ACTAS DE LAS VII JORNADAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y IV JORNADAS DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Sara Scaglia
Fabiana Kiener
Marcela Götte

—

COMPILADORAS

FHUC

UNL • FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS

Actas de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática

Universidad Nacional del Litoral
Actas de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática / compilado por Sara Scaglia ; Fabiana Kiener ; Marcela Götte. - 1a ed. - Santa Fe : Universidad Nacional del Litoral, 2021.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-692-266-1

1. Matemática. 2. Didáctica. I. Scaglia, Sara, comp. II. Kiener, Fabiana, comp. III. Götte, Marcela, comp. IV. Título.
CDD 510.711

Autoridades

Rector UNL
Enrique Mammarella

Decana FHUC
Laura Tarabella

Vicedecano FHUC
Daniel Comba

Departamento de Matemática
Directora: Sara Scaglia

Junta Departamental
Silvia Bernardis, Liliana Tauber y Karina Temperini

Carrera de Matemática
Directora: Yanina Redondo

Comité Evaluador
Silvia Bernardis, Ana Bressan, Claudia Broitman, Flavia Buffarini, Gabriela Pilar Cabrera, Lilian Cadoche, Elena Carrera, Patricia Cavatorta, Eleonora Cerati, Mariela Cravero, María Florencia Cruz, María Susana Dal Maso, Betina Duarte, Cristina Esteley, Silvia Etchegaray, Edith Gorostegui, Marcela Götte, Lorena Guglielmone, Fabiana Kiener, Cecilia Laspina, Mabel Lisera, Adriana Magallanes, Ana María Mántica, María Elena Markiewicz, Elda Micheli, Virginia Montoro, Liliana Nitti, Adriana Pérez, Marcel Pochulu, Yanina Redondo, Mabel Rodriguez, Silvana Santellán, Gladis Saucedo, Sara Scaglia, Carmen Sessa, Natalia Sgreccia, Juan José Sosa, Liliana Tauber, Karina Temperini y Mónica Villarreal.

Comité Organizador
Silvia Bernardis, Patricia Cavatorta, Eleonora Cerati, María Florencia Cruz, Marcela Götte, Fabiana Kiener, Natalia Martínez, Yanina Redondo, Silvana Santellán, Sara Scaglia, Berardino Santirocco, Liliana Tauber, Karina Temperini y María Amelia Vignatti.

Agradecimientos

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a:

- la Facultad de Humanidades y Ciencias, y en particular, a su equipo de gestión, que nos permitió llevar a cabo este proyecto en estos momentos complejos y signados por la incertidumbre.
- el equipo editorial de la Facultad de Humanidades y Ciencias, por su apoyo incondicional y por la atención a cada uno de nuestros requerimientos.
- las/los docentes del Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades Ciencias, por acompañar y apoyar cada una de las decisiones vinculadas con la realización de este evento. En particular, a las/los colegas integrantes del Comité Organizador de estas Jornadas, que desde mediados de 2019 se pusieron sobre sus hombros la enorme tarea de darle forma y contenido.
- las/los profesores que dispusieron de su tiempo, atención y sabiduría para coordinar las mesas de trabajo y para llevar adelante las propuestas de capacitación (cursos y talleres) que forman parte de esta edición.
- las y los especialistas en educación matemática de nuestro país, que edición tras edición colaboran en la esencial tarea de evaluar las contribuciones de las/los expositores.
- las especialistas que nos honran al aceptar nuestra invitación para compartir sus reflexiones, experiencias y conocimientos: Patricia Sadovsky, Cristina Esteley, Patricia Konic, Andrea Novembre y Gabriela Pilar Cabrera.
- colegas y estudiantes que participan con sus producciones, apostando a esta instancia de encuentro e intercambio que procuramos generar en cada edición.
- colegas y estudiantes asistentes a las Jornadas, que una vez más confían en nuestro trabajo y lo expresan con su comprometida participación en cada uno de los espacios propuestos en el marco de las Jornadas.

Índice

42. ¿Cómo poner en juego los diferentes significados de probabilidad en el aula de matemática?
María Florencia Cruz y Karina Temperini

43. El juego en matemática como recurso de enseñanza en el nivel primario y ciclo básico del nivel secundario
Cecilia Laspina y María Laura Imvinkelried

44. MATEMATIC
Fabiana Kiener, Natalia Martínez, Patricia Ramírez y María Amelia Vignatti

45. Construcción del sentido estadístico a partir de datos e información en la web
Liliana Tauber, Yanina Redondo, Mariela Cravero y Silvana Santellán

46. Una experiencia para explorar enlaces matemáticos
Sara Scaglia y María Florencia Cruz

Concurso de Fotografía: La Matemática está en todas partes

Mathematical Nature
Camila Chesa

Galaxia hexagonal embotellada
Luján Michelle Funes

Habitando el espacio-tiempo
Alondra Furlán

Medias Naranjas
María Luz Sandobal

Rombos Tejidos
Valentina Paglia

Simetrías matemáticas en los animales
Paulina Rustre

El caracol y su reflejo
Valentina Arenales

La esfera perdida
Agostina Cavallero

La ruleta de los ángulos
Máximo Varayoud

La espiral del carpintero
Nicolás Buttaro

El tríptico del pez
Lorenzo Imhoff

¿Subís o bajás?
Matias Bustaber

¿En dónde se encuentran las matemáticas?
Brisa Osuna

Fillmore-Cars
Lautaro Destefani

Naturaleza geometría
Miranda Godoy

El reflejo de una flor
Victor Hugo Schreier

Las margaritas
Valentina Tévez

Presentación

Nos complace presentar en esta publicación las contribuciones que colegas investigadores/as y docentes de matemática han elaborado en ocasión de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática, organizadas por el Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral y desarrolladas de modo virtual entre los días 22 y 25 de febrero de 2021.

El recorrido realizado para llegar a esta grata instancia de compilación de las producciones, que reflejan preocupaciones e intereses de la comunidad de educación matemática de nuestro país, ha sido especialmente complejo. Luego de un año signado por la pandemia causada por el coronavirus SARS-CoV-2, nos encontramos en un momento bisagra, preparándonos para comenzar un nuevo ciclo lectivo que nos invita a reflexionar acerca de la experiencia transitada el pasado año para proyectar el año que se inicia.

Durante 2020, con las instituciones educativas cerradas y/o impedidas de ejercer las tareas de enseñanza para las cuales fueron creadas, docentes de distintos niveles educativos afrontaron con valentía, compromiso y responsabilidad el desafío de convocar a sus estudiantes para invitarlas/los a compartir experiencias de trabajo matemático en forma virtual (en el mejor de los casos), pero también a través de materiales impresos, aplicaciones de telefonía celular, entre otras posibilidades. No siempre el esfuerzo condujo a los resultados esperados. El principal obstáculo, que lamentablemente en demasiados casos no siempre fue sorteado con éxito, ha sido la imposibilidad de acceder en las mejores condiciones a todas y todos los estudiantes.

Es así como empieza a cobrar especial relevancia la discusión acerca del rol de la escuela en la sociedad, tantas veces vapuleada y considerada “pasada de moda”. Con las escuelas prácticamente cerradas, la reflexión acerca de lo que esta institución ofrece, permite y también obstaculiza, se torna esencial. Si bien queda fuera de los objetivos de esta Presentación esa tarea, nos interesa recuperar un par de reflexiones que, creemos, visualizan la relevancia de la escuela y el rol central de la tarea docente. Masschelein y Simons (2014, p.37-38) afirman:

> La escuela, como una cuestión de suspensión, no sólo implica la interrupción temporal del tiempo (pasado y futuro), sino también la eliminación de cualquier tipo de expectativas, exigencias, papeles y deberes conectados a un espacio determinado fuera

> de la escuela. [...]. Este tipo de «espacio del medio» no tiene orientación o destino pero hace que sean posibles todos los destinos y todas las orientaciones. Quizá la escuela sea otra palabra para este espacio del medio donde los profesores llevan a los jóvenes hacia el presente.

La última frase de la cita remite a la centralidad del rol docente. Paulo Freire (2006, p.68) sostiene que "reconocer esa importancia no significa pensar que [la enseñanza] es la más importante de todas. Significa reconocer que es fundamental. Y algo más: es indispensable para la vida social". Considera que "ninguna sociedad se afirma sin el perfeccionamiento de su cultura, de la ciencia, de la investigación, de la tecnología, de la enseñanza" (p.73). Es así que reconocemos y defendemos la importancia y la centralidad de la tarea docente para la sociedad.

En este especial contexto, luego de un año en el cual la presencialidad cedió su lugar a otros modos de vinculación entre docentes y estudiantes, se desarrollan estas Jornadas. Inicialmente propuestas para llevarse a cabo en junio de 2020, la situación sanitaria (con el establecimiento del Aislamiento Social Preventivo Obligatorio en primer lugar, y luego el Distanciamiento Social, Preventivo Obligatorio) impidió su concreción el pasado año. Desde el Departamento de Matemática de Facultad de Humanidades y Ciencias, a cargo de la organización de este evento desde su inicio en el año 2004, tomamos la decisión de realizar el conversatorio "Educación matemática en tiempos de pandemia". Este evento virtual, que contó con la destacada participación de las profesoras Andrea Novembre y Gabriela Pilar Cabrera, tuvo 780 inscriptos, entre docentes e investigadoras/es de educación matemática, principalmente de Argentina, pero también de otros países.

En el marco del conversatorio realizamos una consulta con el fin de indagar sobre los interrogantes y preocupaciones que, en ese momento de aislamiento, desvelaban a educadoras/es matemáticas/os en relación con la tarea docente a llevar a cabo. Las respuestas recibidas dan cuenta de que las principales inquietudes se focalizan en cómo desarrollar los procesos de enseñanza en ausencia de las clases presenciales y en el modo de llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes. Estas dos cuestiones centrales se entrecruzaron con otras que también se pusieron de manifiesto, algunas por limitar la posibilidad de intercambio, otras porque significaban situaciones inéditas para las cuales había que idear estrategias, tales como la falta de conectividad de docentes y estudiantes, la desigualdad de oportunidades que la situación propugnaba, el rol de los padres y de la familia en estos nuevos formatos de clase, las decisiones acerca de qué contenidos seleccionar, la articulación entre niveles (en los casos de cursos correspondientes al último año de educación primaria y/o secundaria) y el modo de afrontar las dificultades cognitivas de aprendizaje.

