Carmen y Font, Vicenç.** (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Godino, Juan.** (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- Godino, Juan, Aké, Lilia, Gonzato, Margherita y Wilhelmi, Miguel.** (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199-219. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v32-n1-godino-ake-gonzato-et al/965-pdf-es>

Hacia la construcción de un significado epistémico de referencia sobre la problemática de la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica contextualizado en el nivel secundario

MARIANELA SOSA

msosa@exa.unrc.edu.ar

IRMA SAIZ

irmasaiz28@gmail.com

CECILIA ELGUERO

celguero@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Nivel educativo: Superior y Secundario

Resumen

Este Trabajo Final Integrador (TFI) se encuadra esencialmente en la tipología 3 de las propuestas por la Junta Académica de la carrera Especialidad en Didáctica de la Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto, a saber: Realizar un estudio didáctico-matemático a partir de una problemática de enseñanza de las abordadas en los cursos, no necesariamente planteada en la formación práctica de la misma, que puede o no, incluir una etapa de exploración. En particular, el estudio que se aborda en este TFI se enmarca en la problemática de la articulación entre Geometría Analítica (GA) y Geometría Sintética (GS). Sostenemos que la caracterización de dicha problemática como problema didáctico, analizado en un contexto particular, exige la mirada dialéctica de las prácticas entre la escuela secundaria y la formación inicial del profesor en matemática en este ámbito científico. Asimismo, este problema didáctico fue planteado en el tercer módulo de articulación de la Especialización, específicamente el curso de El problema de articulación entre GA y GS y el cálculo. Dicho curso estuvo caracterizado por un trabajo de reflexión en torno al aporte y potencialidad de abordar problemas planteados en la GS y resueltos por medio de técnicas analíticas, o bien problemas de GA para los cuales se exportan técnicas de GS. De este modo fue posible poner al descubierto que hay una continuidad y

complementariedad entre ambos enfoques geométricos (Gascón, 2002), lo que -según investigaciones didácticas y determinados análisis de la propuesta curricular- no se manifiesta en la escuela secundaria actual ya que se presenta separadamente a la GS en los primeros años y GA en el tramo superior. Nuestro propósito es estudiar, describir, fundamentar y contextualizar esta problemática en nuestro ámbito educativo. Para ello, se propone específicamente para este trabajo avanzar en la construcción de un Significado Institucional de Referencia (SIR) relativo a nuestras instituciones de enseñanza secundaria (Font, 2005) respecto a la problemática citada, el cual es parte esencial para llevar adelante un estudio didáctico-matemático sistémico y contextualizado de dicho problema para mejorar la formación del profesor en matemática.

Nuestro interés es aportar conocimiento didáctico-matemático con la construcción de ese SIR, a partir de la recuperación de antecedentes generados en el seno de la institución Matemática y de la institución Didáctica que hacen visible esta problemática; del estudio sobre la historia y epistemología de la geometría en especial; y del análisis de los currículos actuales. Todo esto en consonancia con la construcción teórica conceptual del SIR caracterizada por Font (2006).

Desde este lugar teórico-metodológico que consideramos de crucial importancia para llevar adelante la indagación del problema propuesto, la construcción de este SIR -que compartiremos en el conversatorio- se constituye en el recorte que configura este TFI y, a su vez, se convierte en fuente de contraste y validación para la continuación de esta investigación didáctico-matemática en nuevos espacios de producción científica.

Palabras clave: articulación / geometría sintética / geometría analítica / profesorado en matemática

Bibliografía

- Gascón, Josep** (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Revista Suma*, 1 (39), 13-25. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf>
- Font, Vincent** (2005). La dimensión dual personal/institucional y el problema del encaje de los objetos personales del profesorado en la teoría de funciones semióticas. En L. Ordóñez Cañada, M..C. Batanero Bernabeu y A. Contreras de la Fuente (Coord.), *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y desarrollo de las Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 69-104). Universidad de Jaén.

El pasaje de la Aritmética al Álgebra: un problema de articulación

SILVIA ETCHEGARAY

setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

CLAUDINA CANTER

ccanter@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) / Escuela Normal Superior J.J. De Urquiza (INFD, Río Cuarto)

MARÍA EUGENIA FERROCCHIO

mferrocchio@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) / Escuela Normal Superior José Manuel Estrada de Alcira Gigena (INFD, Alcira Gigena)

NORA ZÓN

nzon@exa.unrc.edu.ar

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)

Sede: Universidad Nacional de Río Cuarto / Universidad Nacional de San Luis (UNRC/UNSL)

Nivel educativo: Posgrado

Resumen

El presente escrito pretende compartir ideas/experiencias/saberes que, como formadoras de formadores, reconocemos que le otorgaron contenido y forma a un espacio curricular correspondiente a la carrera de posgrado Especialización en Didáctica de la Matemática en la UNRC. Esta propuesta se delimita y configura a partir de nuestros propios trayectos de investigación en Didáctica de la Matemática. La confluencia en espacios específicos de investigación y reflexión sobre nuestras propias prácticas docentes en el Nivel Superior, tanto en la UNRC como en Institutos de Formación Docente, se constituyó en un escenario de posibilidad de indagación en torno a la problemática de la transición de la Aritmética al Álgebra, desde su dimensión epistémica como también en un posible camino para abordar la articulación entre niveles educativos. Específicamente, la indagación de dicha problemática en la formación inicial (de profesores

en Matemática y de Educación Primaria) en nuestras instituciones de enseñanza aportó un tipo de conocimiento sobre la misma que puso en evidencia tanto su relatividad personal, institucional como contextual; eje y motor de desarrollo esencial de la propuesta de este curso.

Por su parte, el marco teórico que sostiene y fundamenta estas compartidas experiencias de investigación, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), considera como uno de sus objetos de indagación y reflexión a la formación de profesores inicial y continua. Y es, en esos ámbitos, donde se han planteado “aspectos complementarios” necesarios de ser considerados en torno a la formación didáctico-matemática de los profesores en Matemática. En efecto, queremos señalar - como orientador de nuestras decisiones para esta propuesta- a “la reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares que se pretende enseñar, y el estudio de las transformaciones que experimentan los mismos para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza” (Godino *et al.*, 2003, p 1). A su vez, Godino *et al.* (2017), reconocen como una dimensión constitutiva de la formación inicial y continua de los profesores la construcción de una mirada reflexiva y analítica sobre el conocimiento matemático de quien está transitando el proceso formativo, dimensión que se constituyó en el eje de planificación y desarrollo de este curso que fue desarrollado en dos sedes de esta Especialización, a saber la UNRC y la UNSL. Ello queda visibilizado en los siguientes objetivos propuestos para el mismo:

- Reflexionar sobre la complejidad que supone abordar los procesos de algebrización de la aritmética, incluyendo tanto la transformación del significado de los símbolos como la caracterización y transformación de problemas aritméticos en situaciones de mayor nivel de algebrización.
- Poner al descubierto potenciales y efectivos conflictos semióticos asociados a la compleja comprensión del uso y funcionamiento de las letras como incógnitas, parámetros o variables en variadas situaciones problemáticas.
- Analizar el funcionamiento del proceso dual de particularización-generalización haciendo visible con qué otros procesos duales conviven dialécticamente tanto en prácticas personales como institucionales.
- Poner en valor el análisis didáctico de prácticas aritméticas y prácticas que en la escuela se reconocen como algebraicas, en tanto producción intelectual que habilita a desnaturalizar la complejidad del problema de la articulación entre la Aritmética y el Álgebra.

A través de la propuesta de este curso se pone de manifiesto el planteo central que queremos compartir en este espacio destacando el rol operativo de la Didáctica de la Matemática para desarrollar el análisis y movilizar la reflexión sobre el “pensar, hacer y

decir matemático”. La misma resignifica, además, la compleja articulación entre la investigación en Didáctica de la Matemática y la formación de profesores, problemática de actual investigación educativa.

Palabras clave: articulación Aritmética-Álgebra / profesores de matemática / relación investigación-formación

Bibliografía

- Godino, Juan; Batanero Carmen y Flores Pablo.** (2003). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Contextualising didactical knowledge on stochastics in mathematics teacher 's training. 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Stellenbosch
- Godino, Juan; Giacomone, Belén; Batanero, Carmen. y Font, Vincent.** (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31 (57), 90-113. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/jQy8nXFVBd9wPYY5R38JFYw/?format=pdf&lang=es>

TALLERES

Datos en acción: construimos sentido estadístico a través de la visualización

LILIANA TAUBER

estadisticamatematicafhuc@gmail.com

SILVANA SANTELLÁN

silvanamsantellan@gmail.com

YANINA REDONDO

yaniredondo@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral (UNL)

Resumen

Para propiciar en los estudiantes distintos procesos de pensamiento estadístico, es necesario que los profesores tengan oportunidad de poner en práctica y vivir su propia experiencia en torno a los procesos de alfabetización estadística que ponen en funcionamiento distintos componentes cognitivos y actitudinales que serán los que propicien el pensamiento estadístico e inferencial. Con ese fin, se pone en práctica un dispositivo didáctico con enfoque STEAM que propicia la reflexión y la problematización acerca del sentido que tiene enseñar y aprender conceptos e ideas estocásticas fundamentales. En la misma línea, se incentiva la reflexión y la problematización sobre la necesaria articulación de los conceptos estocásticos, de modo de propiciar una comprensión significativa de la inferencia estadística y de la toma de decisiones que se realiza con base en la misma.

Palabras clave: ideas estadísticas fundamentales / formación de profesores de matemática / análisis exploratorio / inferencia estadística / enfoque STEAM

Fundamentación de la propuesta

Si bien desde hace décadas se enfatiza en la relevancia de la alfabetización estadística de los ciudadanos, la evidencia indica que los estudiantes culminan la educación secundaria con escasa o nula formación en lo que a razonamiento y a pensamiento estadístico se refiere. La llegada del COVID-19 y de las decisiones oficiales en torno a la pandemia, junto a la irrupción del Big Data (Sosa Escudero, 2019), ha provocado exigencias particulares a la hora de ser un ciudadano estadísticamente culto. Estas exigencias van más allá del conocimiento estadístico y están más centradas en el tipo de pensamiento específico que se requiere para reflexionar críticamente sobre la información estadística, los datos que la sustentan, la forma en que estos han sido obtenidos y así, evaluar la significatividad de la toma de decisiones.

En este sentido, consideramos que una persona estará alfabetizada estadísticamente cuando pueda tomar decisiones basadas en evidencia creíble (Gal, 2019) y para ello, necesita interpretar críticamente la información, realizar comparaciones, identificar tendencias, predecir resultados aleatorios con cierto grado de confiabilidad y/o realizar una crítica bien fundamentada sobre las decisiones tomadas por otros. Dado que esta alfabetización estadística lleva implícita la comprensión de un entramado de conceptos e ideas estadísticas fundamentales (Goetz, 2009; Cabrera *et al.*, 2020; Araneo, 2024), surge la necesidad de diseñar propuestas didácticas que permitan relacionar distintos elementos de conocimiento y disposicionales de la alfabetización estadística (tal como se caracterizan en Gal, 2004, 2019) y, que tengan como objetivo crear condiciones propicias para generar pensamiento estadístico (Cabrera *et al.*, 2020; 2022; Wild y Pfannkuch, 2004).

Frente a esta situación y con el propósito de fomentar un espacio de reflexión metacognitiva del profesorado, en este Taller se proponen actividades que están integradas en un dispositivo con enfoque STEAM (Zamorano *et al.*, 2018), considerando algunas recomendaciones (Franklin *et al.*, 2007), tales como:

- Propiciar el sentido estadístico a partir de relaciones entre elementos de la alfabetización estadística y del pensamiento estadístico;
- usar datos reales obtenidos por los mismos asistentes;
- fomentar la comprensión conceptual de las ideas estadísticas fundamentales más que el mero conocimiento de procedimientos a través del aprendizaje activo y,

- usar tecnología para el desarrollo de la comprensión conceptual y el análisis de datos.

Objetivos del Taller

Propiciar un espacio de reflexión y discusión metacognitiva que permita identificar la riqueza conceptual que puede derivarse de la enseñanza de la Estadística basada en datos reales en contexto.

Poner en práctica un dispositivo con enfoque STEAM que permite relacionar conocimientos de la Estadística con situaciones de modelización en otras ciencias.

Identificar conceptos, ideas estadísticas fundamentales (Goetz, 2009), tipos de razonamientos estocásticos que se propician y las relaciones que pueden establecerse entre todos ellos.

Metodología de trabajo

El dispositivo didáctico que se pone en práctica en este Taller, se basa en una adaptación y ampliación de una tarea, diseñada por Scheaffer *et al.* (1996, p. 99) y analizada en Herrera y Konic (2017), en la que se busca medir, comparar distribuciones y estimar parámetros. Dicha actividad permite relacionar diversas ideas estadísticas fundamentales, tales como: muestreo, datos, variación, resumen, aleatoriedad e inferencia (Araneo y Tauber, 2023). Así, el Taller se desarrolla en torno a cuatro momentos claramente diferenciados:

1. *Primer momento: Muestreo a partir de un contexto.* Se presenta un problema asociado al calentamiento global: el aumento de medusas en los mares y la posibilidad de que éstas presenten un mayor tamaño. A partir de este disparador, se propone a los asistentes que realicen dos tipos de muestreo (subjetivo y aleatorio), de modo de estimar una dimensión característica de las medusas de una determinada especie que hemos dado en denominar: “la colonia de las medusas sonrientes” (ver Figura 1). Con este fin, deben seleccionar de manera subjetiva, una medusa que, a su propio criterio, consideren representativa de la longitud media de todas las medusas representadas en la hoja (en este caso, la población bajo estudio). Luego, se les pide que seleccionen 10 medusas con la misma técnica y, por último, que

seleccionen otras 10 medusas, pero tomadas con un mecanismo aleatorio.