Las ponencias que se compilan en este volumen fueron escritas en un período anterior a la pandemia. Sin embargo, pensamos que todas las instancias de estas Jornadas estarán atravesadas por esta circunstancia. Esperamos que los intercambios y discusiones desarrolladas durante las Jornadas resulten útiles para reflexionar juntos, compartir las distintas soluciones que se fueron perfilando para dar respuesta a problemas comunes, intercambiar experiencias y, principalmente, estrechar lazos que nos permitan superar, desde nuestra tarea docente, esta difícil situación que la humanidad está atravesando.

Los trabajos corresponden a dos categorías:

a. *Reportes de investigación*, que incluye investigaciones concluidas o avances de investigaciones sobre educación matemática.

b. *Reflexiones y experiencias para el aula*, que reúne propuestas didácticas de matemática para distintos niveles de escolaridad.

Asimismo, las contribuciones se organizan en torno a seis ejes que constituyen ámbitos de interés de la comunidad de educadores/as matemáticos que participan en las Jornadas, a saber:

1. *Educación Matemática en el nivel inicial y en el nivel primario.*
2. *Educación Matemática en el nivel secundario.*
3. *El uso de tecnologías en el aula de Matemática.*
4. *Educación Matemática en la formación de profesores de Matemática.*
5. *Educación Matemática en carreras no matemáticas.*
6. *Educación Estadística.*

Bajo la expectativa de generar espacios de discusión fecundos y vínculos interpersonales e institucionales que se sostengan en el tiempo, presentamos a continuación las distintas contribuciones, con la intención de que constituyan puntos de partida para pensar la educación matemática en nuestras instituciones y en nuestro país.

Santa Fe, febrero de 2021.

Sara Scaglia, Fabiana Kiener y Marcela Götte
Compiladoras

Referencias bibliográficas

Masschelein, J. y Simons, M. (2014). *Defensa de la escuela. Una cuestión pública*. Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila Editores.

Freire, P. (2006). *El grito manso*. Buenos Aires, Argentina: Siglo veintuno editores.

Resúmenes de participaciones plenarias

La enseñanza en tiempos de excepción: una cita ineludible con (la reconstrucción de) la experiencia de maestrxs y profesorxs

PATRICIA SADOVSKY
patsadov@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Me propongo en esta apertura de las Jornadas de Educación Matemática compartir algunas reflexiones vinculadas a la concepción y desarrollo de un curso de formación docente continua que tuve oportunidad de coordinar entre los meses de septiembre y noviembre de 2020, junto con Analía Segal, en el marco de un convenio entre la Universidad Pedagógica Nacional donde trabajo y el Instituto Nacional de Formación Docente.

Cuando todo se interrumpió de la noche a la mañana y hubo que pensar cómo sostener la escuela sin presencia, hemos visto emerger un colectivo docente que *contra viento y marea* movilizó ideas, exploró alternativas, inventó estrategias, generó lazos con colegas, se contactó con las familias, buscó a los chicos, apeló al uso de nuevos recursos cuyo funcionamiento fue aprendiendo sobre la marcha...Fue una tarea difícil, en la que se pusieron en juego saberes pedagógico-didácticos y se hicieron visibles problemas de enseñanza que, si bien eran probablemente previos a la pandemia, el nuevo escenario contribuyó a identificar más nítidamente.

Para quienes asumimos tareas de formación continua, resultaba ineludible preguntarnos cómo contribuir desde un trayecto formativo a que los docentes pudieran reconstruir conceptualmente esa experiencia en período de excepción: ¿qué se había logrado?, ¿cómo saber qué habían aprendido las chicas y los chicos?, ¿en qué basarse para establecerlo? ¿qué se había intentado pero no se había conseguido? ¿a qué hubo que renunciar indefectiblemente al no disponer de la presencialidad?, ¿qué se había elegido desarrollar y qué se había desestimado y por qué?, ¿cómo se habían tomado esas decisiones?, ¿cómo explicar la desconexión de los que tenían conexión?

Sabíamos, a partir de nuestra experiencia de trabajo colaborativo con docentes, que contribuir a que las y los maestros desarrollen procesos de reconstrucción

sobre sus prácticas en los que puedan fundamentar las decisiones que han tomado, contrastarlas con otras posibles, interpretar en términos de conocimientos las participaciones de los alumnos, analizar las interacciones sostenidas en las clases, explicarse qué aspectos contribuyeron a que algo fuera especialmente potente -o inesperadamente frustrante-, volver a situaciones en las que no han sabido cómo actuar, las y los posiciona en un papel de producción frente a los desafíos que plantea la enseñanza.

Ahora bien, ¿era posible tomar como referencia los resultados de ese trabajo colaborativo y organizar -en condiciones de masividad y virtualidad y en el marco de la pandemia- un trayecto de capacitación en el que las y los cursantes pudieran revisar lo hecho en una etapa en la que la premura y el desconcierto fueron rasgos fundamentales del contexto en el que desarrollaron su accionar? Realizaré en la conferencia algunas aproximaciones a esta pregunta a partir de las decisiones que tomamos al concebir y desarrollar el trayecto formativo al que aludí anteriormente. La intención es aportar fundamentos a la necesidad de concebir, bajo ciertas condiciones, la actividad social de reflexión sobre las prácticas como parte constitutiva del trabajo de enseñar.

Trabajos colaborativos que involucran a profesores que enseñan matemática. Múltiples facetas

CRISTINA ESTELEY

esteley@famaf.unc.edu.ar

Universidad Nacional de Córdoba

Resumen

Con esta conferencia se busca contribuir con los debates y reflexiones sobre diversas problemáticas de la educación matemática que ya se fueron desarrollando a lo largo de las Jornadas. En particular, la conferencia se focaliza en diversas facetas de los trabajos colaborativos que involucran a profesores[1] que enseñan matemática.

Las participaciones de los profesores en instancias de trabajos que implican colaboraciones, es reconocida como parte de las trayectorias de formación de los profesores y también de los otros sujetos con los que interactúan. En palabras de algunos investigadores, el trabajo colaborativo, puede considerarse un "lócus de desarrollo docente y experiencias de aprendizaje" (Fiorentini, Fernandes y Carvalho, 2015, p.8) o como un entorno adecuado para el desarrollo profesional de los profesores (Jaworski et al., 2017).

Tales locus o entornos pueden tomar formas muy diversas y al interior de los grupos que colaboran es factible identificar diversos objetivos compartidos, modos de acordar las reglas de juego del grupo, diversos sujetos que participan y el encuentro de diversas prácticas profesionales, entre otros. Tal diversidad además, debe ser mirada en contextos y entornos específicos.

Apelando a avances en el tema relativo a colaboración, se busca avanzar sobre algunas de las facetas del trabajo colaborativo, poner en evidencias diversidades y rescatar aspectos comunes, como puede ser la naturaleza compleja de esos trabajos. Se apelará a ejemplos del ámbito local e internacional para ilustrar las ideas en debate y compartir breves experiencias de colaboraciones remotas como solución en tiempo de pandemia.

1 Al hablar de profesores, se incluye tanto a profesores en servicios en diferentes niveles de enseñanza o futuros profesores.

Referencias bibliográficas

Fiorentini, D., Fernandes, F. y Carvalho, D. (Orgs.) (2015). *Narrativas de Prácticas e de Aprendizagem Docente em Matemática*. San Pablo, Brazil: Pedro & João Editores.

Jaworski, B., Chapman, O., Clark-Wilson, A., Cussi, S., Esteley, C., Goos, M. Isoda, M., Joubert, M. y Robutti, O. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME 13* (pp. 261-276). Cham, Switzerland: Springer Nature.

Panel: Tecnologías digitales en educación matemática

PATRICIA MARISEL KONIC
pkonic@gmail.com
Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

Integrar un panel resulta, para estos tiempos, un desafío no menor al que la comunidad educativa en su conjunto viene "enfrentando" desde marzo de 2020. ¿Qué abordar y cómo hacerlo?, pero aún más potente resulta el interrogante ¿Cómo fundamentar esos abordajes?cualquiera sea el ámbito de actuación.

Me propongo, en este espacio, contextualizar y realizar un planteo personalsobre la temática en cuestión con la intención de proponer dos ideas centrales en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje como foco de un debate y reflexión que permita, desde una perspectiva colaborativa, colectiva y científica derivar sin dudas en "nuevos conocimientos" emergentes de una etapa del proceso educativo no esperada y menos aún planificada.

Durante este tiempo se realizaron diversas reuniones formales virtuales tales como Jornadas, Congresos, seminarios de educadores e investigadores en los que se pusieron de manifiesto diversos puntos de vista sobre la relación docente/alumno, en este nuevo contexto, y en particular sobre el uso de las tecnologías en la enseñanza.En tal sentido, hay quienes manifiestan haber desarrollado previo a la suspensión de la presencialidad, con innovación, múltiples "objetos" pedagógicos con intenso uso de tecnologías de la comunicación, multimedios y la virtualidad, en la capacitación docente y estudiantil, en la oferta de recursos educativos, entendiendo este hecho como un escenario para responder a demandas que provoca esta pandemia.Otros, sostienen que el traslado de los temas desarrollados en la presencialidad a otras posibilidades de enseñanza, más que un reto ha sido una oportunidad de creatividad y búsqueda para lograr la interacción entre estudiantes y docentes, ello se fundamentaen considerar que se recuperan otros lenguajes como sonidos, colores, animaciones, uso de software y plataformas diversas, y con ello la parte activa y creativa de la matemática. Por otra parte, hay quienes nos interpelan con interrogantes como: ¿Cuáles son las competencias de un docente para reaccionar a un cambio tan dramático como el presente? ¿Qué impacto puede tener esta situación en la falta de equidad de nuestros sistemas educativos? ¿Se puede esperar

algún cambio en los lineamientos curriculares de matemática como efecto de la necesidad de priorizar? ¿Pueden esperarse efectos de esta experiencia en relación a cómo se conciba el currículo de la formación del profesor?

Todos acordaremos que lo inmediato requiere acción, pero en general la inmediatezpodría opacar, debilitar y hasta neutralizar cuestiones esenciales que podríamos traducir en interrogantes del siguiente tipo:

¿Qué hacemos con los conocimientos adquiridos y disponibles producto de las prácticas y de la investigación que se venía desarrollando?

¿Cuáles son los problemas que inevitablemente llegaron para continuar? ,y en consecuencia

¿Qué aspectos/características/dimensiones de estudio permitirán su abordaje?

La complejidad de un proceso tanto de estudio como de enseñanza/aprendizaje involucra considerar que ocurre con las dimensiones epistémica, cognitiva, formativa, mediacional, afectiva, ecológicade dichos procesos (Godino, 2020). Surge entonces un nuevo interrogante ¿Cuáles son las dimensiones de análisis que toman mayor poder? ¿Cuáles pueden perder potencialidad en este camino?

En síntesis, más allá de la coyuntura ¿Cómo reacciona la investigación ante el inevitable y abrupto cambio de escenario, en particular cuando los “recursos” se posicionan en el foco de la acción?

Se considera necesario que desde la didáctica se indague sobrela adecuación de los recursos educativos enlínea, asegurando que la tecnología esté enconcordancia con los objetivos de aprendizaje (Turney, Robinson, Lee y Soutar, 2009).

¿Cómo planteamos o replanteamos el proceso de investigación?

ANDREA NOVEMBRE
anovembre@gmail.com
Universidad Nacional de Hurlingham

Resumen

Mi intervención en el panel se basará en el efecto de la introducción de la tecnología sobre la enseñanza y el aprendizaje. ¿Qué cambia? ¿Qué permanece igual?

Sabemos que la entrada de la calculadora a las aulas produjo cambios en los contenidos y prácticas. En este encuentro analizaré si la inclusión de programas matemáticos produce cambios en la matemática que se enseña y aprende.

GABRIELA PILAR CABRERA
gabriela.pilar.cabrera@gmail.com
Universidad Nacional de Villa María

Resumen
Este ciclo lectivo 2021 comienza a andar sus primeros pasos de un camino que sentimos y sabemos complejo e incierto, complejidad e incertidumbre que se nos está empezando a hacer costumbre, como lo vislumbró tan claramente AlvinTofler en su obra el Shock del Futuro publicada en 1970, quien ya desde ese entonces comprendió que la reflexión y el pensamiento crítico serían central para la toma de decisiones en todos los ámbitos de la sociedad. Señalo esto porque creo, como Tofler, que para andar el camino que se abre ante la comunidad educativala "reflexión" y el diálogo deben ocupar el centro de la escena educativa y con esta intención procuraré realizar un aporte a nuestra reflexión docente acerca del sentido de las tecnologías digitales para la educación matemática, más precisamente para la educación estadística.
Hablo de reflexión porque es allí donde la pedagogía encuentra su significancia y si algo puso en evidencia esta afirmación fueron las experiencias educativas de un 2020 que irrumpió en nuestras vidas, en las escuelas y universidades provocando la toma de conciencia de que "no hay recetas". Propongo desandar el camino sinuoso y vertiginoso recorrido en un 2020 a "pura" virtualidad para dar valor a una "presencialidad" que hemos de re-significar y potenciar en una nueva aula: el aula ampliada.
Específicamente, mi intención es compartir la experiencia de aula ampliada que se gestó en el año 2016 para la enseñanza de Bioestadística en la carrera de Medicina Veterinaria de la Universidad Nacional de Villa María y que fue valorada con un alto grado de idoneidad didáctica global en un punto de corte evaluativo que realizamos en 2019 y que durante el año 2020 nutrimos con el aporte del Marco de la Enseñanza para la Comprensión que nos brinda herramientas sólidas paraprofundizar y potenciar esta aula ampliada para el ciclo lectivo 2021.
Por último y a modo de contribuir a esta reflexión que en "continuo" debemos realizar respecto del sentido de las tecnologías digitales para la educación matemática y en particular para la educación estocástica, pongo a consideración las siguientes preguntas: ¿Qué tecnologías digitales resultan "necesarias" para el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad en la universidad? ¿En "qué" se modifica el proceso de aprendizaje al incluir estas tecnologías para el proceso de enseñanza? ¿Cómo juega el aprendizaje invisible en el aprendizaje estocástico? Si se plantea la inclusiónde estas tecnologías, ¿en "qué" se modifica el currículo de Estadística y Probabi-

lidad de los cursos universitarios? Y si dirigimos la mirada hacia la educación primaria y secundaria: ¿De qué manera las tecnologías digitales favorecen la educación estocástica?

Eje 1
Educación matemática en el nivel inicial y en el nivel primario

Concepciones de futuros maestros en relación con el significado de la fracción en contexto de proporcionalidad

María Laura Imvinkelried
mimvinkelried@gmail.com
Escuela Normal Superior N° 32
Graciela Chemello
Universidad de Hurlingham
Silvia Bernardis
silvia.bernardis@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación que surge con la intención de indagar cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes del Profesorado de Nivel Primario, en relación con los significados de las fracciones en dos momentos de su formación inicial.

Si bien en la investigación nos hemos planteado diversos interrogantes, en esta presentación consideramos sólo el primero ¿Cuáles son los conocimientos de los estudiantes de 1° y 4° año en relación al significado de la fracción en el contexto de la proporcionalidad?

Se ha elegido como marco teórico a la Escuela Francesa y como antecedentes algunos trabajos de Block (Balbuena y Block, 1991; Block, 2006), entre otros.

Para la recolección de datos se utilizan tres problemas, en el primero se pone en juego el significado de la fracción como reparto, en el segundo la fracción se entiende como medida y el último problema se refiere al significado de la fracción como operador multiplicativo, en el cual funciona la fracción como constante de proporcionalidad. En esta presentación, analizamos el tercer problema que involucra el significado de la fracción en contextos de proporcionalidad. A partir del análisis de las producciones arribamos a algunas conclusiones en relación con este grupo de estudiantes, que se constituirán en insumos para los profesores formadores de formadores como así también, pueden ser tenidas en cuenta para las capacitaciones que se realizan con los docentes en ejercicio y ayudar a los mismos a reflexionar sobre la temática.

Introducción

El presente trabajo se enmarca en la investigación, dirigida por la Mg. Graciela Chemello y codirigida por la Mg. Silvia Bernardis, correspondiente a la tesis de Maestría en Didácticas Específicas de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la U.N.L, de Santa Fe. Dicha investigación surge con la intención de indagar cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes del Profesorado de Nivel Primario, en relación con los significados de las fracciones en dos momentos de su formación inicial, al comenzar sus estudios y al finalizarlos. Elegimos este tema, por ser uno de los contenidos del programa de Matemática de la escuela primaria más complejos para los niños y para los maestros, con consecuencias importantes para el aprendizaje de la Matemática en los niveles escolares siguientes. Consideramos que los insumos de esta investigación, permitirán repensar las propuestas de enseñanza en el Nivel Superior y potenciar las mismas a corto y mediano plazo; como así también ser tenidos en cuenta para las capacitaciones que se realizan con los docentes en ejercicio. Por último, esta investigación puede ayudar a los docentes que se desempeñan en el nivel primario, a identificar sus propios conocimientos y dificultades en relación con la temática. A partir de aquí, estudiar más y mejorar los aspectos que así lo requieran para potenciar la enseñanza y el aprendizaje.

En esta presentación decidimos considerar sólo uno de los interrogantes de la investigación: ¿Cuáles son los conocimientos de los estudiantes de 1° y 4° año en relación al significado de la fracción?, y específicamente analizar las producciones surgidas en el contexto de la proporcionalidad.

Marco teórico y metodología

Dado que nuestro trabajo de investigación se interesa por explorar cuáles son las concepciones de los futuros docentes en relación con el concepto de fracción, nos resulta fundamental estudiar la noción de concepción en Didáctica de la Matemática como así también otros conceptos teóricos asociados, como el de significado, concepto, obstáculo, entre otros. Para lo anterior, hemos elegido como marco teórico a la Escuela Francesa y de los antecedentes, centralmente algunos trabajos de investigación de Block (2006).

En esta presentación, recuperamos una aproximación al término concepción de Vergnaud (citado en Ruiz Higueras, 1994) que la considera como un estado cognitivo global del sujeto y llega a la determinación de una concepción partiendo de la definición de un concepto matemático:

> La noción de concepción nos da cuenta del estado de los conocimientos de un alumno con relación a un concepto. Según Vergnaud, todo concepto estaría determinado por una terna (S, I, s), siendo:
> S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;
> I: el conjunto de invariantes que constituyen el concepto;
> s: el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.
> Análogamente, una concepción estaría formada por esa misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto (pp.50-51).

Además, el autor plantea que es fundamental prestar atención a los "*estados sucesivos*" en los conocimientos ligados a las concepciones que van construyendo los estudiantes a partir de los problemas que van resolviendo. Estos estados de conocimiento se manifiestan en las producciones que realizan y es posible interpretar desde allí, los errores no como una falta de conocimiento del estudiante sino como la presencia de otros conocimientos, incompletos, diferentes y poco articulados.

La idea anterior nos permite integrar al análisis, los conceptos de error y de obstáculo que también nos interesan en esta investigación. El interés está dado pues el análisis de los "*errores*" o "*generalizaciones abusivas*" como por ejemplo: las fracciones son siempre unitarias, permiten también caracterizar a la concepción. Del análisis de estos errores pueden surgir "*ideas asociadas*", las cuales presentamos a modo de ejemplo en la tabla 7.

También, recuperamos de Dávila Vega (2002, p. 49), una cita sobre la relación entre el significado y la variedad de fenómenos, lo cual fundamenta la elección de distintos problemas a resolver en el trabajo de campo:

> [...] cada individuo forma sus conocimientos matemáticos conforme comprende su significado en cada uno de los fenómenos en los que ése conocimiento está involucrado y afirma que para llegar a explicitar un concepto y manejarlo a un nivel algorítmico, se deben construir esos significados personales.
> Por lo tanto, constituir un objeto mental significa para Freudenthal lograr que el campo semántico personal sobre un concepto determinado sea lo suficientemente amplio que permita interpretar adecuadamente todos los fenómenos que implican el uso de un mismo concepto.

Para el trabajo de campo utilizamos una serie de situaciones-problemas[1] extraídos de diferente bibliografía disponible, que involucran los diversos significados de las fracciones. Del análisis de las producciones de los estudiantes, sólo vamos a considerar en esta presentación las correspondientes al tercer problema que involucra el significado de la fracción en contexto de proporcionalidad. Además, nuestra intención es presentar los procedimientos de los estudiantes y cómo fueron categorizados según: las representaciones que utilizan, las nociones que intervienen en los procedimientos utilizados y los tipos de argumentos que expresaron en sus justificaciones.

Cabe aclarar que, al trabajo de campo lo realizamos con un grupo de 21 estudiantes de 1° año del Profesorado de Nivel Primario como así también con 11 estudiantes de 4° año, con el objetivo de indagar las concepciones de los mismos en dos momentos de la formación inicial. La clase de muestra es no probabilística de tipo accidental pues la investigación es exploratoria y pretende documentar las concepciones de los estudiantes de un profesorado particular sin pretender generalizar ningún resultado sino comprender lo singular del contexto estudiado.