2. *Segundo momento: Recolección y análisis de los datos.* Esta etapa del trabajo permite vivenciar el ciclo de análisis estadístico PPDAC (Pfannkuch & Wild, 2004), desde la obtención de datos (medición de la longitud de cada medusa seleccionada de la población con cada método de muestreo), pasando por la utilización de distintas herramientas digitales (Excel, Geogebra, CODAP u otras) para la carga de datos obtenidos por cada persona. En este momento, se busca que los asistentes realicen el análisis de sus propios datos, utilizando distintos resúmenes estadísticos, y que comparen las dos muestras tomadas, analicen las diferencias y similitudes y elaboren conjeturas tendientes a estimar la longitud promedio de las medusas sonrientes.

3. *Tercer momento: Comparación de tipos de muestreo.* Se propone que los asistentes analicen las muestras obtenidas por todo el grupo y que comparen las tendencias brindadas por las muestras obtenidas con cada tipo de muestreo y luego comparar con los datos de la población (que se les aporta al final de la actividad). Esto no solo permite trabajar con la IEF de muestreo y analizar las bondades del muestreo aleatorio respecto del subjetivo, sino que además sirve como la puerta de entrada para introducir ideas y conceptos asociados a la Inferencia estadística Informal y luego a la Formal. En consecuencia, con los mismos datos y resúmenes se puede trabajar con la estimación puntual y por intervalos de confianza y medir la bondad de las estimaciones a través de las muestras aleatorias y de las subjetivas. En este sentido, se proporciona una experiencia que queda fundamentada en diversos teoremas fundamentales de la Estadística, pero sin necesidad de desarrollar todo el andamiaje matemático que requiere la comprensión de dichos teoremas.

4. *Cuarto momento. Reflexión metacognitiva.* En este momento, se propicia la reflexión sobre las intuiciones erróneas que todos los seres humanos tenemos cuando nos enfrentamos a situaciones aleatorias y de estimación, dado que como se ha mostrado en distintas investigaciones (Scheaffer *et al.*, 1996; Herrera y Konic, 2017), todos tenemos tendencia a sobreestimar cuando se nos presentan gráficos en los que hay figuras que resaltan más (en este caso, las medusas de mayor tamaño se observan más rápidamente que las de menor tamaño, pero estas últimas son las que tienen mayor representatividad en la población que se está estudiando). Asimismo, en este momento, se reflexiona sobre las potencialidades y limitaciones de la propuesta, mostrando la diversidad de conceptos, propiedades e IEF que se pueden integrar a través del desarrollo de toda la experiencia.



Figura 1: Hoja con población de “medusas sonrientes” (adaptado de Herrera y Konic, 2017)

Destinatarios

El taller se ofreció para Profesores de Matemática y/o otros profesionales interesados en la enseñanza de Estadística, así como para estudiantes de carreras de Matemática o Estadística interesados en la Educación estadística. Aunque, la propuesta se puede aplicar con estudiantes de distintos niveles educativos, inclusive con estudiantes de los tres últimos años de educación primaria. Lo aconsejable es que quienes realicen la experiencia, tengan conocimientos básicos de estadística descriptiva, de modo que se pueda realizar en el tiempo de duración del taller (3 o 4 horas), pero si se implementara con estudiantes que recién inician sus estudios de Estadística (a cualquier nivel), se podrían dedicar más horas y podría servir también para introducir conceptos de la Estadística descriptiva.

Reflexiones finales

La formación de profesores en lo que a Estadística se refiere, está aún demasiado atada a la realización de procedimientos y requiere de la vivencia de este tipo de

experiencias en las que se pueda experimentar todo el ciclo de análisis estadístico, a través de la recolección y el análisis de datos, pero teniendo siempre el objetivo final de la Estadística, que es hacer inferencias confiables y válidas. Por ello, destacamos la importancia de implementar propuestas didácticas que han sido diseñadas y probadas específicamente para propiciar la alfabetización y el pensamiento estadístico.

Reconocimiento

Proyecto CAI+D: Estudio exploratorio de las relaciones entre Cultura Estadística y Alfabetización Científica en dispositivos didácticos basados en el enfoque STEAM. UNL.

Bibliografía

- Araneo, Jonatan** (2024) *Concepciones de profesores de matemática sobre medidas estadísticas*. Tesina de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. UTN Avellaneda.
- Araneo, Jonatan y Tauber, Liliana** (2023) Ideas estadísticas fundamentales y conceptos del análisis de datos que relacionan profesores de Matemática. En: L. Tauber, C. Vásquez y J. Pinto Sosa (Eds.) *Educación Estadística para la formación de la ciudadanía crítica. Libro de ponencias de las III Jornadas Latinoamericanas de Investigación en Educación Estadística* (pp. 185-193). Universidad Nacional del Litoral. <https://www.fhuc.unl.edu.ar/educacionestadistica/>
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana y Fernández, Elina** (2020). Educación Estocástica para pensar estadísticamente. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(2), 89-109.
- Cabrera, Gabriela, Tauber, Liliana y Pochulu, Marcel** (2022) La transnumeración como insumo del pensamiento crítico. In S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, & A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistical Education. https://iase-web.org/icots/11/proceedings/pdfs/ICOTS11_179_CABRERA.pdf
- Franklin, Christine, Kader, Gary, Mewborn, Denise, Moreno, Jerry, Peck, Roxy, Perry, Mike, & Scheaffer, Richard** (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education [GAISE] report: A preK-12 curriculum*

- framework*. American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/gaise/gaiseprek-12_full.pdf
- Gal, Iddo** (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/55029>
- Goetz, Stewart** (2009). Fundamental ideas and basic beliefs in stochastics. Theoretical aspects and empirical impressions from the education of student teachers. En M. Kourkoulos y C. Tzanakis (Ed.), *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, II* (pp. 279–291). Department of Education, University of Crete.
- Herrera, María Inés y Konic, Patricia** (2017). Conocimiento del profesor sobre la importancia del muestreo aleatorio simple para la estimación de parámetros. En: J.M. Contreras *et al.* (Eds.), *Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/45429>
- Pfannkuch, M. y Wild, C.** (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, pp. 17 – 45. Springer.
- Scheaffer, Richard, Gnanadesikan, Mrudulla, Watkins, Ann, Witmer, Jeffrey** (1996). *Activity-Based in Statistics: Student Guide*. Springer.
- Sosa Escudero, Walter** (2019). *Big data* (Segunda edición). Siglo XXI editores.
- Zamorano Escalona, Tomás, García Cartagena, Yonnhatan, & Reyes González, David** (2018). Educación para el sujeto del siglo XXI: principales características del enfoque STEAM desde la mirada educacional. *Contextos: Estudios De Humanidades Y Ciencias Sociales*, (41). <http://revistas.umce.cl/index.php/contextos/article/view/1395>

Análisis de propuestas de enseñanza presentes en libros de texto, en relación con la articulación entre las geometrías sintética y analítica

FÁTIMA QUINTEROS

quinterosfatima19@gmail.com

CECILIA LASPINA

cecilaspina@gmail.com

Universidad Nacional del Litoral - UNL

Resumen

La articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica ha sido (y es) abordada por numerosos investigadores preocupados por la desconexión con la que se presentan los objetos de una y otra en la enseñanza. Como parte de este taller, presentaremos algunos aportes teóricos que desarrollan la potencialidad didáctica de trabajar las geometrías sintéticas y analíticas de forma articulada. Nos planteamos como tarea analizar propuestas de enseñanza presentadas en libros de texto, y en caso de ser necesario, proponer modificaciones para que las mismas articulen ambas geometrías.

Palabras clave: geometría sintética / geometría analítica / articulación / libros de texto

Introducción

La propuesta de este taller es abordar el problema de la articulación de contenidos, en particular, la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica. Itzcovich (2005) reconoce que el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido en los espacios de formación, en particular en la escuela secundaria. Y advierte que si esto continúa se privará a los estudiantes de conocer otras formas de pensar, propias del razonamiento geométrico, que tienen un alto valor formativo. Según Gaita Iparraguirre (2014) las cuestiones de geometría sintética y las de geometría analítica se presentan de modo independiente en la enseñanza, proponiendo el estudio de las técnicas de la geometría sintética en el ciclo básico de la escuela secundaria y dejando el estudio de la geometría analítica para el ciclo orientado o, incluso para estudios superiores. Consideramos necesario que la geometría continúe presente en la educación secundaria, y que se potencien las propuestas que aborden de forma articulada la geometría sintética y la geometría analítica, como una forma de recuperar ese sentido perdido.

Dado que en el nivel secundario el libro de texto cumple un rol muy importante convirtiéndose muchas veces en el recurso con el que los docentes diseñan sus propuestas didácticas, es importante convertirlo en objeto de estudio didáctico Chemello (2002), Villella (2001). En este sentido, nos interesa indagar las posibilidades de articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica, a partir de las actividades y/o secuencias de actividades que proponen los libros de texto usados por docentes del nivel secundario. Para llevar adelante las actividades del taller, proponemos centrar la mirada en tres libros de educación secundaria:

- *Hacer matemática 1 / 2*, de editorial Estrada, cuyos autores son Carmen Sessa (coordinadora), Valeria Borsani, Matías Dalvarade, Patricia Duarte Lezcano, Cecilia Lamela y Rodolfo Murúa. El mismo fue impreso en el año 2017.
- *Matemática 2. Serie Nuevas Miradas*, de editorial Tinta Fresca, cuyas autoras son Liliana Kurzrok (coordinadora), Silvia Altman, Mabel Arnejo y Claudia Comparatore. El mismo fue impreso en el año 2017.
- *Matemática II*, de editorial Longseller, cuyas autoras son Graciela Chemello (coordinadora), Mónica Agrasar, Ana Lía Crippa y Adriana Díaz. El mismo fue impreso en el año 2015.

Fundamentación

A partir del problema didáctico-matemático detrás de la controversia curricular que supone enseñar de manera separada la geometría sintética y la geometría analítica, produciendo una discontinuidad entre ambas, Gascón (2002) plantea una tesis que promueve la continuidad entre las geometrías sintética y analítica. Esta consiste en que, a partir de un problema de construcción geométrica con regla y compás e introduciendo pequeñas variaciones en el enunciado original, la técnica inicial presente limitaciones y surjan necesariamente técnicas que requieren el uso de la geometría analítica. Como las limitaciones de las técnicas sintéticas son las razones de ser de las técnicas analíticas, no hay razón para que la enseñanza de la geometría sintética y de la geometría analítica se dé de forma separada¹.

En un trabajo posterior, el mismo autor (Gascón, 2003) hace un aporte sobre las consecuencias del autismo temático en el estudio de la geometría en el nivel secundario, entre las que destaca la desaparición de la razón de ser de la Geometría escolar. Retoma la tesis de continuidad para ampliarla y demostrar que en muchas ocasiones las técnicas analíticas requieren el uso previo de técnicas sintéticas para planear la estrategia de resolución posterior usando técnicas analíticas. De esa manera, entre las técnicas de la geometría sintética y las de la geometría analítica existe, además de continuidad, complementariedad.

En relación con el interés puesto en analizar libros de texto que son usados por los profesores para la enseñanza de la geometría en el nivel secundario, encontramos una experiencia similar pero centrada en el nivel universitario. Gaita Iparraquirre (2014) hace un análisis de los textos didácticos con los que se encuentran los estudiantes de primer año de la universidad en las carreras de Ingeniería y Arquitectura. La autora observa que la enseñanza de la geometría analítica se realiza sin una problematización previa que establezca relaciones explícitas con problemas abordados en el campo de la geometría sintética, estudiada en el nivel previo al universitario.

A partir del trabajo que realiza Gaita Iparraquirre (2014) se ve como necesario el diseño de situaciones que promuevan la evolución de los conocimientos en geometría sintética hacia la geometría analítica, retomando aquellos saberes que

¹ Empleamos el término técnica para referirnos a un *modo de hacer*, pero sin profundizar en los análisis en términos de praxeologías que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

los estudiantes podrían traer de su formación obligatoria. Según la autora, el uso de distintos elementos y procedimientos favorecen los aprendizajes matemáticos, ya que abonará a la construcción de significados a partir de recuperar sus razones de ser. Afirma que “para que se produzca una real comprensión de los conceptos y se adquieran competencias matemáticas, es necesario establecer relaciones entre aquellos campos del conocimiento que lo permitan; ese es el caso de la geometría sintética y la analítica” (p. 2). La geometría sintética permite el desarrollo de la intuición, visualización y argumentación a partir de construcciones exactas, la geometría analítica permite establecer conexiones entre construcciones geométricas y expresiones algebraicas. Si aceptamos que el empleo de distintos registros de representación de un mismo objeto favorece su comprensión, en la conexión de las geometrías, el alumno transitaría entre las representaciones figural, algebraica y gráfica de los objetos geométricos. En este sentido, la autora reafirma lo planteado por Gascón (2002) al decir que para propiciar una articulación entre las geometrías los estudiantes deben enfrentarse a situaciones de enseñanza que le permitan “reconocer las limitaciones de las técnicas de construcción de la geometría sintética y las ventajas del trabajo con técnicas algebraicas” (Gaita Iparraguirre, 2014, p. 46).

Pensamos este taller como un trabajo de reflexión destinado a profesores de matemática que se desempeñan en el nivel secundario, a docentes formadores de futuros docentes y a estudiantes que estén transitando su formación inicial en la carrera docente.

Objetivos

- Estudiar el modo en que se promueve (o no) la articulación entre geometría sintética y geometría analítica en libros de texto usados por los docentes de la escuela secundaria para el planteo de propuestas didácticas.
- Diseñar, mediante la adaptación de actividades de libros de texto, propuestas que promuevan la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en la escuela secundaria.

Descripción de las actividades

Como primera actividad de la primera jornada de este taller, proponemos que cada asistente comparta tres palabras en la aplicación Mentimeter que relacionen o que identifiquen a cada una de las geometrías; con el propósito de conocer sus concepciones previas sobre las geometrías sintética y analítica para luego aproximarnos a definirlas. A partir de las respuestas de los participantes, la aplicación formará una nube de palabras, que será analizada en conjunto.

Una vez realizado el intercambio, compartimos los aportes de algunos referentes teóricos que caracterizan cada una de las geometrías. Para la geometría recuperamos a Engler *et al.* (2005):

La geometría analítica estudia la relación entre los elementos geométricos y los elementos analíticos. Propone el estudio de las propiedades de las figuras y la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del álgebra y del análisis matemático.

En la resolución de un problema geométrico podemos distinguir los siguientes pasos:

- Transformación de un problema geométrico en un problema analítico,
- Resolución del problema con la ayuda del Álgebra y el Análisis,
- Interpretación geométrica de los resultados.

La Geometría Analítica trata dos problemas fundamentales:

- Dada una ecuación algebraica interpretarla geométricamente, es decir, determinar propiedades que permitan construir la figura geométrica que ella representa.
- Dada una figura geométrica o también un conjunto de puntos del plano o del espacio que gocen de una cierta propiedad, encontrar la ecuación algebraica que la represente. (p. 66)

En el caso de la geometría sintética, consideramos la siguiente definición:

Delimitaremos inicialmente la geometría sintética como aquella que utiliza los métodos de Euclides, Apolonio y sus sucesores, hasta Descartes, para abordar problemas de construcción geométrica sin representación en coordenadas y con la regla y el compás como principales herramientas. La determinación de los lugares geométricos aparece

como una técnica básica de estas construcciones, al lado de las transformaciones del plano. (Ancochea, 2011, p.538)

A continuación se propone de manera grupal la resolución de una primera situación problemática², con el propósito de vivenciar una experiencia de articulación entre técnicas de resolución de geometría sintética y de geometría analítica.

Consideren una familia de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de diámetro d . Designen por s la longitud de cada uno de los lados iguales y por b el (potencialmente) desigual.

- a) Representen la situación en el software de geometría dinámica o con instrumentos de geometría.
- b) ¿Qué relación hay entre b y s ?
- c) ¿Cómo debe ser b para que el triángulo isósceles sea rectángulo?
- d) ¿En qué casos el triángulo es equilátero?
- e) Fijada una de las variables, ¿Cuáles son los límites de variación de las dos restantes?

La segunda situación que se propone tiene como objetivo estudiar el modo en que se promueve (o no) la articulación entre geometría sintética y geometría analítica en libros de texto para el nivel secundario, seleccionados por el equipo docente y facilitados en formato digital.

A partir del análisis de los libros, si bien será acotado por cuestiones de tiempo de duración de la jornada, se espera que los participantes identifiquen propuestas que promuevan la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica, y en caso de no encontrarlas, porque no las hay o porque no las han podido encontrar, que a partir de la adaptación de actividades propuestas en los libros diseñen otras que sí promuevan dicha articulación.

Con tales objetivos, la consigna presentada fue la siguiente:

² Extraída de Gascón, 2003, p. 20.

- *Seleccionen un libro de texto y analicen si se proponen en éste situaciones que promuevan el trabajo de interacción entre la geometría sintética y analítica.*
- *Seleccionen una actividad y propongan modificaciones con el fin de potenciar la articulación entre la geometría sintética y analítica.*

Reflexiones finales

En el taller, tal como se menciona anteriormente, se espera invitar a docentes y futuras/os profesoras/es en matemática a reflexionar acerca de la articulación entre la geometría sintética y analítica y de su potencialidad didáctica. Esperamos que esta reflexión se dé en términos de posibilidades de concretarse, a partir de la intervención del docente tanto en la adaptación de ciertas actividades con potencial, así como también en el diseño completo de las mismas.

Ponemos de relieve a lo largo del taller, la importancia y necesidad de las intervenciones docentes para promover la articulación entre distintos dominios de la matemática, que en muchas oportunidades no está presente y plasmada en libros de texto que son utilizados en las clases o para generar propuestas de enseñanza.

Tal como establece el Diseño Curricular (2014), una de las tareas del profesor es “seleccionar, secuenciar y vincular los contenidos explicitados en los distintos ejes (...) favoreciendo la interrelación e integración en situaciones que problematicen el conocimiento” (p. 48). Como entre los recursos de los que dispone el profesor se encuentran los libros de texto, entendemos que una habilidad tiene que ser la de adaptar las actividades o secuencias de actividades que proponen estos libros para articular y/o integrar saberes si estos no lo hicieran. En este sentido, esperamos que los intercambios y reflexiones que ocurran en el taller se transformen en recursos para reformular y/o diseñar actividades que aborden cuestiones geométricas de tal manera que promuevan una articulación entre las geometrías sintética y analítica.

Bibliografía

Ancochea, Bernat (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre geometría sintética y la geometría analítica en secundaria. IES Serra de Marina.

- Chemello, Graciela** (2002). *La enseñanza de la Matemática y la formación del pensamiento. Un estudio sobre la demostración en el nivel medio* (Tesis de Maestría en Didácticas Específicas). Universidad de Buenos Aires.
- Engler, Adriana, Müller, Daniela, Vrancken, Silvia y Hecklein, Marcela** (2005). *Geometría Analítica*. Universidad Nacional del Litoral.
- Gaita Iparraguirre y Rosa Cecilia** (2014). *El paso de la Geometría sintética a la Geometría analítica* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid.
- Gascón, Josep** (2002). Geometría Sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA* (39), 13-25. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf>
- Gascón, Josep** (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *SUMA* (44), 25-34. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/44/025-034.pdf>
- Itzcovich, Horacio** (2005). *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Libros del Zorzal.
- Ministerio de Educación** (2014). Diseño Curricular para la Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe. <https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218362/1135160/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf>

Sentido Algebraico en la escuela secundaria

SILVIA BERNARDIS

silvia.bernardis@gmail.com

MICAELA MAZZOLA

micamazzola@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL)

Resumen

En el taller se propone un trabajo conjunto con docentes y estudiantes de profesorado a los efectos de discutir y analizar tareas para desarrollar en los estudiantes el sentido algebraico.

En el primer encuentro, a partir de una lista de tareas se analiza el sentido como parte del significado, el contexto y los fenómenos que organizan los objetos del álgebra. En el segundo encuentro se caracterizan las habilidades que se organizan en dominios o grupos de habilidades a desarrollar en los estudiantes; y se explicitan aquellas que se priorizan en la práctica profesional. Para ello, se seleccionan y analizan tareas del álgebra escolar con recursos interactivos.

Finalmente, se reflexiona respecto de la potencialidad de estos fundamentos teóricos para nutrir la labor docente de planificación de la enseñanza.

Palabras clave: álgebra escolar / sentido de los contenidos / sentido matemático / análisis de tareas

Introducción

El álgebra representa uno de los grandes logros de la cultura, de gran importancia para los ciudadanos. En la enseñanza tradicional la iniciación al álgebra se asocia a la introducción de letras y símbolos, y se considera la herramienta por excelencia de la matemática. Para los estudiantes, el álgebra escolar se presenta como una fuente inagotable de pérdida de sentido y de dificultades operatorias muy complejas de superar.

Existe cierto consenso en investigación en educación matemática en las clases de situaciones que propician y posibilitan el desarrollo de la comprensión algebraica, el sentido de los conceptos algebraicos y su uso. Esta consideración del sentido algebraico amplía la visión tradicional del álgebra escolar, hace énfasis en su utilidad y puede ser desarrollada desde los primeros grados de la educación primaria.

En este taller¹ se propone un trabajo conjunto con docentes y estudiantes de profesorado para discutir y analizar tareas para desarrollar en los estudiantes el sentido algebraico.

Primer Encuentro

La palabra sentido se utiliza en el lenguaje cotidiano, en expresiones tales como “tiene sentido”, “dotar de sentido”, “doble sentido”, “sin sentido”, “en este sentido”. En educación y en matemática, se encuentran los siguientes convenios de uso, como se menciona en Ruiz-Hidalgo y Flores (2022):

- *Sentido como parte del significado*: significado de una palabra o grupo de palabras. En matemática, el sentido de un concepto matemático es parte inherente de su significado semántico y se centra en los modos de usos, las situaciones, los contextos y los fenómenos que forman parte del significado de dicho concepto.
- *Sentido como habilidad*: habilidad o destreza para hacer algo o para juzgar bien en ello. Desde el punto de vista del aprendizaje, el sentido aparece como conjunto de habilidades asociadas a contenidos matemáticos concretos que el estudian-

¹ Desarrollado en el marco del Proyecto CAI+D 2020, código 50520190100123LI “Análisis de la producción de significado en el marco de procesos de modelización en clases de matemática” (FHUC-UNL, Santa Fe, Argentina).

te debe desarrollar. El sentido matemático es el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos (numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos), que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades.

- *Enseñar con sentido*: modo de enfocar, de entender o juzgar algo. El docente debe enseñar con sentido, entendiendo por esto proporcionar oportunidades para que sus estudiantes aprendan matemáticas con sentido, esto es, implicar a los estudiantes en el desarrollo de instrumentos propios, no rutinizados en la resolución de problemas.

Para comenzar el encuentro presentamos la agenda del taller, destacando que en los dos encuentros se centrará la atención en el álgebra escolar. Por un lado, se abordará el sentido de los contenidos del álgebra escolar, por medio de analizar la idea de contexto y fenómeno, en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR); y por el otro, el sentido algebraico como habilidad o destreza que caracterizan Ruiz-Hidalgo y Flores (2022).

El objetivo del trabajo en el taller es caracterizar las habilidades, que se organizan en dominios o grupos de habilidades, a desarrollar en los estudiantes y explicitar aquellas que se priorizan en la práctica profesional, a partir del análisis de las tareas del álgebra escolar por parte de los docentes del nivel secundario y estudiantes de profesorado.

Luego de la presentación del taller y de mencionar las distintas acepciones del término *sentido*, se distribuyen en pequeñas sesiones de zoom para abordar el trabajo de la Actividad 1, en la que se presenta una lista de seis tareas en diferentes contextos con las consignas que se mencionan a continuación.

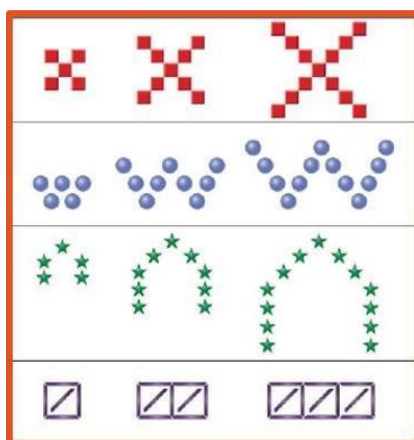
Actividad 1: Análisis del contexto

1. Elegir una tarea que utilizarían y otra que no abordarían con sus estudiantes.
2. En relación con la primera tarea seleccionada, analizar si sus estudiantes al abordarla podrán imaginar la situación e involucrarse en la resolución.
3. Al abordar la resolución de la tarea, ¿consideran que se generará en los estudiantes la necesidad de ingresar al dominio del Álgebra?

En la puesta en común cada grupo presenta las tareas seleccionadas y los fundamentos de la elección. La mayoría de los grupos considera la Tarea 3, que corresponde a la generalización de patrones.

TAREA 3: ¿Cuántos habrá?

Las cuatro progresiones de patrones comienzan como se muestra en la figura, si se preserva el patrón de crecimiento, ¿cuántos cuadros, puntos, estrellas o barras tendrá la figura que se encuentra en el lugar número 100 de la progresión? (Kindt *et al.*, 2006)



En lo que refiere a la tarea que no utilizarían consideraron aquella que se presenta en un contexto funcional. Consideramos que esto se debe a que interpretan de la expresión que aparece en la consigna “generará en los estudiantes la necesidad de ingresar al dominio del Álgebra” que debían seleccionar una tarea de iniciación al Álgebra. Cuestión que da cuenta de una prioridad de ingresar al Álgebra a través de generalizar cuestiones aritméticas.

A partir de las discusiones y reflexiones respecto de los contextos de las tareas es que presentamos la postura de la Educación Matemática Realista respecto de *contexto* y se analiza esta cuestión en cada una de ellas. Siguiendo a Freudenthal (1983, 1991), un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado. Se considera *realista* en el sentido de imaginable, razonable, realizable. Los contextos son generadores de significado y quedarán siempre a disposición como modelos mentales para que los recuperen cuando pierden el sentido de lo que están haciendo. Las preguntas no serán artificiales y el uso del concepto realmente debe contribuir a

responder las preguntas. Encontrar contextos auténticos y realistas, es una cuestión sutil, lo que algunos pueden percibir como realista, para otros puede parecer poco realista, depende de sus experiencias. Lejos de ropajes artificiales con los que se disfrazan contenidos matemáticos puros, las situaciones problemáticas deben tener sentido para los estudiantes.

A continuación, se mencionan algunas cuestiones que describe Puig (1997), interpretando las ideas de Freudenthal (1983). El autor señala que un concepto matemático es un medio para organizar un conjunto de fenómenos. Sugiere comenzar por los fenómenos y, a partir de ellos, enseñar al alumno a manipular los conceptos, como medios de organización de esos fenómenos. La realidad no solamente es un área de aplicación, sino que también es una fuente de aprendizaje.

El análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares es un procedimiento que permite establecer los fenómenos que dan sentido al tema, identificar los contextos que organizan esos fenómenos y las subestructuras que les sirven de modelo y describir las relaciones entre esas subestructuras y esos contextos.

La matemática escolar, menciona Puig (1997), requiere encontrar contextos realistas que sean fuentes para generar los fenómenos que solicitan ser organizados matemáticamente por el objeto matemático en cuestión, para así comenzar de tales fenómenos y desde aquí enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización.

Puig (2012) en su trabajo acerca del propósito del álgebra educativa considera que el álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista.

- Como un sistema de signos en el que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración.
- Como un sistema de signos para la resolución algebraica de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones.
- Como un sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

Sostiene que sólo el conjunto del proceso es capaz de darle sentido a la manipulación algebraica. A partir de estos aportes pensamos nuevamente en las tareas, ¿Qué fenómenos organizan los objetos del álgebra en cada una de ellas? En plenario

se propone retomar la lista de tareas y analizar la respuesta a esta pregunta en cada caso.