Análisis de resultados

A continuación se detallan las consignas del problema:

Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 4 litros de pintura verde. Por otro lado, se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 5 litros de pintura verde.

a) ¿Cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?

b) Si a una mezcla de 2 litros de pintura verde y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro o más oscuro que el original? Justificar.

c) Juan dice que es posible calcular la cantidad de pintura blanca en el ítem a) multiplicando la cantidad de pintura verde por un número. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

Presentamos los cuadros que sintetizan las formas de representación, las nociones y los argumentos utilizados en las consignas del problema 3, resuelto por 21 estudiantes de 1° año. Cabe aclarar que el uso de guiones en las tablas está dado

1 Freudenthal (1983) afirma que cada individuo forma sus conocimientos matemáticos conforme comprende su significado en cada uno de los fenómenos en los que ese conocimiento está involucrado.

para representar que no corresponde considerar tal aspecto en ese determinado ítem.

Formas de representación	Frecuencias ítem a)	Frecuencias ítem b)
Usa sólo lenguaje coloquial de manera correcta Usa sólo lenguaje coloquial de manera incorrecta	0 8/21	2/21 12/21
Usa una expresión decimal correcta	11/21	1/21
Usa una expresión fraccionaria y la recta numérica de correctamente	-	2/21
No resuelve	2/21	4/21

Tabla 1. Formas de representación en 1° año

Al analizar la tabla 1, notamos que para el ítem a) aproximadamente la mitad de los estudiantes (11/21), responde correctamente utilizando una expresión decimal y una gran parte de estudiantes se expresa a través del lenguaje coloquial pero de manera incorrecta (8/21), que si los sumamos a los "*No resuelve*" llegan aproximadamente a la mitad restante. En el ítem b) la mayor frecuencia de respuestas corresponde a incorrectas (12/21) utilizando el lenguaje coloquial, y si se suma la frecuencia de estudiantes que no resuelven la consigna, se obtiene una alta frecuencia (16/21).

Nociones/Técnicas	Frecuencias en ítem a)	Frecuencias en ítem b)	Frecuencias en ítem c)
Proporción/Propiedad fundamental	-	-	-
Propiedades de la proporcionalidad	3/21	-	-
Regla de tres	8/21	-	-
Pasaje por la unidad	3/21	-	-
Constante de proporcionalidad	-	1/21	3/21

Tabla 2. Nociones/Técnicas en 1° año

Al analizar la tabla 2, es notorio el uso de la regla de tres para obtener el resultado de la primera pregunta, 8/21 de los estudiantes la utilizan de manera correcta. Con menor frecuencia (3/21), utilizan como método para encontrar el valor 12,5 litros, el pasaje por la unidad.

Por otra parte, la noción de constante de proporcionalidad es utilizada por pocos estudiantes en los ítems b) y c), 1/21 y 3/21 respectivamente, como así también las propiedades de la proporcionalidad en el ítem a) con 3/21. Cabe aclarar aquí, que no hay una mención explícita de las propiedades en las respuestas de los estudiantes sino un uso implícito.

Sobre los argumentos	**Frecuencias en el ítem b)**	**Frecuencias en el ítem c)**
Usa una prueba pragmática	0	1/21
Usa una prueba intermedia	1/21	2/21
Usa una prueba intelectual	0	0
No argumentos/confuso/erróneos	20/21	18/21

Tabla 3. Tipos de argumentos en 1° año

Cuando leemos la tabla 3, es llamativa la frecuencia de producciones de estudiantes que no argumentan o presentan argumentos confusos/erróneos en ambos ítems. Para el ítem b), excepto un estudiante, los demás no argumentan y para c), excepto tres estudiantes, los demás tampoco argumentan lo cual amerita un análisis a posteriori de los errores o ideas asociadas.

También, para el ítem b), explicitamos el argumento que presenta la única producción del estudiante por la cual la encuadramos dentro de la prueba intermedia: *"se obtiene un color más oscuro que el de 2 l V y 7 l B porque tiene más cantidad de porcentaje de pintura verde por litro de pintura blanca"*. En este caso, hay un acercamiento a comparar las dos mezclas utilizando la noción de razón.

Para el ítem c) encontramos, por un lado, una prueba pragmática: *"Es posible multiplicar los 5 l de pintura verde por 2,5 para llegar al resultado 12,5 l"*. En este caso sólo explica el cálculo que realizó. Por otro lado, identificamos dos estudiantes con pruebas intermedias: *"el 2,5 equivale a la cantidad de pintura blanca que se debe colocar por cada litro de pintura de color"*. En estos casos usan la idea de valor unitario, ligada a la constante de proporcionalidad.

Presentamos los resultados del análisis de las producciones de 11 estudiantes de 4°:

Formas de representación	Frecuencias en ítem a)	Frecuencias en ítem b)
Usa sólo lenguaje coloquial correctamente	0	4/11
Usa sólo lenguaje coloquial incorrectamente	0	3/11
Usa expresión decimal y/o fraccionaria correctamente	10/11	4/11
Usa una expresión algebraica incorrecta	1/11	0
No resuelve	0	0

Tabla 4. Formas de representación en 4° año

Al observar la tabla 4, notamos que para el ítem a) la mayoría de los estudiantes (10/11), responde correctamente utilizando una expresión decimal y/o fraccionaria y sólo 1/11 usó una representación incorrecta. Por el contrario, en el ítem b) las frecuencias de representaciones se distribuyen más equitativamente entre el lenguaje coloquial correcto e incorrecto y la expresión decimal-fraccionaria correcta. Queremos destacar aquí, que en el ítem a) prácticamente la totalidad de los estudiantes cambian de registro. En cambio, en el ítem b) más de la mitad de los estudiantes se mantiene en el mismo registro, observándose algunos registros correctos y otros incorrectos.

Nociones/Técnicas	Frecuencias en ítem a)	Frecuencias en ítem b)	Frecuencias en ítem c)
Usa Regla de tres	7/11	-	-
Pasaje por la unidad	1/11	4/11	-
Constante de proporcionalidad	-	-	6/11
Proporción/ propiedad fundamental	1/11	-	-
Comparación de razones	-	4/11	-

Tabla 5. Nociones/Técnicas en 4° año

La tabla 5 muestra para el ítem a), una frecuencia alta (7/11) en el uso de la regla de tres simple, y frecuencias bajas e iguales para las demás nociones/métodos. Para el ítem b), encontramos frecuencias idénticas (4/11) al usar el método de pasaje por la unidad y la comparación de razones. Por último, en el ítem c), la mitad de los estudiantes aproximadamente (6/11) utiliza la noción de constante de proporcionalidad para contestar a la consigna.

Sobre los argumentos	Frecuencias en el ítem b)	Frecuencias en el ítem c)
Usa una prueba pragmática	1/11	2/11
Usa una prueba intermedia	6/11	3/11
Usa una prueba intelectual	1/11	1/11
No contesta/confuso/erróneos	3/11	5/11

Tabla 6. Tipos de argumentos en 4° año

Al leer la tabla 6, notamos que aproximadamente la mitad (6/11) de los estudiantes lograron argumentar con una prueba intermedia sobre la tonalidad de la pintura solicitada en b). A continuación, presentamos un ejemplo de *prueba intermedia* para el ítem b), que fue la más utilizada. Ejemplo: *"para 1 litro de pintura verde se necesitan 3,5 l de pintura blanca, para 2 l de verde ocupo 7 litros de pintura blanca entonces para 3 litros se necesitan 10,5 litros de pintura blanca. Entonces si se mezclan 3 l de verde con 8 l de blanca quedará un color más oscuro".* Aquí notamos cómo los cuatro estudiantes arman nuevas razones utilizando propiedades de la proporcionalidad de manera implícita que le sirven para argumentar su respuesta. En este argumento, notamos claramente cómo el estudiante utiliza un procedimiento ya investigado por Schliemann, Carraher y Brizuela (2011) con vendedores ambulantes. Éstos, calculan el precio de una cierta cantidad de artículos que venden, comienzan a partir del precio del artículo y por lo general realizan sumas sucesivas de ese precio, tantas veces como el número de artículos a ser vendido. Vergnaud llamó a esta estrategia enfoque escalar, Block (2006) también analiza estos tipos de procedimientos y utiliza el término de razón interna utilizado por Freudenthal (1983). Por otro lado, nos resulta pertinente relacionar este tipo de procedimientos con lo que Vergnaud (1990) llama "*teorema en acto*", pues este procedimiento es apreciado de manera intuitiva y no expresado de manera formal o general por los estudiantes.

También queremos ejemplificar las respuestas al ítem a):

–Prueba pragmática: "No estoy de acuerdo porque si realizó otro procedimiento, es decir regla de tres, donde puedo multiplicar 5 l pintura verde por 10 l pintura blanca = 50 l, dividido 4 l de pintura verde me da 12, 5 litros de pintura blanca. Pero sí o sí debo primero multiplicar y luego dividir, sino no obtengo esa cantidad de pintura blanca".

–Prueba intermedia: *“Para calcular la cantidad de pintura blanca se multiplica la cantidad de pintura verde por 2,5 litros; es decir a cada litro de pintura verde le corresponde 2,5 l de pintura blanca”.* En este caso reconoce la relación que se da entre las dos magnitudes.

–Prueba intelectual: Una alumna además de expresar en lenguaje coloquial las relaciones que se dan entre las dos cantidades, utiliza la fórmula y aclara el significado de cada letra de la fórmula. Expresa que la k es la constante de proporcionalidad la cual permite averiguar cuántos litros de pintura blanca se utiliza por cada litro de pintura verde y realiza el cálculo de la misma.

Podríamos plantear aquí que en los dos últimos ejemplos, los estudiantes utilizan en sus argumentos un enfoque funcional, pues establecen relaciones entre las dos variables. En el argumento que llamamos intermedio, esta relación aparece pero no se explicita formalmente, por el contrario en la prueba intelectual notamos una expresión general para la relación entre las variables.

Por último, presentamos el tercer cuadro que sintetiza las *Ideas asociadas* a los procedimientos del problema 3:

Ideas asociadas/ grupo de estudiantes	**Frecuencias de 1° año**			**Frecuencias de 4° año**		
	a)	b)	c)	a)	b)	c)
Predominio del campo aditivo	5/21	5/21	-	1/11	-	1/11
Lo algorítmico prevalece por sobre lo intuitivo y el concepto	-	-	3/21	-	-	2/11
La constante de proporción no puede ser una fracción	-	-	4/21	-	-	-
No se reconoce la constante de proporción	-	-	-	-	-	2/11

Tabla 7. Ideas asociadas

En primer lugar, encontramos el “*predominio del campo aditivo*” en los procedimientos estudiados. Los estudiantes de 1° año respondieron a la consigna a) por ejemplo: utilizando modelos aditivos, y pensaron que dada la transformación de 4 litros a 5 litros de un color de pintura era correcto agregar 1 litro más a la otra cantidad del otro color. En menor medida, observamos este argumento también en 4° año.