Se identifica una tarea que se vincula con el fenómeno de la generalización, abstracción y demostración. Como menciona Puig (2012), las expresiones algebraicas adquieren sentido, ya que permiten expresar de forma general las relaciones. Las transformaciones algebraicas adquieren sentido pues permiten dar cuenta del hecho de que expresiones algebraicas distintas, representan la misma relación. Las letras tienen significado de números generalizados, resalta el autor.

Del mismo modo, una tarea se vincula con el fenómeno de la resolución algebraica de problemas. En este caso, Puig (2012) considera que las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas. Las transformaciones algebraicas tienen sentido ya que garantizan que cualquier ecuación podrá llevarse a una forma canónica, y resolverse. Las letras tienen significado de incógnitas.

Por último, se propone una tarea que se vincula con el fenómeno del modelado con funciones. Resalta Puig (2012) que las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre ellas, las tablas y las representaciones gráficas cartesianas. Las transformaciones algebraicas tienen sentido, garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica que está elegida de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones. Las letras tienen significado de variables.

De esta manera, para finalizar el primer encuentro, se retoma una reflexión de Arcavi *et al.* (2017), quienes sostienen que es ampliamente aceptado que para dominar el álgebra se requiere práctica. Pero, ¿qué tipo de práctica? ¿Debe centrarse en la adquisición de destrezas automatizadas en los procedimientos, o en un pensamiento algebraico flexible? Como respuesta a la pregunta los autores proponen la siguiente cita:

“He observado, no solo en otras personas sino también en mí ... que las fuentes del conocimiento pueden ser obstruidas por el automatismo. Uno finalmente domina una actividad tan perfectamente que la pregunta de cómo y por qué deja de formularse, no puede formularse más, y ni siquiera se la comprende como una pregunta significativa y relevante”. (Freudenthal, 1983, p. 469)

Además, los autores mencionan que el profesor puede considerar críticamente las aplicaciones del álgebra en las tareas y en los libros de texto, y tratar de evitar situaciones problemáticas artificiales o “pseudo- de la vida real” que no harán que los estudiantes sientan el álgebra como útil. Se acuerda con los autores en considerar que un desafío para el profesor es identificar situaciones problemáticas auténticas, apropiadas y adecuadas (que depende de la edad, del nivel y de los intereses del grupo) que muestren el propósito del álgebra.

Segundo Encuentro

En el segundo encuentro se retoman las tres acepciones de sentido que mencionan Ruiz-Hidalgo y Flores (2022), para situarse esta vez en el *sentido matemático*. Como indican los autores, el sentido matemático es el resultado de un aprendizaje, depende del que aprende y permite actuar con flexibilidad para identificar situaciones en que se aplica el contenido, para llevar a cabo esta aplicación y resolver los problemas afrontados. Es el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos, geométricos, métricos y estadísticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades.

La visión de sentido de un contenido matemático escolar, se incorpora en la redacción de los nuevos documentos curriculares de España y desempeña un papel fundamental en la organización de los mismos. Ruiz-Hidalgo y Flores (2022) presentan cinco sentidos matemáticos escolares para la enseñanza obligatoria: sentido algebraico, sentido espacial, sentido estocástico, sentido de la medida, sentido numérico. Cada uno de ellos está organizado en componentes o dominios de habilidades que, a su vez, se describen mediante habilidades más específicas.

Según los autores, el álgebra escolar se suele identificar -curricular y socialmente- con la manipulación de símbolos, la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones. La consideración del sentido algebraico amplía esta visión del álgebra en la que no solo se tiene que tener en cuenta la parte estructural simbólica, sino que se incluyen aspectos de la utilidad del álgebra en la cultura, su papel en la historia, su influencia en otras áreas de conocimiento y su papel propedéutico dentro de la propia matemática.

Los autores mencionados, retoman la categorización fenomenológica del álgebra de Puig (2012) para identificar los componentes o dominios que organizan las habilidades a desarrollar, en efecto consideran:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.
- Resolución de problemas.
- Situaciones funcionales.
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

A continuación se discuten y analizan en plenario las habilidades específicas de cada dominio que mencionan los autores y se propone el trabajo en sesiones de grupos pequeños, asignando un dominio de habilidades para cada uno de ellos y se aborda el trabajo con las consignas de la Actividad 2 que se presentan a continuación.

Actividad 2: Análisis de Tareas

En el siguiente link encontrarán tareas (filtrar: Álgebra y Funciones).
<https://intef.es/recursos-educativos/matesgg/>

1. Elegir una tarea del dominio de habilidades asignado que utilizarían en sus clases y una tarea que no utilizarían.
 2. Analizar:
 - a) El contexto y los fenómenos (en términos de la EMR).
 - b) Las habilidades que los estudiantes podrían desarrollar con dicha tarea.
- (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022).

En la puesta en común, cada grupo presenta las tareas seleccionadas y el análisis realizado. De esta manera, se obtienen ejemplos de tareas de cada dominio, se discuten potencialidades y debilidades de los enunciados de las mismas, también se proponen posibles modificaciones de las consignas en función del grupo de estudiantes a las que estaría dirigida. Además, se utilizan los criterios discutidos en el taller para la fundamentación de la decisión de elección de la tarea que no utilizarían con sus estudiantes.

En cuanto a las habilidades que podrían desarrollar los estudiantes a partir del abordaje de la tarea seleccionada, se analizan las propuestas por Ruiz-Hidalgo y Flores (2022) y se incorporan algunas otras que se relacionaban directamente con

la tarea. Como por ejemplo, en el caso de las habilidades de modelización se incluye la habilidad de tomar decisiones sobre la situación real que simplifiquen el modelo matemático.

Reflexiones finales

Para terminar, se retoma la caracterización de Calvo *et al.* (2016) respecto de las tareas que un profesor de matemática debe desarrollar en torno a tres grandes momentos que se suceden en forma cíclica:

- Planificación de la enseñanza: todo lo que hay que hacer antes de entrar a la clase.
- Gestión del aula: entendida como su actuación en clase para lograr los aprendizajes de los alumnos y conocer los aprendizajes adquiridos.
- Valoración del proceso de enseñanza y de aprendizaje: imprescindible para la toma de decisiones en pos de mejorar la planificación del nuevo ciclo.

Para concluir, se realiza un análisis retrospectivo de lo sucedido en el taller, resaltando cómo a partir de las experiencias con los *contextos realistas*, los *fenómenos* se abordó el *sentido de los contenidos* matemáticos desde una organización fenomenológica y luego a través del análisis de los dominios de habilidades del sentido algebraico se reflexionó respecto de su potencial para guiar la labor docente, específicamente en la selección de tareas para la planificación de la enseñanza. Es decir, se destaca la importancia de estos aportes teóricos como fundamento para la selección de tareas pertinentes para *Enseñar Álgebra con Sentido*.

Bibliografía

Arcavi, Abraham; Drijvers, Paul y Stacey, Kaye (2017). *The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insights, and Activities*. Routledge.

Calvo Pesce, Cecilia, Deulofeu Piquet, Jordi, Jareño Ruiz, Joan, Morera Úbeda, Laura (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria*. Síntesis.

- Freudenthal, Hans** (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel. (Traducción de Luis Puig). En L. Puig y E. Sanchez, (Eds.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. CINVESTAV.
- Freudenthal, Hans** (1991). *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Kluwer.
- Kindt, Martin, Dekker, Truus y Burrill, Gail** (2006). ¡Viva el álgebra! Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Las matemáticas en contexto*. Encyclopædia Britannica, nc.
- Puig, Luis** (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.
- Puig, Luis** (2012). Observaciones acerca del propósito del Álgebra Educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1-20). SEIEM.
- Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco y Flores, Pablo** (2022). Sentido matemático escolar. En L. Blanco, N. Rodríguez, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez, C. Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 55-79). Universidad de Granada.

La modelización matemática en el aula: experiencias, desafíos y reflexiones

FABIANA KIENER

fkienner@gmail.com

NATALIA MARTÍNEZ

natty1705@gmail.com

SARA SCAGLIA

sbscaglia@gmail.com

MARÍA AMELIA VIGNATTI

avignatti17@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral – UNL

Resumen

En el taller se comparten experiencias y propuestas de trabajo con modelización matemática en el aula de secundaria y en la formación inicial de profesoras/es de matemática. El propósito general que se persigue es reflexionar con docentes de matemática en ejercicio y con futuras/os docentes sobre decisiones y cuestiones a considerar en el desarrollo de propuestas que habiliten un proceso de modelización matemática, en vinculación con sugerencias curriculares y aportes de referentes en didáctica de la matemática.

Palabras clave: modelización matemática / educación secundaria / experiencias / desafíos

Introducción

En las últimas décadas la reflexión en torno al trabajo sobre modelización matemática (MM) en distintos niveles educativos ha recibido especial atención en la comunidad de educadores matemáticos (Kaiser, 2020). En particular, en el grupo de estudio temático sobre aplicaciones y MM¹, desarrollado en el ICME 15 (Australia, 2024) se afirma que estas temáticas constituyen un subdominio de investigación en educación matemática de vibrante actividad, cuya difusión se ha diversificado.

Este interés se ha puesto de manifiesto en su incorporación en documentos curriculares de distintos países. En nuestro país, los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (Ministerio de Educación de la Nación, 2012) sistematizan los saberes centrales y significativos que deben ser incorporados como objetos de enseñanza en la escolaridad obligatoria (que abarca desde los 5 hasta los 17-18 años). En relación con la modelización, para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria se sugiere la incorporación de situaciones de enseñanza que promuevan en las y los estudiantes:

El reconocimiento de que la modelización constituye un aspecto esencial de la práctica matemática, y que supone identificar las relaciones relevantes y las variables sobre las que se va a operar, las representaciones que se van a utilizar, las propiedades que permiten justificar los procedimientos puestos en juego, el análisis de la pertinencia del modelo y la reinterpretación de los resultados a la luz del problema planteado inicialmente. (Ministerio de Educación de la Nación, 2012, p. 14)

A pesar de estas recomendaciones, su incorporación en las aulas de matemática no se ha extendido (Kaiser, 2020). Una de las razones radica en la falta de experiencias de propuestas de MM en la formación inicial de docentes de matemática (Biembengut y Hein, 2004; Blomhøj, 2008).

El taller² se propone con los objetivos de compartir experiencias de trabajo con MM en el aula de secundaria y en la formación inicial de profesoras/es de matemática y de reflexionar sobre cuestiones a considerar en el desarrollo de propuestas

1 <https://icme15.org/icme-15-scientific-program/topic-study-groups/tsg-3-4-mathematical-applications-and-modelling-in-mathematics-education/>

2 Desarrollado en el marco del Proyecto CAI+D 2020, código 50520190100123LI "Análisis de la producción de significado en el marco de procesos de modelización en clases de matemática" (FHUC-UNL, Santa Fe, Argentina).

que habiliten procesos de MM, en vinculación con sugerencias curriculares y aportes de referentes en didáctica de la matemática.

En el siguiente apartado desarrollamos algunos conceptos teóricos relevantes para la temática del taller. A continuación, describimos las actividades que conforman nuestra propuesta. Finalmente, compartimos algunas reflexiones sobre esta.

Aportes teóricos

En primer lugar, nos interesa presentar distintas definiciones de modelo matemático. Para Bassanezi (1994, p.31) “un modelo matemático es casi siempre un sistema de ecuaciones y desigualdades algebraicas, diferenciales, integrales, etc., obtenido mediante el establecimiento de relaciones entre variables consideradas esenciales para el fenómeno bajo análisis”. Blomhøj (2008, p.21) afirma que un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Niss y Blum (2020, p.6) sostienen que “un modelo matemático es un tipo especial de modelo, es decir, una representación de aspectos de un dominio extramatemático por medio de algunas entidades matemáticas y relaciones entre ellas”.

Estas definiciones, además de pertenecer a tres décadas distintas, ponen de manifiesto algunas diferencias que dan cuenta de particularidades en torno a las cuales nos interesa reflexionar. En particular, en las definiciones de Blomhøj y Niss y Blum se explicita que la situación o fenómeno que se interpreta es externo a la matemática.

La primera definición asocia un modelo con una expresión en lenguaje matemático como ecuaciones y desigualdades y alude a términos de la disciplina que son comúnmente utilizados para expresar relaciones entre variables, para interpretar o dar cuenta de los fenómenos que se encuentran bajo estudio. La definición de Blomhøj (2008) identifica al modelo con una relación entre nociones matemáticas y un fenómeno no matemático. Pone el acento en la relación, porque el autor reconoce que para interpretar un fenómeno es posible plantear distintos modelos matemáticos, que estarán relacionados con las intenciones de uso de la persona que modeliza. La última definición vuelve a identificar el modelo con una representación que utiliza conceptos matemáticos para explicar un fenómeno no matemático.

Nuevamente el acento está en el objeto resultante, pero en este caso no está especificado qué tipo de objeto es (como en la definición de Bassanezi). Consideramos que esto último amplía las posibilidades para pensar la MM en distintos niveles del sistema educativo. Si el modelo se entiende como una representación de un dominio extramatemático mediante ideas o relaciones matemáticas, es posible considerar un dibujo de un rectángulo como modelo de una tarjeta de crédito, interpretación que no sería posible según la primera definición.

En segundo lugar y teniendo en cuenta nuestro interés por reflexionar acerca de la MM en el aula de secundaria, resulta importante identificar definiciones de este proceso. Desde un punto de vista general, Niss y Blum (2020, pp.2-3) afirman:

Invocar y activar las matemáticas para tratar una situación en un dominio extramatemático (que por brevedad se denominará simplemente “contexto”) pasa necesariamente por la construcción explícita o implícita de un modelo matemático. Construir un modelo de este tipo, o dicho de otro modo, realizar una modelización matemática, consiste en representar los elementos principales de un contexto con entidades matemáticas y las preguntas relacionadas con el contexto con preguntas matemáticas. La misión completa consiste entonces en buscar respuestas a preguntas matemáticas e interpretar estas respuestas en términos del contexto.

Estos autores, en coherencia con su definición de modelo, hacen hincapié en la existencia de una situación extramatemática que propicia la actividad de construir un modelo utilizando entidades matemáticas. Destacan ese ida y vuelta entre el contexto extramatemático y la matemática. Para Sadovsky (2005, pp. 26-27):

Un proceso de modelización supone recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformarlas utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia. (pp.26-27).

Esta autora, a diferencia de Niss y Blum (2020), reconoce la posibilidad de que la modelización puede involucrar también la producción de conocimiento de un sistema matemático mediante otro sistema que pertenece también a esta disciplina. Para Blomhøj (2008), la obtención de un modelo matemático implica atravesar un

proceso cíclico al que denomina MM consistente en seis subprocesos. El autor reconoce que cada etapa puede generar reflexiones que conlleven modificaciones en la etapa anterior. Los subprocesos que constituyen un proceso de MM mencionados por Blomhøj y Højgaard Jensen (2003, como se citó en Blomhøj, 2008) son los siguientes: a) Formulación del problema, b) Sistematización, c) Traducción al lenguaje matemático, d) Utilización de métodos matemáticos, e) Interpretación de los resultados y f) Evaluación de la validez del modelo.

Finalmente, entre los aportes teóricos abordados en el taller, destacamos las reflexiones sobre el desarrollo de procesos de MM en las clases de matemática desde un punto de vista educativo. Bassanezi y Biembengut (1997, p.14) utilizan la expresión “modelación matemática” para referirse al método de enseñanza y aprendizaje que utiliza el proceso de MM en cursos regulares. El término “modelación” supone una “contracción de los términos modelización y educación: MODELACIÓN= MODELIZACIÓN + EDUCACIÓN”.

Blomhøj (2008, p.20) también reflexiona sobre la MM como proceso educativo cuando plantea que la MM se puede considerar una práctica de enseñanza que sitúa en el centro de la enseñanza y el aprendizaje la relación entre mundo real y matemática. Para este autor, las “actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuales construir importantes conceptos matemáticos” (Blomhøj, 2008, p.20).

Esteley (2014) alude a la modelización como abordaje pedagógico. En estos términos designa a una propuesta didáctica que tiene como propósito:

- a) interrelacionar elementos teóricos y prácticos,
- b) que los alumnos escojan un tema de su interés para estudiar y se relacione con sus contextos próximos,
- c) favorecer el desarrollo de individuos socialmente activos,
- d) poner en juego procesos interdisciplinarios asociando la Matemática con otras ciencias tales como Biología, Historia, Física, Economía, etc. y
- e) propiciar vinculaciones entre diferentes áreas de la Matemática y relacionadas con el tema de interés en estudio. (Esteley, 2014, p.83)

Esta autora señala que se identifican diversas opciones respecto del trabajo escolar en torno a modelos y modelización: a) la aplicación de modelos conocidos o

enseñados recientemente, b) el trabajo con proyectos a partir de un tema de la vida real seleccionado por el profesor, para resolver un problema también formulado por el docente, y d) el trabajo con temas seleccionados por el estudiantado, que también formula el problema y se involucra en el proceso de MM. Esteley (2014, p.55) afirma que en estas cuatro opciones “alumnos, docentes y conocimiento juegan roles diferentes y por lo tanto los escenarios educativos que se puedan montar difieren sustancialmente”.

La autora reconoce que en las dos primeras se destaca un movimiento que va desde la matemática hacia la vida real. En efecto, se muestra cómo una determinada noción matemática modela un fenómeno dado pero no se discute cómo se obtiene dicho modelo. Villarreal y Esteley (2013) aluden a “aplicaciones ilustrativas” para dar cuenta de este tipo de trabajo. En las dos últimas, en cambio, se identifica un movimiento en el sentido contrario. Villarreal y Esteley (2013) refieren en este caso a una modelización activa, porque el estudiantado transita un proceso para producir un modelo.

Jullie y Mudaly (2007) distinguen dos usos diferentes para la modelización en la enseñanza. La modelización como vehículo está centrada en el desarrollo de las matemáticas prescriptas, puesto que el proceso de MM se utiliza para aprender nuevos conceptos. La MM está al servicio de necesidades curriculares y se suele trabajar en contextos concretos de la vida real, tomados como base para la abstracción. En la modelización como contenido, en cambio, el fin de la enseñanza es el modelo, por lo que implica procesos de valorización, adaptación, crítica y evaluación de modelos existentes motivados por contextos reales.

Para Lewis (2021) estos dos usos de la MM en el aula no constituyen visiones epistemológicas mutuamente excluyentes, “sino que representan un espectro” (p.47). Considera que el docente es el encargado de desplegar un puente entre estas visiones, mediante la enseñanza. Describe el caso de una docente que, al reconocer una relación entre sus objetivos curriculares y problemas contextuales, da lugar al desarrollo de MM. De este modo, sin renunciar a sus objetivos curriculares, logra implementar tareas de modelización cercanas a las ideas de sus alumnos. “La profesora tuvo que conciliar sus objetivos pedagógicos a corto plazo consistentes en dominar determinados conceptos matemáticos, y sus objetivos a largo plazo, consistentes en desarrollar la capacidad de modelizar” (Lewis, 2021, p.49).

Estas consideraciones teóricas se asumen de interés para reflexionar sobre algunos ejemplos de trabajo con MM en el aula de matemática de secundaria en torno a los cuales giran las tareas propuestas a las/los asistentes al taller.

Modalidad de trabajo y actividades desarrolladas en el taller

El taller se organiza en dos encuentros. Cada uno incluye momentos a cargo de las docentes del taller, que comparten reflexiones vinculadas con los aportes teóricos y describen brevemente experiencias de MM en educación secundaria y en la formación inicial de profesores/as de matemática, momentos destinados al desarrollo de trabajos grupales de las y los asistentes en torno a tareas específicas y de puestas en común de las producciones grupales. Presentamos a continuación la secuencia de actividades desarrolladas para cumplimentar los objetivos enunciados.

1. Indagación sobre experiencias y trabajo con MM

Con el fin de conocer las experiencias e interpretaciones sobre MM solicitamos a las y los participantes que respondan las siguientes preguntas en forma individual en un Padlet (herramienta interactiva permite compartir y organizar información en el grupo de asistentes):

¿Utilizaste la modelización matemática en tus propuestas áulicas?

En caso afirmativo, ¿en qué contexto/ disciplinas?

Características de propuestas de modelización matemática

Una vez compartidos los objetivos del taller, se realizó una puesta en común de las respuestas. Algunas/os asistentes implementaron propuestas de MM en sus clases. Mencionaron propuestas relacionadas con física, biología, economía y estadística. También hicieron referencia a asignaturas específicas, tales como Análisis matemático, Cálculo, principalmente en carreras universitarias. En relación a contextos extramatemáticos, se mencionaron situaciones típicas que se estudian en física (tales como caída libre, tiro vertical, aceleración) y biología (crecimiento de poblaciones). Se mencionó también inseguridad vial y uso de celular.

2. Presentación de aportes teóricos y del primer ejemplo de MM

Una vez presentadas algunas reflexiones teóricas, se compartió con las y los asistentes las consignas de una experiencia desarrollada durante 2023 en un 5° año de la modalidad Economía y Administración de una escuela secundaria de gestión privada de la ciudad de Santa Fe (Kiener y Scaglia, en prensa). El curso estaba integrado por 22 estudiantes de 17 años. El objetivo de la experiencia es reflexionar críticamente sobre el modo de distribución de bancas en la cámara de diputados de la Nación. En un año electoral, el estudiantado estaba en condiciones de votar por primera vez, por lo cual la temática despierta un interés especial. Una de las talle-
ristas es la docente a cargo del curso y otra se desempeña como observadora parti-
cipante. En la Tabla 1 se resumen las actividades llevadas a cabo.

CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	CLASE 4
Charla a cargo de politóloga sobre el origen de partidos políticos y coaliciones en democracia	Tareas 1 y 2. Aplicación del sistema D'Hondt en dos ejemplos (uno ficticio y otro real). Diferentes modos de expresar los resultados (mediante tablas y listas de números y mediante puntos en gráfico cartesiano utilizando GeoGebra).	Tarea 3. Comparación de métodos de distribución de bancas (D'Hondt, Hill-Huntington y Saint-Lagué. Lectura de fragmento de artículo en el que se critica al sistema D'Hondt. Se solicita elaborar una justificación matemática para decidir qué método de distribución resulta más conveniente.	Presentación oral de resoluciones de la tarea 3. Debates generales. Discusión sobre criterios defendidos por el estudiantado para argumentar cuándo un sistema de distribución resulta justo o injusto.

Tabla 1: Actividades desarrolladas en la primera experiencia

3. Primera actividad grupal

Con esta actividad finaliza el primer encuentro del taller. Se distribuyen las y los asistentes en grupos para reflexionar acerca de las siguientes preguntas:

1. *¿Esta secuencia promueve la modelización matemática como estrategia de*

enseñanza y aprendizaje? Justifiquen la respuesta.

2. En caso afirmativo, ¿se puede/n identificar fase/s del proceso de modelización matemática? En caso negativo, ¿qué modificaciones harían para que se promueva la modelización matemática?

3. Bajo el supuesto de que la situación (y sus modificaciones, si las hubiera) promueven la modelización matemática como estrategia de enseñanza y aprendizaje, ¿qué tipo de uso de la modelización se propicia? ¿Se podría vincular con alguna de las perspectivas de la modelización en torno al trabajo escolar?

4. Discutan y justifiquen en el grupo posibles modificaciones de las situaciones, teniendo en cuenta las características de sus estudiantes, el contexto de aplicación y/o los aspectos que consideren de interés.

Las preguntas pretenden abrir el debate y poner en discusión algunos de los aportes teóricos trabajados. Dado que las dos primeras tareas de la experiencia requieren de la aplicación de un modelo matemático (el sistema D'Hondt) para distribuir las bancas en la cámara de diputados nacional. La tercera tarea solicita la comparación de tres modelos (sistemas de distribución de bancas). Esto supone transitar por un subproceso de evaluación de la validez del modelo, con el fin de proponer una fundamentación matemática para decidir qué modelo es más conveniente.

La puesta en común de las respuestas a las preguntas anteriores dio lugar a un interesante debate. ¿Cómo es posible considerar esa experiencia como una actividad de MM? Si lo es, entonces las dos primeras tareas se corresponden con las opciones a y b) de Esteley, y el contenido que se pone en juego tiene que ver con operaciones y operaciones en el conjunto de números racionales. La discusión en torno a la tarea 3 expuso posiciones divergentes respecto de si la misma promueve o no la MM como estrategia de enseñanza y aprendizaje. En la consigna de la tarea 3, el problema a modelizar está ya formulado (es propuesto por la docente) e involucra el análisis de tres modelos ya conocidos. ¿Puede una consigna con estas características dar lugar a un nuevo proceso de MM? El debate giró en torno a esta pregunta.

4. Presentación del segundo ejemplo de MM

En esta actividad, desarrollada en el segundo encuentro del taller, las docentes describen brevemente una segunda experiencia. El objetivo es mostrar una activi-

dad que permita a las y los asistentes reconocer el modo en que algunas cuestiones teóricas sobre MM se ponen de manifiesto y compartir otra experiencia que pueda dar cuenta de las dimensiones a considerar cuando se espera llevar adelante procesos de MM.

La actividad (Kiener, Vignatti y Martínez, 2023) es una adaptación de la propuesta descrita en Blomhøj (2008). Se propone con los objetivos de utilizar la matemática como medio para explorar, analizar y reflexionar sobre una porción de la realidad y generar un espacio para el debate sobre los procesos y resultados obtenidos, estableciendo un vínculo entre la referencia real y las nociones matemáticas asociadas, promoviendo la construcción de significados desde la Educación Matemática Crítica.

Se implementó en 5° año de una escuela secundaria de gestión privada de la ciudad de Santa Fe de 37 estudiantes. Una de las docentes del taller es la docente del curso y otra interviene como observadora participante. El grupo no había tenido experiencias previas de trabajo con MM. Antes de la implementación, el estudiantado había resuelto tareas que involucran funciones afines, cuadráticas y polinómicas. En particular, en una tarea sobre planes de telefonía celular se habían introducido las funciones por tramos y se representaron gráficamente en Geogebra. Las consignas propuestas al estudiantado se incluyen en la tabla 2 y el trabajo se organiza en forma grupal.

En esta oportunidad analizaremos una porción de la realidad con “lentes matemáticos”, es decir, con una mirada matemática que nos pueda aportar algo adicional sobre la información recabada, una interpretación de los datos que nos permita, por ejemplo, tomar decisiones o realizar elecciones.

- Los/as integrantes del grupo deben decidir sobre qué temática van a trabajar, teniendo en cuenta que deben utilizar datos reales. Ejemplos: Planes de telefonía celular o de internet, Costos de clubes deportivos, Tarifas de taxis y remises, Tarjetas de crédito o débito, Costos de servicios (agua, gas, electricidad).
- Una vez seleccionada la temática (que no necesariamente tiene que ser alguna del listado anterior), obtener datos reales sobre la misma.
- A partir de la información recabada, deben organizarla de un modo conveniente para que posibilite tomar alguna decisión o realizar alguna elección fundamentada por la evidencia de los datos y la interpretación matemática de los mismos.

Algunas preguntas que pueden ayudar a realizar la interpretación matemática de la realidad:

¿Qué preguntas me puedo realizar en relación con la temática elegida? ¿Cuáles son las variables que se van a considerar? ¿De qué manera están relacionadas? ¿Cómo se puede observar tal relación (gráfico, tabla, fórmula)? [...] ¿Qué variables o aspectos no se tuvieron en cuenta sobre la temática elegida? ¿Por qué? ¿Qué fue lo más complejo del trabajo realizado?