En cuanto a la idea relacionada con *“Lo algorítmico prevalece por sobre el concepto”* observamos una presencia en 1° año y en 4° año, del uso de la regla de tres o la justificación desde la regla de tres, sin la posibilidad de relacionar esta regla con la definición de proporcionalidad o alguna de sus propiedades. Podríamos asociar esta idea al concepto de obstáculo didáctico[2] vinculado a los métodos de resolución que han sido objeto de enseñanza a lo largo de la historia para resolver problemas de proporcionalidad. Estos métodos, y especialmente la regla de tres, se ha priorizado o tomado como único objeto de enseñanza en algunas prácticas escolares por sobre la enseñanza de conceptos, en este caso, por sobre las propiedades que caracterizan a la proporcionalidad directa. De esta manera, creemos que los estudiantes se han formado una idea sobre algunas técnicas, en este caso la regla de tres, que también las advierte Escolano y Gairín (2005):

> Los conceptos son técnicas asociadas a los mismos. Para los alumnos las ideas sobre relaciones y operaciones se limitan al uso de sus técnicas asociadas [...]. Los contenidos útiles son los procedimentales. Los alumnos memorizan las técnicas de cálculo sin preocuparse de sus fundamentos teóricos (p.24).

También encontramos algunos aportes que le otorgan fuerza a nuestra postura:

> Existe una confusión en torno al concepto de proporcionalidad que hace que se lo identifique con la regla de tres simple. Sin embargo, esta regla es un método que permite resolver problemas de proporcionalidad, no es la proporcionalidad en sí. No estamos postulando su desaparición de nuestras aulas; su utilidad está fuera de discusión. Queremos decir, una vez más, que el trabajo que proponemos se desplaza de los métodos para enfocarse en los conceptos (estudio de definiciones, propiedades, tipos de representación, tipos de problema que resuelve y límites). Se propone que la regla de tres simple, un método útil sólo en casos de proporcionalidad, sea estudiada, analizada y articulada con las propiedades y definiciones que caracterizan a este concepto, y no como contenido aislado. Desde nuestra perspectiva, conocer la regla de tres simple implica:
> • saber cuándo se puede y cuándo no se puede usar;
> • saber cómo usarla;
> • saber qué significa cada operación que se hace al usarla;
> • saber si los valores que se obtienen al aplicarla tienen o no sentido en el contexto del problema (Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 1999, pp.27-28).

Un último análisis sobre el uso de la regla de tres y las dificultades que observamos en su uso podría establecer que los errores encontrados están dados por ausencia de significado y dentro de esta categoría por errores de procedimiento (So-

---

2 Obstáculo didáctico producto de las decisiones didácticas que tomamos al momento de pensar la enseñanza.

cas, 1997), es decir errores que se producen cuando los estudiantes usan de manera inapropiada fórmulas, definiciones o reglas.

Para el análisis de la idea *"La constante de proporción no puede ser una fracción"* que se detectó en 4/21 de las producciones de 1° año, incluida esta frecuencia en 18/21 de argumentos confusos o de la falta de argumentos, recuperamos algunos aportes en relación con esta situación, que ya lo han trabajado distintos autores como Balbuena y Block (1991), entre otros:

> Lo que se expresó aquí, en nuestra opinión, es la ausencia de significado de la multiplicación por una fracción, ausencia parcial en algunos alumnos y total en otros. Parece que la multiplicación, como operación, sigue estrechamente vinculada a la idea de número entero de veces más grande, y detrás de este sentido, al de suma iterada. Es el sentido que la multiplicación tiene en los números naturales, por lo tanto, 7 no es cierto número de veces más grande que 4, sí en cambio 8, que es 2 veces más grande que 4, o incluso 2, que es 2 veces más chico que 4 (Balbuena y Block, 1991, p.5).

De esta manera, los conocimientos sobre los números naturales y el significado de la multiplicación adquirido en etapas anteriores, parecerían operar como un obstáculo para profundizar y avanzar en el trabajo de la proporcionalidad y para considerar una constante de proporcionalidad fraccionaria.

> Freudenthal (1983), acertadamente nos hace notar esta dificultad en las formas mismas con las que nos expresamos: decimos, por ejemplo, 3 veces, 4 veces, 8 veces, pero no decimos veces, veces. Las fracciones, en su papel de operador multiplicativo, casi siempre están seguidas del término de: "de pastel, de la longitud, de la población", y casi siempre con una connotación "extractiva" (Balbuena y Block, 1991, p.8).

Si bien reconocen en este problema de proporcionalidad la presencia de una constante, la expresan con una expresión decimal y no con una expresión fraccionaria, es decir encontramos en las producciones el número 2,5 y no el operador que asocia a cada cantidad de litros de pintura verde una cantidad de litros de pintura blanca. Y como bien lo expresan Balbuena y Block (1991) "El que los alumnos llegaran a utilizar este operador decimal sería ya un paso importante, pero hay que tener cautela: las destrezas adquiridas en la operatoria con decimales suelen ser tan grandes como la incomprensión de su significado" (p.10).

A partir de aquí, nos preguntamos si esta situación no se relaciona con una mirada estática de la proporcionalidad, o como también lo encontramos en los antecedentes de la investigación, como el manejo de razones internas y de un operador escalar —o enfoque escalar en palabras de Vergnaud— por sobre una mirada dinámica relacionada al manejo de razones externas y específicamente con la definición de función lineal.

De todas maneras, sabemos que este enfoque funcional es complejo, y que requiere de un trabajo sostenido a lo largo de la escolaridad. Al respecto, Vergnaud (1997) se expresa:

> Este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte, la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función. Si la noción de correspondencia no presenta ninguna dificultad, ni su representación en forma de tabla, el análisis de esta correspondencia en términos de función es por su parte mucho más delicado, pues ésta implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones (p.13).

Por último, la frecuencia en las producciones de estudiantes que no reconocieron la constante de proporción en 4° año es baja (2/11), los demás lo lograron. Lo que sí resulta notorio, es la frecuencia (18/21) para las producciones de 1° año que no respondieron a esta pregunta.

Algunas conclusiones

Cabe aclarar que, si bien las conclusiones no son generalizables, aportan a la comprensión de los avances de los estudiantes en sus concepciones sobre las fracciones en relación con la variedad de significados que pueden asumir y su relación con otras nociones del campo multiplicativo; el dominio de sus diversas representaciones y relaciones; las formas de argumentación y la generalización de propiedades y relaciones.

Como una primera aproximación a los resultados obtenidos, nos resulta interesante encuadrar los hallazgos de la investigación identificando tres concepciones sobre la noción de fracción -en esta comunicación sólo se desarrolló en el contexto de proporcionalidad- y, a la vez, tres grupos de estudiantes en los que esas concepciones predominan. Por un lado, un grupo de estudiantes que permiten reconocer en sus producciones una concepción ligada a una aritmética centrada en la realización de cálculos y el uso de reglas sin justificación; otro grupo con una concepción intermedia y por último, un tercer grupo con una concepción más cercana a una mirada algebraica, con búsqueda de relaciones y presencia de algunas primeras generalizaciones.

Otra cuestión que queremos recuperar es la íntima relación entre concepción, errores y obstáculos, pues en la caracterización de los grupos nos encontramos con algunas frecuencias referidas a los errores. En palabras de Brousseau (1983), algunas de las concepciones que se van adquiriendo sobre una noción matemática u objeto matemático a lo largo de nuestra experiencia no desaparecen inmediatamente en función de darle lugar a una concepción más completa y avanzada, sino que se resisten, provocan errores y se constituyen así en verdaderos obstáculos.

Presentamos a continuación, la caracterización para un grupo de estudiantes -la mayoría de 1°año- que permiten reconocer en sus producciones una concepción ligada a una aritmética centrada en la realización de cálculos y el uso de reglas sin justificación. Aproximadamente la mitad de los estudiantes de 1° año calcula correctamente la cantidad de pintura que se necesita de cierto color cuando se le presentan tres datos iniciales pero, de este grupo, la mayoría utiliza la regla de tres exclusivamente. También, más de la tercera parte de los estudiantes no resuelve correctamente la pregunta que hace referencia sobre la tonalidad de la pintura al agregar 1 litro de ambos colores a las mezclas y sólo un grupo reducido argumenta correctamente cuando se lo solicita la consigna, utilizando argumentos pragmáticos o intermedios.

Por otro lado, en el conjunto de los estudiantes de 4° año, hemos caracterizado dos concepciones diferentes pero con predominancia de una sobre otra. La concepción que predomina está lograda por más de la mitad de los estudiantes de 4° año y notamos que superan la concepción aritmética inicial, pues incorporan otros registros de representación y algunos argumentos no pragmáticos. Además, los estudiantes realizan un cambio de registro al resolver los problemas pero este cambio de registro lo solicita la consigna y no es propuesto espontáneamente por los estudiantes; sus argumentos están ligados a pruebas intermedias, pero no llegan a expresar una prueba intelectual, asociada a la generalización y a la formulación de propiedades en juego y de sus relaciones; y utilizan algunas de las nociones implicadas en los procedimientos para argumentar los mismos, pero no en todos los casos.

Por último, describiremos la otra concepción de salida, la cual está presente en los trabajos de muy pocos estudiantes de 4° año. Arribar a una concepción de este tipo, es parte del desafío que nos plantean los diseños curriculares actuales de Matemática de nuestro país. Es decir, existe una mirada actual sobre la necesidad de trabajar con relaciones, generalizaciones y establecer las mismas en distintas propuestas matemáticas que se llevan al aula. Por ejemplo, para el caso de la fracción en contextos de proporcionalidad, lograr una mirada funcional/dinámica superando una mirada estática o escalar, es el desafío en el caso de la fracción en el contexto de proporcionalidad.

Referencias bibliográficas

Balbuena, H. y Block, D. (1991). ¿Qué significa multiplicar por 7/4? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros. *Cero en conducta*, *6*(25), 21-32. Recuperado de https://www.die.cinvestav.mx/Personal-Academico/Dr-David-Block-Sevilla

Block, D. (2006), Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. En Martínez Sierra, G (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19 (675-680). Montevideo, Uruguay: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dávila Vega, M. (2002). Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado del conocimiento. (Tesis de maestría). Centro de Investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Escolano, R. y Gairín, J.M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 17-35.

Freudenthal, H. (2001) *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados* (Trad. L. Puig). México: CINVESTAV. (Trabajo original publicado en 1983).