Tabla 2: Consignas de la segunda experiencia de MM. Fuente: Kiener *et al.* (2023)

La consigna de la tarea 3 permitió al estudiantado transitar por procesos de MM. Los temas seleccionados fueron los siguientes: Planes de empresas de telefonía celular, comparación del precio de botellas en comercio mayorista y minorista, costo de una playa de estacionamiento con plan mensual o tarifa por hora, tarifas de taxis y remises y alquiler de una cancha de tenis para socios y no socios.

En Kiener *et al.* (2023) se describen las producciones de un grupo de estudiantes en torno a uno de los temas seleccionados (tarifas de taxis y remises). Este grupo seleccionó algunas variables a considerar y logró explicitar los aspectos que no se tuvieron en cuenta, tales como el aumento del precio en la noche y/o en horas punta, el aumento del precio durante situaciones climáticas desfavorables, el aumento de precio en función del tráfico, la diferencia de precio en distintas zonas urbanas, interurbanas y rurales de una provincia. La experiencia puso de manifiesto que el conocimiento matemático “no es un prerrequisito para las actividades de modelización”, sino que muchas veces las mismas “pueden motivar el proceso de aprendizaje, crear raíces cognitivas sólidas para la construcción de conceptos matemáticos de parte del alumno” (Blomhøj, 2008, p. 33-34).

5. Segunda actividad grupal

Esta actividad tiene como objetivo promover entre las y los asistentes al taller una reflexión y discusión acerca del diseño de una actividad de MM que pueda implementarse con estudiantes de educación secundaria. La consigna es la siguiente:

Diseñar una propuesta de modelización para el aula. ¿Cuál es el objetivo de esa actividad? ¿Para qué año de la escuela secundaria? ¿Cómo se vincula la actividad con los conceptos/categorías trabajadas en el taller?

Las temáticas pensadas por las y los asistentes al taller para implementar en el aula de educación secundaria giraron en torno a: el tránsito vehicular en la cuadra de la escuela, el tamaño de las cajas que se pueden construir a partir de un trozo de papel rectangular y la huella hídrica de cada estudiante y de los integrantes de su hogar.

A continuación, se invitó a las y los asistentes a responder en un Padlet las siguientes cuestiones:

¿Cuáles son las potencialidades y desafíos del trabajo con modelización matemática como estrategia de enseñanza y aprendizaje en el aula de la escuela secundaria?

Como potencialidades se mencionan la posibilidad de trabajo en equipos interdisciplinarios y colaborativos, la conexión con el mundo real y la posibilidad de motivación, aprendizaje significativo y resignificación de lo aprendido que promueve.

Entre los desafíos se mencionan el tiempo que demanda y la compatibilización y articulación con programas curriculares, la tutoría de las tareas en grupos numerosos, el elevado nivel de abstracción y razonamiento que podría requerir, el trabajo con docentes de otras áreas, el recorte de la realidad necesario dada su complejidad, el desconocimiento de los campos por parte del docente y la dificultad de temas seleccionados por el estudiantado.

Reflexiones finales

Consideramos que el taller ha permitido discutir y reflexionar sobre decisiones y cuestiones a considerar en el desarrollo de propuestas que habiliten un proceso de MM. Las y los asistentes participaron con entusiasmo e interés en cada consigna propuesta. Sus respuestas dieron cuenta de una interpretación pertinente de las potencialidades y desafíos que una propuesta de este tipo implica.

Bibliografía

Bassanezi, Rodney y Biembengut, Maria Salett (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *Números – Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13–25.

- Bassanezi, Rodney** (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. *For the learning of Mathematics*, 14(2), 31–35.
- Biembengut, María Salett. y Hein, Nelson** (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Blomhøj, Morten** (2008). Modelización matemática. Una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, 23(2), 20-35.
- Esteley, Cristina** (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Filosofía y Humanidades/UNC.
- Julie, Cyril y Mudaly, Vimolan** (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa en W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn y M. Niss. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 503-510). Springer.
- Kaiser, Gabriele** (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education Second Edition* (pp. 553-561). Springer.
- Kiener, Fabiana, Vignatti, María Amelia y Martínez, Natalia** (2023). Lentes matemáticos: una experiencia de modelización matemática en educación secundaria. En G. Mazziere, M.P. Saavedra, R.D. Spies y K. Temperini (Eds.), *Trabajos presentados al IX MACI*, 9, (pp.602-605). ASAMACI.
- Kiener, Fabiana y Scaglia, Sara** (2023). Modelización matemática sobre procesos electorales en educación secundaria. VI Cong. Nac. de Problemáticas Sociales Contemporáneas. Trayectorias y desafíos a 40 años de la recuperación democrática.
- Lewis, Stephen** (2021). Theorizing ‘Modelling as Bridge’ Between Content and Vehicle. En F. K. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser y Wong, K. L (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 45-54). Springer.
- Ministerio de Educación** (2012). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Orientado. Educación Secundaria*. Consejo Federal de Educación. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado>
- Niss, Mogens y Blum, Werner** (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.
- Sadovsky, Patricia** (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos, desafíos*. Libros del Zorzal.
- Villarreal, Mónica y Esteley, Cristina** (2013). Escenarios de modelización y medios: acciones, actividades y diálogos. M. Borba y A. Chiari, (Eds.), *Vinte anos de GPIMEM: um mosaico de pesquisas em movimento* (pp. 273-308). Editora Livraria da Física.

Los caminos del azar para estimar probabilidades

MARÍA FLORENCIA CRUZ

mfcruz@fhuc.unl.edu.ar

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral – UNL

KARINA TEMPERINI

ktemp@fhuc.unl.edu.ar

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral - UNL

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral “Dra. Eleonor Harboure” – IMAL (UNL-CONICET)

MARÍA EUGENIA CAMMISI

mariaeugeniacammissi@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral – UNL

Resumen

Se propone un taller a docentes y futuras/os profesoras/es en matemática en el que se ponen en juego situaciones que permiten reflexionar en relación con la experimentación, el significado frecuentista de la probabilidad y la noción de probabilidad condicional. Se pretende generar un espacio de debate en relación con la posibilidad de trabajar a partir de la experimentación con elementos tradicionales y simuladores digitales y con el uso alternativo de simuladores cuando no se dispone de uno vinculado estrictamente con la situación problemática. Específicamente se busca reflexionar en relación con la posibilidad de abordar la producción de estos conceptos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria y discutir y poner de manifiesto algunas dificultades que suelen presentarse en el aula.

Palabras clave: formación de profesoras/es / significado frecuentista / probabilidad condicional / simulaciones

Introducción

En este taller se aspira a que futuros/as profesores/as y profesores/as se involucren en situaciones que promueven el trabajo con simulaciones, frecuencias relativas, la construcción de la noción de probabilidad condicional y la reflexión en torno a las dificultades que se presentan en el aula en relación con tal noción.

Resulta de especial interés debatir e intercambiar con las/os participantes las cuestiones mencionadas debido a que forman parte de lo propuesto a abordar en la educación obligatoria argentina. Particularmente, los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (2012) proponen el trabajo en el eje Probabilidad y Estadística desde el primer año de la escuela secundaria. Sin embargo, “aunque los contenidos estocásticos están considerados en los Contenidos Básicos Comunes, una gran proporción de docentes no llega a desarrollarlos efectivamente en sus clases” (Tauber, 2019, p. 55).

En este sentido, debatir en la actualidad en relación al potencial de la enseñanza de la estocástica e incluso a la necesidad de una mayor presencia de la misma en la educación obligatoria constituye una meta a lograr ya que, entre otros, permitiría formar a estudiantes de todos los niveles capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones (Gal, 2005).

Atendiendo a las consideraciones realizadas, se propone este taller con los siguientes objetivos:

- Analizar alcances y limitaciones de simuladores atendiendo a problemáticas determinadas.
- Analizar y reflexionar la posibilidad de emplear frecuencias relativas para estimar probabilidades y de construir la noción de probabilidad condicional en el aula de matemática en la escuela secundaria.
- Reflexionar posibles dificultades que emergen en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de probabilidad condicional.

Consideraciones teóricas

En este taller se propone el trabajo con diversas simulaciones que involucran el trabajo intuitivo, a partir del sentido común, llevando adelante un abordaje expe-

rimental. Interesa señalar que el grupo de discusión 11 que se ocupó de la enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad para el 14 Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), afirma que el desarrollo de nociones probabilísticas a través de experimentos, exploraciones de datos y simulaciones puede ayudar a los estudiantes a construir conexiones básicas entre probabilidad y estadística. Esta idea se conecta con el proceso que se espera lograr, es decir, análisis exploratorio de datos en probabilidad como base para entender la inferencia estadística

Asimismo, el trabajo exploratorio, según Viñas (2014), redundará en beneficios en instancias posteriores de trabajo con probabilidades que involucren razonamientos más formales. Es decir, se busca “generar conciencia de lo relevante del proceso de obtención de los datos, saber que la forma de analizarlos está íntimamente ligada a la forma como los datos son obtenidos” (Behar y Grima Cintas, 2004, p. 88).

Para lograr lo anterior, en el taller se promueve el trabajo con el significado frecuencista o empirista. Esta interpretación es útil cuando se dispone de un gran número de datos y resulta más amplia que el significado clásico por tener aplicación en diversas situaciones de la vida real y posibilitar la conexión entre la probabilidad y la estadística. Se propone apelar a la experimentación como medio para obtener frecuencias relativas y luego formalizar, de modo tal de debatir en relación con la posibilidad de construir el significado de probabilidad condicional.

Además, se espera debatir en relación a los sesgos y errores de aplicación del concepto de probabilidad. Falk (1986) describe las siguientes dificultades con relación a la idea de probabilidad condicional:

- a) Confusión entre condicionamiento y causación. Falacia del eje temporal.
- b) Dificultad en saber elegir el suceso que actúa como condición en los problemas sobre probabilidad condicional.
- c) Confusión de la inversa. Confusión entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$.
- d) Creer en la existencia de un "suceso condicionado $A|B$ ", mientras que lo que es condicionada es la probabilidad.

Modalidad de trabajo y materiales

El taller se organiza en dos encuentros en los que se proponen tareas en las cuales se ponen en juego los significados frecuencista y clásico de probabilidad y la

noción de probabilidad condicional para su resolución. La modalidad de trabajo es, en un primer momento en equipos de tres o cuatro integrantes y en un segundo momento, se realizan discusiones colectivas en las que cada grupo expone su producción y se analiza cada una de ellas.

Se pretende reflexionar con las/os asistentes, en diversos momentos, el modo en que todo lo abordado se llevaría adelante en la escuela secundaria y de qué modo se potenciaría la autonomía y producción por parte del estudiantado.

Durante el desarrollo del taller se proponen las siguientes tareas:

1. En el festejo de la estudiantina de una escuela de la ciudad de Santa Fe se regalan caramelos a las 3 divisiones de 5to año. Para esto, cada grupo debe elegir una de las 4 salidas de una máquina expendedora transparente de caramelos que permanecerá encendida durante 60 segundos.

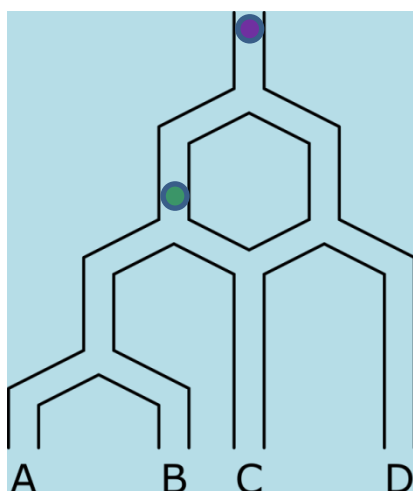


Imagen 1: Máquina expendedora de caramelos. Figura modificada de una que se encuentra en el Recurso Multimedia LABAPC¹

a) ¿Qué salida/s te imaginas que elegirían tus estudiantes?, ¿por qué?

b) La respuesta de tus estudiantes, ¿coincidiría con la tuya?, ¿por qué?

c) Simula la situación planteada y obtiene conclusiones.

❖ *Para experimentar en LABAPC: Azar y Probabilidad – Elige un circuito con bolas.*

d) ¿Cómo calcularías las probabilidades?

e) ¿Cuál es el comportamiento de las frecuencias relativas durante los sesen-

¹ García Moreno, J. Recurso Multimedia "Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria" (LABAPC). Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación, Madrid, 2009-2010.

ta segundos que se lanzan los caramelos?

❖ *Para experimentar en LABAPC: Azar y probabilidad – Cada punto se aproxima a su recta...*

2. Luego, se selecciona al azar una división y un/a estudiante de la misma para que responda 2 preguntas. En caso que acierte las 2 preguntas gana todos los caramelos que quedan en la máquina para compartirlos con su división, en caso contrario deben responder estas preguntas un/a representante de otra división.

a) ¿Cómo se puede realizar la selección de la división y el/la estudiante?

b) Juana de la división 5^o economía fue seleccionada. Sin embargo, cuando se lleva adelante esta actividad se encuentra obstruido uno de los canales por los que pasan los caramelos, tal como se muestra:

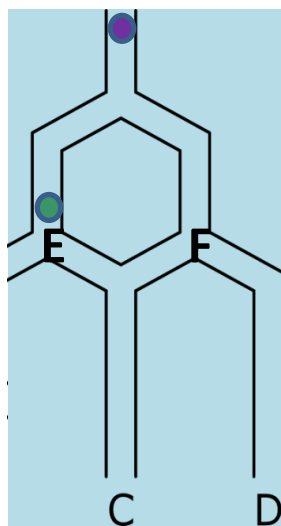


Imagen 2: Máquina expendedora de caramelos obstruida

A Juana se le tapan los ojos y todo el colegio observa el recorrido del caramelo. Ella debe responder las siguientes preguntas:

I - Si el caramelo pasó por F, ¿por dónde salió?