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (1999). *La proporcionalidad. Programa Maestros y profesores enseñando y aprendiendo.* Dirección General de Cultura y Educación. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de: http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/proporcionalidad.pdf

Ruiz Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2011). *De cantidades a proporciones, funciones y notación algebraica*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (oord..), *La educación matemática en la Escuela Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Vergnaud, G. (1990). *Teoría de los Campos Conceptuales*. Traducción al español por Juan Godino. Recuperado de: https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/phocadownloadpap/CONSTRUC-EPISTEM-CUALITA/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México, México: Trillas. Recuperado de: http://www.ccgsm.gob.ar/areas/educacion/cepa/vergnaud.pdf

Significados y sentidos en el estudio de relaciones entre variables en séptimo grado de la educación primaria

FABIANA KIENER
fkiener@gmail.com
SARA SCAGLIA
sbscaglia@gmail.com
LILIANA NITTI
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

La preocupación por otorgar sentido al trabajo matemático desplegado en el aula es compartida por diferentes educadores de esta disciplina. En esta comunicación nos enfocamos en dos aspectos que resultan de interés para analizar esta problemática, el papel de las interacciones en el aula y el significado de la acción de los estudiantes, para analizar la discusión suscitada en una clase de 7º grado de educación primaria en torno a la resolución de una tarea que promueve el establecimiento de relaciones entre variables.

El análisis de los intercambios permite observar en reiteradas ocasiones que los niños se apropian de ideas de sus compañeros para conformar su propio discurso. Asimismo, se ponen en evidencia, mediante los intercambios que se producen en el aula, intervenciones de estudiantes con diferente nivel de apropiación del contexto y el establecimiento de relaciones con experiencias personales que exceden el ámbito escolar.

Introducción

La preocupación por otorgar sentido al trabajo matemático desplegado en el aula es compartida por diferentes educadores de esta disciplina. No obstante, el modo de abordarla varía según la perspectiva teórica que se adopte. En nuestro caso en particular, hemos seleccionado dos de las perspectivas descriptas en Scaglia (2016) para analizar la tarea que presentamos en esta comunicación, centradas en torno al papel de las interacciones en el aula y al significado de la acción de los estudiantes, respectivamente.

Considerando estas perspectivas teóricas, en esta comunicación analizaremos una tarea que promueve el establecimiento de relaciones entre variables en séptimo grado de la educación primaria. La tarea se enmarca en una investigación más amplia, cuyo objetivo general es: *Explorar el trabajo algebraico en torno al establecimiento de relaciones entre variables en séptimo grado de la educación primaria* (Kiener, 2019). En dicho estudio diseñamos una propuesta de enseñanza considerando como marco de referencia, en relación con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, la vía de entrada funcional propuesta por Sessa (2005), los aportes de la perspectiva del Álgebra Temprana (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011) y las razones de ser de las nociones involucradas (Chevallard, 2013).

Aportes teóricos

En relación con el papel de las interacciones, Sadovsky (2005) considera que el ámbito de decisiones íntimas de cada sujeto se va conformando a través de las interacciones que tienen lugar en el aula en torno al trabajo matemático, de las intenciones del docente y de las actividades que se priorizan. Los intercambios que se producen en torno a una tarea podrían cambiar la posición de un estudiante y ayudarlo a instalarse en un proyecto más general.

Al centrar nuestra mirada en los intercambios que se producen en el aula, recuperamos la noción de área de desarrollo potencial como característica fundamental del aprendizaje: "[…] el rasgo esencial del aprendizaje es que engendra el área de desarrollo potencial, o sea, que hace nacer, estimula y activa en el niño un grupo de procesos internos de desarrollo dentro del marco de las interrelaciones con otros, que a continuación son absorbidos por el curso de interno de desarrollo y se convierten en adquisiciones internas del niño" (Vygotski, 1984, p.115).

Y en este marco surge el papel relevante de las interacciones sociales en el aprendizaje y la identificación del pensamiento y el lenguaje como estructuras diferentes pero interrelacionadas:

> La estructura del lenguaje no es el simple reflejo especular de la estructura del pensamiento. Por eso el pensamiento no puede usar el lenguaje como un traje a medida. El lenguaje no expresa el pensamiento puro. El pensamiento se reestructura y se modifica al transformarse en lenguaje. El pensamiento no se expresa en la palabra, sino que se realiza en ella. (Vygotski, 1993, p.298)

El aporte de este autor refuerza la importancia de estudiar los intercambios, no sólo como una manera de aproximarnos al modo de razonar de los niños sobre los problemas propuestos, sino que el hecho de propiciar su participación en clase y la expresión de sus ideas mediante el uso del lenguaje genera modificaciones en su propio pensamiento.

Asimismo, consideramos significativo atender al rol que juegan las diferencias durante las interacciones, es decir, los desacuerdos, las interpretaciones erróneas, las dudas que surgen en clase durante los intercambios. Recurrimos para ello a la idea de *alteridad* de Bajtín (2011). Esta noción hace referencia al rol que adquieren los enunciados individuales ajenos en la experiencia discursiva de una persona. En efecto, este autor define a esta experiencia como un: "...proceso de asimilación (más o menos creativa) de palabras ajenas (y no de palabras de la lengua). Nuestro discurso, o sea todos nuestros enunciados [...] están llenos de palabras ajenas de diferente grado de "alteridad" o de asimilación, de diferente grado de concientización y de manifestación. (Bajtín, 2011, pp.51-52)

Desde el punto de vista de Bajtín (2011), "nuestro pensamiento (filosófico, científico, artístico) surge y se forma en el proceso de interacción y controversia con ideas ajenas, lo que sin duda se refleja en la forma de la expresión verbal de las propias" (p. 56). Los aportes que realiza este autor sobre la forma en la que se nutre un enunciado propio de los discursos ajenos y el modo en que se forma nuestro pensamiento fundamenta la importancia de estudiar las interacciones en el aula para la construcción del sentido.

La segunda perspectiva que adoptamos tiene que ver con el significado en educación matemática y se basa en los aportes de la Educación Matemática Crítica (EMC). Su principal referente, Skovsmose (2005), nos invita a reflexionar –en nuestro papel de educadores- sobre la mirada centrada en el significado de los conceptos matemáticos. Denomina a este paradigma "conceptismo" y señala que deja fuera cuestiones esenciales al proceso educativo como el contexto socio, político y cultural de los estudiantes. En este punto de vista, se interpreta el aprendizaje como un tipo de acción.

El estudiante que actúa debe estar en una situación en la que puede realizar una elección y tiene alguna idea sobre las metas que persigue y las razones por las que lo hace. Estas acciones no se realizan en forma mecánica sino que se basan en intenciones. “Las intenciones representan [...] el significado (personal) de la acción” (Skovsmose, 2005, p.89). A su vez, estas intenciones se fundan en los antecedentes y el porvenir de la persona, que define como:

> la red socialmente construida de relaciones pertenecientes a la historia del grupo social al cual la persona pertenece. [...] Pero igualmente importante es el porvenir de la persona. Por éste, me refiero a aquellas oportunidades que la situación social pone a disposición del grupo social al cual la persona pertenece. (Skovsmose, 2005, p.89)

A partir de las nociones anteriores, este autor define el significado de la acción de una persona y lo describe como un modelo que incluye sus antecedentes y su porvenir, sus intenciones, sus acciones, los efectos de las mismas, las reflexiones sobre dichos efectos y el reajuste considerando esas reflexiones.

En cuanto a las características de las tareas matemáticas, este autor establece una relación entre las formas de organizar la actividad de los estudiantes y el tipo de referencia que se utiliza, dando lugar a seis *ambientes de aprendizaje* (Skovsmose, 2000).

En particular, destaca el trabajo por medio de proyectos que promuevan una indagación (que denomina *escenarios de investigación*) relacionados con temáticas que tengan en cuenta las características del grupo de estudiantes. En nuestro estudio, diseñamos una propuesta de enseñanza que recorre diferentes ambientes de aprendizaje, utilizando principalmente referencias a una semirrealidad o a situaciones de la vida real.

Las consideraciones anteriores nos resultan de utilidad para analizar los intercambios entre los estudiantes durante la resolución de la tarea.

Metodología

Clasificamos nuestro estudio como *investigación cualitativa interactiva* (McMillan y Schumacher, 2005), porque observamos a los estudiantes y a la docente en el aula durante la implementación de la propuesta de enseñanza. Decimos también que se clasifica como *estudio de caso* porque se trata de un "sistema definido" (séptimo grado seleccionado) que se observa a lo largo de un período de tiempo (nueve clases en total de una hora de reloj cada una aproximadamente).

El diseño definitivo de la propuesta de enseñanza se realiza mediante intercambios del *equipo mixto* conformado por docentes e investigadores (las dos docentes de los séptimos grados, la directora y la autora de la tesis). En esta etapa de la investigación desarrollamos un trabajo de tipo *colaborativo* en el sentido planteado por Boavida y da Ponte (2011), reconocido como estrategia importante al momento de desarrollar investigaciones relacionadas con la práctica.

El estudio de las interacciones en torno a las tareas diseñadas se basa fundamentalmente en las transcripciones de las grabaciones registradas por los observadores externos (investigadoras).

El hilo conductor de las tareas diseñadas es el estudio de *relaciones entre variables* y se promueve la articulación de diferentes *registros de representación* (Duval, 2008).

En esta comunicación en particular, centraremos el análisis en una tarea del primer bloque de la propuesta de enseñanza, en el que se trabaja la interpretación de gráficos desde diversos contextos, en algunos casos con referencias a la *realidad* y en otros a una *semirrealidad* (Skovsmose, 2000).

Estudio de la tarea Gráficos de percentiles estatura-edad de 5 a 19 años

La tarea seleccionada tiene por objetivo promover interpretaciones sobre la relación entre dos variables (edad y estatura de los niños) a partir de su representación gráfica e identificar un uso social de estas gráficas. Aunque no esperamos que los niños logren una interpretación formal del gráfico y de las nociones estadísticas involucradas, creemos que el hecho de que el significado de cada variable les resulte conocido facilita que identifiquen un uso social de gráficos que relacionan dos variables. El tipo de referencia elegido para esta tarea favorece la vinculación de la matemática como generadora de modelos para interpretar situaciones reales.

La tarea comienza del siguiente modo: la docente entrega a cada estudiante un gráfico de percentiles que relaciona la estatura con la edad de 5 a 19 años (diferenciando los gráficos de niñas y niños al momento de repartirlas), sin ofrecer ninguna explicación. Los mismos gráficos ampliados se colocan en el pizarrón (ver Figura 1).

Figura 1. Gráficos estatura-edad para niñas y niños de 0 a 19 años

Los primeros intercambios que tienen lugar se refieren al *significado de las variables* que aparecen en el gráfico. Los niños intentan determinar qué variable se representa en cada eje cartesiano.