II - Si el caramelo salió por C, ¿por dónde pasó antes?

Tabla 1: Tarea que se aborda con las/os participantes. Fuente: Elaboración propia

Cabe mencionar que durante la resolución de las últimas preguntas se solicita a las/os participantes que calculen algunas probabilidades asociadas con las preguntas I) y II) para introducir el concepto de probabilidad condicional. Asimismo, para estimar las probabilidades de los distintos recorridos del caramelo se les sugiere

experimentar en LABAPC: Equipamiento experimental –Lanzamientos rápidos de una moneda. Segunda escena.

Además, la tarea presentada se organiza en etapas con el fin de reflexionar en relación con cada una de las preguntas que se realizan y el potencial que podría presentar el abordaje con la misma en la educación obligatoria.

Finalmente, esta propuesta requiere el empleo de computadoras, puesto que se emplea el recurso LABAPC con el fin de simular varios experimentos y de reflexionar con respecto al uso alternativo de simuladores cuando no se dispone de uno vinculado estrictamente con la situación problemática. Se proponen además distintas aplicaciones para realizar sorteos y utilizar ruletas en el celular.

Reflexiones finales

En el taller, tal como se menciona anteriormente, se espera invitar a docentes y futuras/os profesoras/es en matemática a trabajar con tareas que focalizan en el uso de simulaciones (con elementos tradicionales y tecnologías digitales), el significado frecuencialista de la probabilidad, así como la probabilidad condicional. Se busca reflexionar en relación a la necesidad actual de formar ciudadanos críticos que dispongan conocimientos que les permitan interpretar, seleccionar y comunicar información, lo que requiere un desarrollo y manejo de conocimientos estocásticos (Behar y Grima Cintas, 2003).

A su vez, en el cierre del taller se delibera y discute en torno a la importancia de trabajar en probabilidad (en comunión con la estadística) en el aula de matemática, atendiendo que estos dominios, olvidados algunas veces, tienen un alto valor formativo y requieren el desarrollo de modos de hacer y pensar específicos. En este sentido, se pone de manifiesto la necesidad de brindar oportunidades al estudiante para que se involucre con las formas de razonamiento propias de estos dominios y de franquear esta barrera de carencia de enseñanza de temas estocásticos en la escuela secundaria atendiendo a los currículos oficiales vigentes actualmente en Argentina.

Bibliografía

- Behar, Roberto y Grima Cintas, Pere** (2004). La Estadística en la Educación Superior ¿Formamos Pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad*, 5 (2), 84-90.
- Falk, Ruma** (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In: *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp.292-297). International Statistical Institute.
- Gal, Iddo** (2005). Towards “Probability Literacy” for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.
- Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología** (2012). NAP. Ciclo Orientado. <https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado>.
- Tauber, Liliana** (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas*, 8(01), 53-74.
- Topic Study Group 11**. Teaching and learning of probability. ICME 14. Shanghai, 2020. <https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1566703296456>.
- Viñas, Isabel** (2014). *Desarrollo de la intuición probabilística en educación primaria*. Universidad de Valladolid.

Juegos con dados digitales: posibles caminos para la resolución de problemas

MICAELA MAZZOLA

micamazzola@gmail.com

PATRICIA CAVATORTA

patricia.cavatorta@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL)

Resumen

En este escrito exponemos la propuesta de un taller dictado de manera sincrónica virtual. En el mismo planteamos el análisis y la elaboración de juegos y/o actividades lúdicas para la enseñanza de la matemática en la Educación Inicial y la Educación Primaria, mediadas por el uso de distintos tipos de dados contruidos por un simulador digital. Además, damos cuenta de las finalidades de cada uno de los dos encuentros en los que se concretó y de las actividades propuestas en ellos. Por último, planteamos algunas reflexiones en relación a las discusiones dadas en el marco del taller, que enriquecieron las miradas sobre las posibilidades que habilita el uso del recurso digital considerado.

Palabras clave: juegos / problema matemático / simulador de dados / educación inicial / educación primaria

Introducción

En este taller nos propusimos que las y los asistentes analicen y produzcan juegos y/o actividades lúdicas para la enseñanza de números y operaciones en la Educación Inicial y la Educación Primaria, con el uso de distintos tipos de dados no convencionales.

Existen muchas y variadas actividades con dados convencionales propuestas por especialistas y utilizadas frecuentemente en las aulas de ambos niveles educativos. Ante esto, decidimos invitar a las y los participantes a realizar un recorrido que permita resignificar -o construir nuevos- saberes didácticos a partir de la exploración, indagación y uso de la aplicación DICE, un simulador de dados de diferentes formatos. Este camino se trazó recuperando lo que implica enseñar matemática desde la resolución de problemas, donde los juegos con dados (no convencionales) funcionan como medios.

DICE simula el lanzamiento de dados. Se pueden elegir la cantidad de caras, la cantidad de dados a lanzar, incluye características adicionales como sumar resultados, mostrar el historial de lanzamientos o agregar modificadores a las tiradas. También cuenta con efectos visuales y de sonido para hacer la experiencia más realista y amigable.

El propósito de trasfondo de la propuesta fue propiciar un espacio que permita ampliar la mirada (en clave de enseñanza) sobre las posibilidades que ofrecen los dados digitales, recuperando las potencialidades del recurso para la construcción de actividades lúdicas cuya resolución implique un quehacer matemático colaborativo.

En la planificación de los encuentros sincrónicos consideramos necesario que se geste un espacio en el que surjan propuestas para el aula que habiliten la construcción colectiva de saberes matemáticos entre niños y niñas, en un ámbito de trabajo compartido y de búsqueda de estrategias conjuntas. Y en este sentido, pensamos a las y los destinatarios de dichas propuestas como resolutores/as de verdaderos problemas matemáticos y a las y los docentes como mediadores de dicha construcción.

Fundamentación

Enseñar matemática implica, en términos de Quaranta (2002), introducir a las y los estudiantes en un modo particular de hacer y producir conocimiento que ha

sido elaborado por la cultura. En relación a esto, Charnay (1994) afirma que se debe buscar generar en las salas y aulas un modo de trabajo análogo al que realizan los matemáticos en el desarrollo de su tarea.

De esta forma, este “hacer matemática” supone que niñas/os deban resolver problemas, adelanten posibles soluciones, prueben, se equivoquen y corrijan, comuniquen a sus pares sus modos de resolver, consideren las resoluciones de otros, discutan y defiendan posiciones, establezcan acuerdos.

El planteo de problemas es un escenario de aprendizaje privilegiado para que alumnos/as hagan matemática en el aula. Quaranta (2002) señala que para que una situación constituya un problema se debe contemplar que tenga una finalidad para el/la estudiante, esto es que el/la niño/a tiene que advertir algo por alcanzar y en qué consiste esa meta. Además, debe contar con conocimientos disponibles de manera que pueda comenzar un proceso de búsqueda de solución. Al mismo tiempo, no le deben resultar suficientes para encontrar la respuesta a la situación de manera inmediata. La solución debe o puede encontrarse a través de diferentes procedimientos. Esto habilitaría la puesta en juego de aquellos conceptos que quieren ser enseñados y/o revisados y profundizados.

Reconocemos, como plantean Kipersain y Rodríguez (2013), que:

Muchos de los aprendizajes que los niños realizan en los primeros años de su vida suceden en el seno de situaciones lúdicas. El juego posibilita que algunos saberes se carguen de sentido y resulten, desde la perspectiva infantil, significativos, generando así razones valederas para apropiarse de ellos. (p.61)

En este sentido, los juegos pueden constituirse en escenarios fértiles para la resolución de problemas. Esto es, la construcción de propuestas de enseñanza lúdicas permiten plantear problemas que hagan funcionar los conocimientos que pretendemos enseñar.

Sin embargo, no es a la mera acción lúdica a lo que estamos apuntando como posible situación de enseñanza matemática, pues jugar no es condición suficiente para aprender. “Para que esto suceda es necesario tener una instancia posterior de reflexión sobre las estrategias utilizadas y su vinculación con los conocimientos a adquirir, mediante la guía activa del docente” (Bianchi, 2014, p. 28).

Para el desarrollo de los juegos se utilizan distintos tipos de materiales didácticos.

Materiales estructurados que pueden cobrar «nueva vida» si se los va renovando...; juegos «clásicos» que pueden pasar a constituir otros juegos...; material polivalente que se transforma inmediatamente si le otorgamos un sentido lúdico... Materiales todos que pueblan nuestras salas y nos invitan a pensar en el juego: en cómo aprovecharlos, para seguir jugando. (Kipersain y Rodríguez, 2013, p. 71)

Actualmente los materiales didácticos pueden ser concretos o digitales. Según González y Weinstein (2006), en las primeras infancias, los soportes digitales pueden acompañar el abordaje de contenidos matemáticos además de los generalmente utilizados, como dados, cartas, cajas, sogas, etc. “Es decir, el soporte informático es un recurso más que colabora en las construcciones que los niños realizaron en otros ámbitos, optimizando el aprendizaje de los contenidos” (González y Weinstein, 2006, p. 213).

Bianchi (2014) sostiene que una de las competencias básicas a desarrollar en la escuela primaria es la digital. En relación a la gran variedad de recursos digitales disponibles plantea que,

[...] constituyen un arsenal inédito de herramientas que, bien utilizadas, facilitan la creación de ambientes de aprendizaje enriquecidos adaptables a estrategias modernas de enseñanza y que impacten de manera significativa en el desarrollo de las habilidades cognitivas del alumnado en todas las áreas del currículo, permitiendo niveles de aprendizaje mejores que los actuales. (p.13)

Destinatarios

- Estudiantes de los profesorados de Educación Inicial, Educación Primaria y en Matemática.
- Docentes y directivos de nivel inicial y primario.
- Docentes y directivos de Institutos Superiores de Formación Docente de las carreras mencionadas.
- Otros profesionales vinculados a la Educación en las Primeras Infancias.

Objetivos

Este taller es propuesto como un espacio para la producción y análisis de juegos para el aula. Donde los mismos planteen verdaderos problemas matemáticos para los sujetos de la Educación Inicial y Primaria. Nos propusimos:

- Poner en tensión las ideas sobre qué es enseñar matemática en el nivel inicial y primario.
- Reflexionar sobre la importancia de “hacer matemática” desde la resolución de problemas, en forma colaborativa a partir del juego.
- Dar a conocer y discutir ventajas del simulador de dados DICE como soporte didáctico propicio para gestar propuestas lúdicas.
- Analizar y diseñar diferentes juegos que apunten a “hacer matemática” en el nivel inicial y primario a partir del simulador ofrecido.

Organización de la propuesta

El taller se desarrolló en dos encuentros sincrónicos de 2 horas reloj cada uno. Cada encuentro contó con actividades orientadas a diferentes fines.

Primer Encuentro

1) Finalidades

- Presentación del encuadre teórico de la propuesta.
- Surgimiento de la necesidad de uso de la aplicación DICE.
- Exploración de la aplicación mediante el análisis grupal de distintos juegos que involucran dados no convencionales.

2) Actividades

- Presentación del taller y exposición breve de lo que implica enseñar matemática desde la resolución de problemas medidos por juegos.
- Presentación del juego “Llegar al 1000” para debatir en plenario: ¿Por qué este juego plantea un problema? ¿Cuáles son los contenidos matemáticos que entran en escena? ¿Qué variantes son posibles? ¿Qué dificultades se puede encontrar para su implementación?

Llegar al 1000¹

Materiales: 2 dados de 8 caras (con números de 1 a 8).

2 dados de 10 caras (con números de 0 a 9).

Objetivo: Armar un número con los dígitos que salen en los dados para aproximarse al número 1000 sin pasarse.

Cantidad de participantes: Las y los estudiantes se organizan en grupos de 4 integrantes. Cada grupo forma 2 equipos de 2 jugadores.

Instrucciones:

El primer equipo escoge un número inicial entre 100 y 200.

El segundo equipo lanza los cuatros dados y usa tres de los números que le han salido para formar un número.

Una vez formado sumará ese número al número inicial que propuso el primer equipo. Luego se invierten los roles.

Ganará la mano aquel equipo que consiga aproximarse más a 1000 sin pasarse y obtiene 1 punto.

Ganará el juego el equipo que primero llegue a obtener 3 puntos.

- Análisis de juegos con dados no convencionales para la Educación Inicial o Primaria. Para poder realizar esta actividad fue necesario que instalen la aplicación DICE en sus celulares.

Organizamos a las y los asistentes en pequeños grupos (de 3 o 4 personas) y les asignamos uno de los juegos que se exponen a continuación. Les solicitamos el análisis de: los problemas matemáticos involucrados, el año escolar en los que podrían implementarse, posibles variantes con intencionalidad didáctica y las potencialidades y limitaciones del simulador en ese contexto.

Juego 1: 1-2

Materiales:

2 dados con números de 1 a 3.

1 dado con números de 1 a 5.



Objetivo: Obtener la mayor cantidad de puntos después de 10 jugadas.

¹ Este juego fue elaborado en el marco del proyecto AEAS "Enseñar Matemática a niños y niñas. Discusiones y propuestas lúdicas para favorecer la construcción de conceptos con sentido" (FHUC-UNL).

Cantidad de participantes: Entre dos a cuatro participantes.

Instrucciones:

Cada jugador en su turno lanza los dados y anota un punto si al sumar dos de ellos (cualesquiera) se obtiene lo indicado en el dado restante.

El juego termina después de 10 rondas y gana el que obtiene mayor puntaje.

Juego 2: 3 en Línea²

Materiales:

1 dado negro de 10 caras (con números de 0 a 9).

1 dado negro de 10 caras (con las decenas de 00 a 90).

1 dado rojo de 10 caras (con números del 0 a 9).

10 fichas (de un mismo color) por cada equipo.

1 tablero con números del 1 al 100.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Objetivo: Ser el primer equipo en colocar 3 fichas en casillas consecutivas en LÍNEA de manera horizontal, vertical o diagonal.

Cantidad de participantes: Las y los estudiantes se organizan en grupos de 4 integrantes. Cada grupo forma 2 equipos de 2 jugadores.

Instrucciones

Cada equipo lanza los dados y suma los valores obtenidos. Comienza el equipo que obtiene el mayor valor.

Cada equipo en su turno lanza los 3 dados y coloca una ficha en una casilla que sea el resultado de:

² Este juego fue elaborado en el marco del proyecto AEAS "Enseñar Matemática a niños y niñas. Discusiones y propuestas lúdicas para favorecer la construcción de conceptos con sentido" (FHUC-UNL).

la suma de los dados negros más el rojo, o bien,

la suma de los dados negros menos el rojo.

Si no encuentra una casilla donde colocar su ficha dicen “paso” dando lugar al otro equipo.

El juego termina cuando:

Un equipo consigue colocar 3 fichas en casillas consecutivas en línea horizontal, vertical o diagonal; siendo ganador de la partida.

Los dos equipos gastan sus 10 fichas sin lograr el objetivo. En este caso hay empate y se vuelve a jugar.

Juego 3: La tela de la araña³

Material

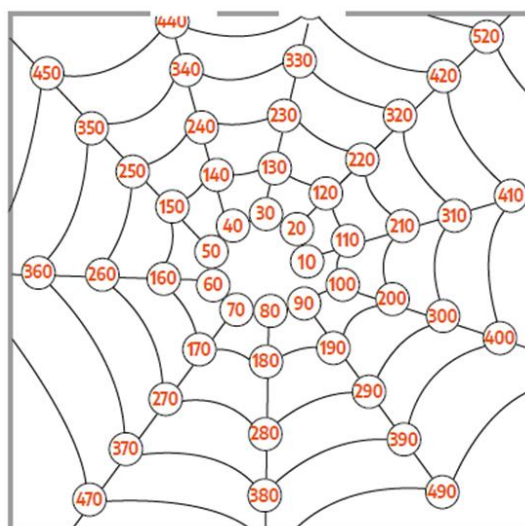
1 dado negro de 6 caras (con números de 1 a 6). Cada punto vale 100.



1 dado rojo de 10 caras (con números del 0 a 9). Cada punto vale 10.

Fichas de distintos colores, una por cada participante.

1 tablero con números del 10 al 1000:



Objetivo: Lograr sacar la ficha de la telaraña.

Cantidad de participantes: Dos o más participantes.

Instrucciones: Cada jugadora o jugador coloca su ficha en el centro, y

³ Este juego es una adaptación de un juego propuesto en: Ministerio de Educación de la Nación (2020)

tiene que salir de ahí avanzando con los dados. Por turno, se tiran los 2 dados juntos; gana el primer jugador o la primera jugadora que logra sacar su ficha de la telaraña.

Juego 4: El gato y el ratón

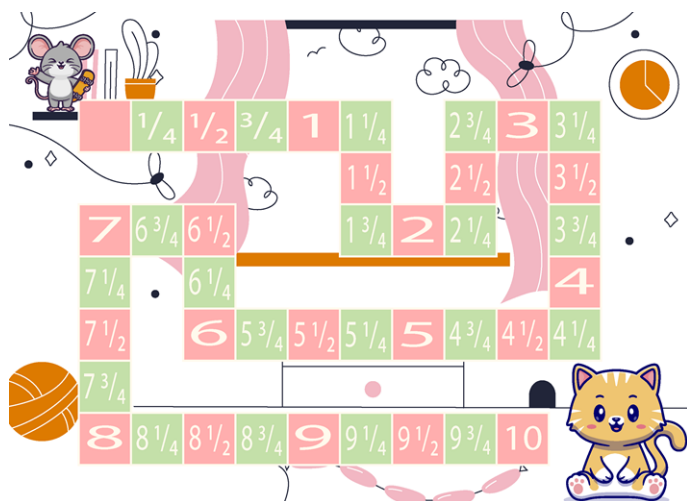
Material

1 dado azul con números de 1 a 4.

1 dado rojo con números del 1 a 4.

Fichas de dos colores, una por cada participante.

1 tablero con números fraccionarios:



Objetivo: Para el gato, atrapar al ratón. Para el ratón, refugiarse en su casa (casilla 10).

Cantidad de participantes: Dos participantes.

Instrucciones:

El ratón se ubica al inicio (casilla 0) y el gato al final del camino en la casa (casilla 10).

El ratón empieza el juego.

En cada turno, el gato o el ratón, debe lanzar ambos dados y armar una fracción considerando el número de un dado como numerador y el del otro como denominador. Se mueve en cualquier dirección en el tablero tanto como la fracción armada indica.

Si no es posible moverse con la fracción formada por los dados, se pierde el turno.

El juego termina si sucede alguno de los tres casos siguientes:

El gato llega en su turno a la casilla en que se encuentra el ratón. Gana el gato.

El ratón llega a su casa. Gana el ratón.

Se termina tras un número determinado de tiradas o en un tiempo establecido. Si el gato no atrapó el ratón, gana el ratón.

Segundo Encuentro

1) Finalidades

- Elaboración de juegos para el aula que planteen problemas matemáticos.

2) Actividades

- Diseño de juegos

Organizamos a las y los asistentes en pequeños grupos (de 3 o 4 personas) y les solicitamos que diseñen un juego (para la Educación Inicial o Primaria) con dados no convencionales. Debían utilizar el simulador DICE y atender al marco teórico ofrecido. Además, debían indicar: los problemas matemáticos involucrados, destinatarios, posibles resoluciones/estrategias por parte de niñas/os, posibles intercambios/institucionalizaciones, posibles variantes con intencionalidad didáctica, potencialidades y limitaciones del simulador en ese contexto.

- Puesta en común para socializar los juegos y análisis realizados.

Reflexiones finales

Los momentos vivenciados en el taller fueron enriquecedores, dado que a partir del recorrido trazado en el mismo logramos que:

- Surja el uso de la aplicación DICE como necesidad docente. Esto fue a partir de la indagación sobre las dificultades que se pueden presentar a la hora de la implementación del juego “Llegar al 1000” en el aula. Las y los asistentes plantearon lo arduo que sería la construcción de los dados utilizados en ese juego dando pie a la presentación de la aplicación como solución a ese señalamiento.

- Las y los asistentes se familiaricen con la aplicación y descubran sus potencialidades como recurso para la enseñanza a partir de algunas actividades tanto del

primer como del segundo encuentro.

- Surjan -en el segundo encuentro- propuestas enriquecidas por el recurso digital para el aula de matemática. Si bien en las actividades solicitamos que los juegos fueran para educación inicial y primaria, surgieron algunas propuestas para la educación secundaria, en consonancia con el nivel en el que trabajan las y los asistentes.

- Se generaran debates en relación a la importancia de conocer distintos recursos digitales y explorarlos, acordando que sólo mediante indagación de los mismos estaremos en mejores condiciones para poder pensar propuestas áulicas que los incluyan, potenciando aquello que no es inmediatamente posible con el uso de material concreto.

Bibliografía

Bianchi, Ibe (2014). *Herramientas para matematizar el aula. Tecnologías y recursos en el Primer Ciclo de la escuela primaria*. Miño y Dávila editores.

Charnay, Roland (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz. (Comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 51-64). Paidós Educador.

González Adriana y Weinstein Edith (2006). *La enseñanza de la matemática en el jardín de infantes a través de secuencias didácticas*. Homo Sapiens.

Kipersain, Paloma y Rodríguez, Inés (2013). El juego como recurso genuino en la sala. En P. Sarlé (Coord.). *Lo importante es jugar...Cómo entra el juego en la escuela*. (pp. 57-73). Homo Sapiens Ediciones.

Ministerio de Educación de la Nación (2020). *Educación Primaria 2do y 3er grado: cuaderno 5*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Quaranta, María Emilia (2002). La enseñanza de la matemática en el nivel inicial. Orientaciones didácticas para el Nivel Inicial, 1º parte; Documentos de la Revista de Educación, Serie Desarrollo Curricular, Dirección Gral. de Cultura y Educación. Provincia de Buenos Aires.

Concurso de recursos de comunicación visual

“La Matemática está en todas partes”

La matemática es una disciplina que está presente en nuestra cotidianeidad, de formas sorprendentes y variadas. En un nivel básico, utilizamos las habilidades numéricas para contar, medir y realizar cálculos simples en nuestra vida diaria, desde saber cuánto dinero necesitamos para comprar algo hasta calcular el tiempo que nos llevará llegar a nuestro destino. Además, la geometría nos ayuda a comprender cómo se distribuyen los objetos en el espacio y cómo interactúan entre sí, lo cual es fundamental para organizarnos en nuestro entorno físico. La matemática interviene en la medicina, la música, la computación, y tantas otras disciplinas.

Asimismo, la estadística se aplica en numerosas situaciones cotidianas. Nos ayuda a interpretar y comprender los datos que nos rodean, desde las encuestas de opinión hasta los estudios científicos. Gracias a la estadística, podemos analizar tendencias, hacer predicciones y tomar decisiones basadas en la información recopilada. Por ejemplo, cuando vemos noticias sobre el porcentaje de personas que han sido vacunadas contra una enfermedad, cuando evaluamos qué producto es más popular en el mercado, cuando hacemos proyecciones sobre las posibilidades de que nuestro equipo salga campeón o cuando debemos decidir sobre distintas formas de procesar la basura, estamos utilizando conceptos estadísticos para comprender mejor el mundo que nos rodea y tomar decisiones basadas en evidencia sólida.

La temática de este concurso abarca ciertos tipos de comunicación visual en los que se pongan en evidencia, se expliquen o se asocien conceptos, objetos o recursos que pertenecen a la matemática y/o a la estadística y que se encuentren presentes en la realidad cercana.

Objetivo

Elaborar una producción que permita comunicar de manera visual o audiovisual la presencia de la matemática y/o de la estadística a nuestro alrededor, poniendo de manifiesto su utilidad en la actividad cotidiana.

Modalidad

Los participantes presentan una producción que refleje de manera breve y concisa la presencia de uno o varios conceptos matemáticos y/o estadísticos en la realidad que los rodea. La producción se acompaña con una breve descripción, de no más de diez líneas, que especifique el/los conceptos que se desean involucrar. Cada producción debe pertenecer a una y solo una de las siguientes categorías:

- Categoría A: Estudiantes de 1° a 3° año de educación secundaria
- Categoría B: Estudiantes de 4° a 6° año de educación secundaria
- Categoría C: Estudiantes de profesorado de matemática.

Cada producción debe adoptar uno y solo uno de los siguientes formatos de participación:

Infografías

Videos cortos

Fotografías

Criterios de evaluación

Las producciones son evaluadas según los siguientes criterios:

- Originalidad y creatividad
- Cumplimiento de pautas establecidas
- Adecuación de lo expuesto con el/los concepto/s seleccionado/s.
- Precisión de la información.

INFOGRAFÍAS

Ganadora Categoría A

Infografía: **La matemática en los juegos de mesa**

Carolina Spagnuolo y Ema Goldberg

Institución: ORT ARGENTINA. Sede Belgrano. CABA

Docente: Fabiana Mibashan

Carolina Spagnuolo y Ema Goldberg Medici presentan:

LA MATEMÁTICA EN: LOS JUEGOS DE MESA

AZAR

Aquellos en los que el jugador no tiene elección. En estos hay mucho de probabilidad, lo cual es sinónimo de matemática (ya que se calcula sobre un porcentaje)

Ejemplo: El Bingo.

El jugador no elige su cartón, y aunque pudiera todos los números tienen la misma posibilidad de salir



MITI-MITI

Aquellos en los que hay azar pero también estrategia matemática. Se tiran los dados, pero se puede reflexionar que hacer en la siguiente jugada y como esto va a afectar el resultado.

Ejemplo: La Generala.

se tiran los dados pero en función de eso se calcula que puntaje nos conviene buscar.



ESTRATEGIA

Son aquellos que involucran nada más que el pensamiento racional, lo cual es lógica matemática.

Para poner la primera ficha, se analiza que casillas tienen mas posibilidad de formar un 3 en línea, en base a lo cual se analizará en juego.

3	2	3
2	4 (3)	2
3	2	3

cuadro con las posibilidades exactas de cada casilla para hacer tres en línea

PD: porcentajes no incluidos porque no entran en la infografía.

Ganadora Categoría B

Infografía: **Las matemáticas no son sólo números y nos rodean aunque no lo pensemos**

Feliciano Speranza

Institución: EETP N°475 Francisco Zimmermann. San Jorge (Santa Fe)

Docente: Jérica Cardamone



Ganadora Categoría C

Infografía: **La matemática rompiendo barreras (de acceso)**

Macarena Cosso, Agustín Lares, Gonzalo Montero y Nadia Vallenato

Institución: IES Dr Luis Federico Leloir – Gualeguay (Entre Ríos)



VIDEOS CORTOS

Ganador Categoría A

Video corto: **Matemáticas para la compra de milanesa**

Matías De Giovanni

Institución: Instituto pre universitario San Pablo T, Universidad San Pablo T.
San Pablo (Tucumán)

Docente: Pamela Luján

Ganador Categoría B

Video corto: **La matemática en la programación**

Julieta Doratto y Leonel Sánchez

Institución: E.E. Técnico Profesional N° 458 "Hernandarias de Saavedra". Laguna Paiva (Santa Fe)

Docente: Micaela Mazzola

FOTOGRAFÍAS

Ganadora Categoría A

Fotografía: **La matemática se ve desde tus ojos y en tus ojos**

Ainhoa Alustiza Tulian y Ana López

Institución: Colegio Internacional Parque de España. Rosario (Santa Fe)

Docente: Lucía Schaefer



Ganadora Categoría B

Fotografía: **Matemática en el velador**

Juan Ignacio Kuchen

Institución: EESO y FPPI N° 8093 "San José". San Jerónimo Norte (Santa Fe)

Docente: Fabiana Mibashan





UNL • FACULTAD
DE HUMANIDADES
Y CIENCIAS