1. D: Bueno podemos compartir lo que cada uno pudo observar. El que quiera participar que levante la mano *(organiza a los estudiantes*) Ehh, a ver Gerónimo. Gerónimo empieza y sigue el que quiera contando lo que observó.
2. Gerónimo: **esta tabla la tenía el médico cuando fuimos a revisarnos**. Tenía la del peso y la de la estatura.
3. A: Es verdad.
4. Gerónimo: Te marcaba si estabas gordo…
5. A: ¡Cierto!
6. *Hablan varios juntos.*
7. Gerónimo: o si estabas flaco o si estabas… era para controlar si estabas creciendo bien o estabas creciendo mal…

[…]

14. D: Lu está levantando la mano por eso le doy la palabra a ella.
15. Luciana: **Creo que es un gráfico que depende de tu edad y del peso que deberías tener o algo así.**
16. Docente: Ese creo, a ver, ¿en qué se fundamenta?
17. Luciana: Porque no sé qué son esos números y porque hay cuatro líneas.
18. A: Porque son los meses y los años.
19. Docente: A ver ¿quién toma lo que dice Luciana?, a ver Andrea
20. Andrea: **Yo… a mí, hace mucho cuando era más chiquitita, bueno, no tan chiquitita, me hicieron uno así que era para ver cuánto medía y cuánto pesaba, y… ¡era distinto**!
21. Docente: Era distinto, acá ¿se ve el peso?
22. Alumnos: No.
23. D: ¿Qué se ve?
24. A: La altura y los meses.
25. D: La altura y ¿qué?
26. A: Y el tiempo.

Transcripción 9. Frases 1-26 de la Tarea A3

La discusión en torno a la interpretación de los gráficos pone de manifiesto cómo la contextualización en una situación conocida por los alumnos *contribuye* a la interpretación del modelo matemático que la describe (Sadovsky, 2005). En las frases 2, 15 y 20 de la transcripción anterior observamos que los niños evocan experiencias relacionadas con controles médicos para interpretar el gráfico. De igual modo ocurre en la siguiente frase:

65. A: Ajá, ¡es percentilos!, porque **cuando yo fui al examen,** viste que hay que ir cada año al doctor **y te dicen que percentilo tenés**, a mí creo que me dijeron 50, que era o sea el más normal, que el peso concuerda con mi altura.

Transcripción 10. Frase 65 de la Tarea A3

Los niños tratan de dar sentido a los números que leen en el gráfico e intercambian opiniones acerca de sus interpretaciones. Una niña pregunta sobre *el significado* de los números que aparecen en los gráficos y un compañero le indica que corresponden a los años y meses (frases 17 y 18, Transcripción 9).

Otro intercambio refiere a la interpretación de la variable representada en el eje vertical. Dado que en varios momentos se alude al peso (frases 2, 15 y 20, Transcripción 9), los niños discuten acerca de si es posible que esa variable sea el peso, porque además uno de ellos observa que aparece la letra P en el gráfico (frase 40, Transcripción 11). Veamos a continuación cómo se resuelve esta discusión:

40. A: Pero esto es el peso no es la altura porque dice **P**.
41. D: A ver, ¿es de peso o altura?
42. Estanislao: De peso.
43. A: **¿Qué? ¿Vos pesás 210 kilos Estanislao?**
44. *Varios niños se ríen.*
45. A: Y pero acá dice… coso… acá dice P.
46. A: Y pero dice entre paréntesis **centímetros**, y **empezamos desde 100 kilos sino**.
47. D: Yo los escucho, mientras pego estoy escuchándolos y me parece re interesante lo que están diciendo, yo no sé si allá están escuchándolos *(mientras coloca los gráficos en el pizarrón).*

Transcripción 11. Frase 40-47 de la Tarea A3

En la transcripción anterior, los niños analizan si resulta *razonable* interpretar que los valores del eje vertical corresponden al peso de niños de 5 a 19 años (frase 43 y 46). A partir de su conocimiento sobre el peso aproximado de los sujetos de su edad y de reconocer la unidad de medida de longitud (cm) expresada junto al eje vertical, concluyen que se trata de la altura.

Lo que está en juego en los intercambios anteriores es que *los valores posibles de una variable*, en un contexto determinado, *deben tener relación* con lo que la variable representa. Si bien no logramos identificar de dónde obtiene el valor 210 el niño de la frase 43, la intención de su mensaje es mostrarle a su compañero la *imposibilidad* de tal valor para la variable peso de un niño de 11/12 años. De manera análoga, el niño de la frase 46 hace referencia al valor 100 (valor inicial en el eje vertical) con la expresión "**empezamos desde 100 kilos sino**".

Utilizando la terminología de Balacheff (2000), el último niño mencionado utiliza una *explicación,* arraigada en sus conocimientos, para establecer y validar su idea de que el eje vertical representa la estatura. Recurre a dos razones: la unidad expresada (cm) en dicho eje y la imposibilidad de iniciar los valores posibles del peso de niños de 5 a 19 años con 100 kg. En la frase 47 la docente manifiesta su interés por las explicaciones de los estudiantes.

En la transcripción siguiente la docente continúa promoviendo la interpretación del gráfico a partir de los intercambios entre los niños.

51. Andrea: Es como, **como más general esta tabla**, porque dice chicas y en el otro dice chicos, **es como más general**.
52. D: Habla como en general, no está hablando de uno en particular, sino… ¿coinciden?

[…]

62. D: Hay uno de chicas y uno de chicos, y ¿por qué será eso?
63. A: **Porque son diferentes cuerpos** y… como así… las chicas tendrían que pesar eso con diferencia de masa y cuerpo y los chicos también por diferencia de masa y cuerpo deberían pesar esto.
64. D: Bien, hay algunas diferencias entre el crecimiento de los hombres y las mujeres que se van manifestando en el cuerpo, ¿sí? Eh… se manifiestan, incluso creo que se van dando cuenta, porque entre ustedes no hay tanta diferencia de edad, no llega a ser un año la diferencia de ninguno de ustedes y el crecimiento en ese sentido va siendo desparejo.

Transcripción 12. Frase 51-64 de la Tarea A3

La intervención de Andrea al principio de la transcripción (frase 51) da cuenta de que la niña observa que el gráfico representa algo general. Como dijimos al presentar esta tarea, no forma parte de nuestros objetivos el formalizar la noción de percentiles ni explicar detalladamente cómo se logra un gráfico de este tipo. No obstante, creemos que el hecho de que los niños perciban intuitivamente que el gráfico representa de alguna manera *algo que sucede en general*, valores *frecuentes* de la altura según la edad, podría contribuir la consideración del gráfico como *modelo* para representar una determinada situación de la realidad. Consideramos que el *contexto* de la tarea resulta *significativo* para los estudiantes porque pueden relacionarlo con experiencias vividas e interpretar intuitivamente lo que el gráfico representa.

Más adelante surge la cuestión sobre qué representan las diferentes curvas que aparecen en el gráfico.

106. A: ¿Y que serían las 5 linitas? **la del medio que estás bien la de arriba que estás un poco más alto** y la de…

Transcripción 14. Frase 106 de la Tarea A3

158. Yoni: **Vos tenés que estar en una línea según la edad y el peso.**
159. D: O dentro de los rangos que marcan.
160. A: **Si no estás en ese lugar o… significa que estás mal, estás más bajo de lo que tenés que estar o más alto.**
161. D: No necesariamente mal, pero si estás más como vos dijiste recién, en determinado momento estás más alto o bajo de lo que en general, lo normalmente corresponde a la edad o a la altura.

Transcripción 15. Frases 158-161 de la Tarea A3

Si bien reconocemos la imprecisión con la que se aborda la noción de percentil y que en una intervención vuelve a surgir la confusión con el peso (frase 158, Transcripción 15), lo que expresan los estudiantes en las frases 106 y 160 manifiestan una interpretación intuitiva, considerando cuáles son los conocimientos con los que cuenta al momento de realizar tal interpretación.

En el transcurso de la clase también tienen lugar algunos intercambios en torno a las diferencias en los gráficos de acuerdo con el sexo. Entre ellos, rescatamos las frases 63 y 64 de la Transcripción 12 que utilizamos anteriormente y los intercambios de la Transcripción 14 que planteamos a continuación:

77. D: Claro, con ser varones o mujeres, porque vieron que yo no les di a todos la misma. **El ser varón o ser mujer determina distintos valores**. Bien, pero en realidad la tabla de uno y de otro tiene los mismos valores en un eje y en otro.
78. Andrea: Pero son distintos, **los gráficos son distintos**, **porque los varones como que crecen con el tiempo y las mujeres se quedan no se**…
79. D: Bien ya te vas dando cuenta al comparar estos dos porque ya vas viendo con Alejo en comparación, perfecto Andrea lo que vos aportaste, pero fíjense que las dos tablas las hicieron del mismo modo, teniendo en cuenta los mismos valores, no se compara...

Transcripción 14. Frases 77-79 de la Tarea A3

La docente retoma esta cuestión luego de que los niños señalaron el punto del gráfico que representa su edad y estatura.

127. D: Fíjense donde quedaron concentrados los puntos, **¿alguien le encuentra alguna explicación?**
128. *Hablan varios al mismo tiempo.*
129. A: Las chicas...
130. A: Porque tenemos la misma edad.
131. D: Veamos la de los muchachos acá y las nenas acá (*hablan varios al mismo tiempo*).
132. A: ¡Están más prolijitos los de los varones, Seño!
133. D: ¿Están más prolijitos? ¿Qué diferencias observan?
134. A: **Que las mujeres están con percentilos arriba, más arriba que los hombres.**
135. D: Ajá, qué las medidas... ¿la altura?
136. A: Sobretodo que...
137. D: Ajá, de algunas mujeres...
138. A: **Sí, pero la tabla de las mujeres va más en subida y la tabla de los varones va más baja y sube**.
139. D: **La subida es como más abrupta...**
140. A: Ajá.
141. A1: **¡Claro, como que es así! Como que es así, hace así y se queda y los varones hace así hasta que llega** (dibuja la forma de la gráfica en el aire)
142. D: Bien.
143. A1: O sea**, como que las mujeres crecen mucho de golpe y después se quedan ahí y los varones van creciendo...**

Transcripción 15. Frases 127-143 de la Tarea A3

En la transcripción anterior se ponen de manifiesto las diferencias en la estatura según el sexo, que es característica de la edad de los niños de la clase (en promedio 12 años). El contexto de la tarea, muy cercano a sus experiencias de vida, favorece el reconocimiento de la potencia de la matemática para *modelizar* aspectos determinantes del crecimiento de los sujetos y como una herramienta útil para evaluar el desarrollo. Por otro lado, nos interesa resaltar las interpretaciones de los niños al comparar los puntos señalados en los dos gráficos del pizarrón (Figura 2).

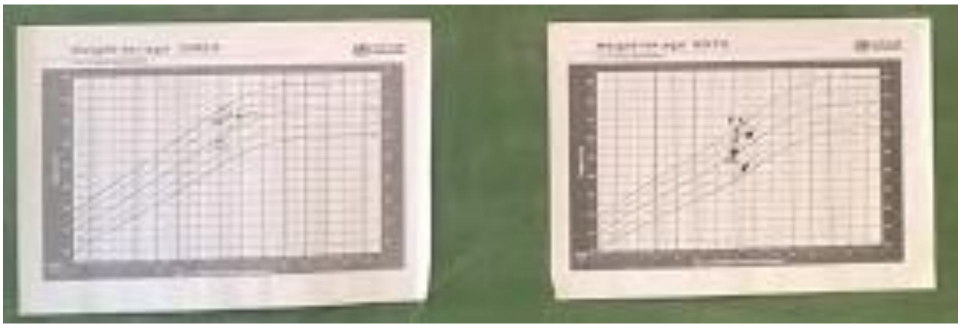


Figura 2. Gráficos de percentiles edad-estatura de niñas y niños de 0 a 19 años en el pizarrón

Por un lado, rescatamos la intención de la docente de *generar explicaciones* sobre las características de los puntos identificados en cada gráfico. No se satisface con que los niños hayan interpretado lo que representa cada variable involucrada ni que hayan identificado el par ordenado que les corresponde a cada uno. Los invita a ir un poco más allá para comparar la concentración de puntos obtenidos en cada gráfico.

Detengámonos un momento en las características del desafío propuesto por la docente. Los niños deben comparar dos gráficos sin la posibilidad de superponerlos, con el agregado de que en cada uno de ellos aparecen varias curvas (que representan los diferentes percentiles) y que podrían funcionar de "distractores" al momento de realizar la comparación. No obstante, la disposición de los gráficos en el pizarrón (Figura 2) favorece la comparación.

En las expresiones utilizadas por los niños notamos cierta falta de precisión en la utilización de algunos términos (como *tabla* en lugar de *gráfico*), que no es tomado en cuenta por la docente. También observamos que algunos niños (a partir de la frase 138) modifican el asunto que se estaba tratando (comparar la concentración de puntos en las dos gráficos) para pasar a un asunto más general que es la comparación de las dos representaciones gráficas. La docente *se suma* al análisis de los gráficos que realizan los estudiantes.

Entendemos que el hecho de expresar en forma coloquial lo que observamos en representaciones gráficas no es un *procedimiento mecánico*, especialmente cuando se introduce por primera vez esta cuestión en la clase de matemática. Se trata de realizar una *conversión*, en términos de Duval (2008) del registro gráfico al coloquial.

Una niña intenta explicar la diferencia entre ambos gráficos pero no concluye su idea "Pero son distintos, **los gráficos son distintos**, porque los **varones como que crecen con el tiempo y las mujeres se quedan no sé**…" (frase 78, Transcripción 14). Más tarde, otro estudiante recurre a representar con un dedo en el aire la forma de cada gráfico acompañado de algunas expresiones "**Como que es así, hace así y se queda**" (frase 141, Transcripción 15). Luego, *encuentra las palabras* para completar su propia explicación y expresar verbalmente lo que observa "O sea, como que las mujeres **crecen mucho de golpe y después se quedan ahí y los varones van creciendo…**" (frase 143, Transcripción 15).

La invitación de la docente a manifestar oralmente las diferencias entre los gráficos los obliga a buscar palabras para expresar eso que aparece a simple vista. Vygotski (1993:298) nos ayuda a precisar el desafío que implica *poner en palabras* lo que pensamos en un momento determinado al mencionar que "el pensamiento no se expresa en la palabra, sino que se realiza en ella".

Destacamos el salto cualitativo que produce el estudiante que *pasa* de acompañar sus enunciados orales con gestos (porque quizás implícitamente se da cuenta de que las palabras que usa no expresan *todo lo que quiere decir*) a expresar sus ideas utilizando sólo el lenguaje coloquial.

Reflexiones finales

Como señalamos al principio de esta comunicación, nos centramos en analizar la cuestión del sentido en educación matemática desde dos miradas diferentes, una de ellas centrada en el papel de los intercambios en el aula de matemática y la otra, en el significado de las acciones de los estudiantes.

En relación con la primera de ellas, en el análisis de la tarea propuesta se pone de manifiesto la idea de alteridad de Bajtín (2011), porque en reiteradas ocasiones los niños se apropian de ideas de sus compañeros para conformar su propio discurso. En un momento dado, la identificación de las variables representadas en los gráficos se logra a partir de una discusión sobre puntos de vistas diferentes (algunos pensaban que se trataba del peso, otros de la estatura). Esta cuestión se define por medio de la explicación de algunos estudiantes, que recurren a valores posibles de las variables implicadas. Los aportes de Vygotski (1993) se evidencian fundamentalmente al momento de poner en palabras lo que se observa e interpreta del gráfico. Se trata de realizar una conversión de registros (Duval, 2008), con la complejidad que supone esta tarea, atendiendo a las características de los gráficos utilizados y a los conocimientos previos de los estudiantes.

Desde la segunda perspectiva considerada, la EMC, notamos que nuestro trabajo contempla el cuestionamiento de Skovsmose (2012) en relación con el *prototipo sesgado de investigación en educación matemática*, con aulas construidas discursivamente en las cuales se espera que los alumnos se comporten de una manera determinada. En las mismas, se considera a "estudiantes como *aprendices esquizomatemáticos* que no parecen expresar interés alguno en la vida real, y más bien parecen un estereotipo del sujeto epistémico, como lo caracterizó Jean Piaget en su elaboración de una epistemología genética" (Valero, 2002 en Skovsmose, 2012, p.273). Por el contrario, en nuestro estudio se ponen en evidencia, mediante los intercambios que se producen en el aula, intervenciones de estudiantes con diferente nivel de apropiación del contexto y el establecimiento de relaciones con experiencias personales que exceden el ámbito escolar.

En este sentido, tal como lo plantea Skovsmose (2012, p.285): "cuando se hacen visibles las relaciones entre lo que está pasando en el aula y algunas prácticas extraescolares en las que los estudiantes podrían llegar a involucrarse, se ha establecido un recurso para la producción de significado por parte de los estudiantes".

El modo de construir dicho recurso, en nuestro caso, fue por medio de un *trabajo colaborativo de equipo mixto* que llevamos a cabo con las docentes de los dos séptimos grados para el diseño de las tareas, bajo el supuesto de que sus conocimientos acerca de las características del grupo de estudiantes elegido (y de niños de esa etapa etaria en general) enriquecen notablemente los aportes de las investigadoras. Se logró adecuar los contextos y la complejidad de las tareas al grupo de estudiantes.

Atendiendo a la preocupación que manifiestan algunos autores en torno a la relación posible entre los resultados de la investigación y la práctica en el aula (Skovsmose, 2012), entre el grupo que lleva adelante un estudio y los docentes que lo implementan (Sadovsky, 2003), pensamos que una respuesta posible consiste en promover estudios que favorezcan un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores como medio para articular intereses de ambas partes con el objetivo común de promover significados y sentidos en educación matemática.

Referencias bibliográficas

Bajtín, M. (2011). *Las fronteras del discurso*. (Trad. Borovsky, L.). Buenos Aires, Argentina: Las cuarenta.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Boavida, A. M. y da Ponte, J. P. (2011). Investigación colaborativa: potencialidades y problemas (Trad. Pérez, D. A. y Jaramillo, D.) *Revista Educación y Pedagogía*, *23* (59), 125-135.

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G, Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education. Epistemology, History, Classroom and Culture,* (pp. 49-62). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Kiener, F. (2019). *Iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre dos variables en séptimo grado de la educación primaria* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5° edición). Madrid, España: Pearson. Addison Wesley.

Sadovsky, P. (2003) *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas* (Tesis de Doctorado). Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Scaglia, S. (2016). Reflexiones sobre la construcción de sentido en la formación inicial del profesor de matemática. En L. Rico Romero, M. C. Cañadas Santiago, A. Marin Del Moral y M. T. Sánchez Compaña (Eds.), *Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Moisés Coriat* (pp. 241-251). Granada, España: Comares.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. y Brizuela, B.M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Paidós Cuestiones de Educación.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 6*(1), 3-26.

Skovsmose, O. (2005). Meaning in Mathematics Education. En J. Kilpatrick, C. Hoykles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 83- 104). New York, USA: Springer.

Skovsmose, O. (2012). Investigación, práctica, incertidumbre y responsabilidad. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 269-297). Bogotá, Colombia: Ediciones Uniandes.

Vygotski, L. S. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. *Infancia y aprendizaje*. 27/28, 105-116. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/668448.pdf

Vygotski, L. S. (1993). *Obras Escogidas II. Problemas de Psicología General* (Trad. Bravo J. M.). Madrid: Visor Distribuciones. (Trabajo original publicado en 1982).

Reflexión en torno a una propuesta de capacitación con maestros de aulas de plurigrado acerca de la enseñanza de la geometría

María Laura Imvinkelried
mimvinkelried@gmail.com
Escuela Normal Superior N°32
Cecilia Laspina
cecilaspina@gmail.com
Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este trabajo relatamos una experiencia de capacitación docente presencial con maestros de escuelas primarias rurales de diferentes provincias de la Argentina, que tienen a su cargo aulas de plurigrado. En estas jornadas, se reflexionó y discutió cuestiones en torno a la enseñanza de la geometría, y fue diseñada con un doble propósito: que los docentes construyan conocimientos matemáticos y que elaboren conocimientos referidos a las condiciones didácticas necesarias para que sus alumnos puedan apropiarse de un recorte de dichos conocimientos, en el marco de concebir la clase de matemática como un espacio de producción de conocimientos.

Con la intención de comunicar y reflexionar acerca de la experiencia llevada a cabo, se presentan y analizan las producciones finales realizadas por seis grupos de docentes en una jornada de la capacitación.

A partir de esta comunicación, se espera poner de manifiesto la necesidad y la importancia de que los docentes generen propuestas de enseñanza, en este caso para aulas heterogéneas que permitan a los estudiantes participar de experiencias de aprendizaje en las que prevalezca la construcción de saberes matemáticos. Si bien estas propuestas serán adaptadas a cada nivel, resaltamos la importancia de que todas ellas compartan un mismo objeto de estudio, en este caso particular, las figuras geométricas.

Introducción

La experiencia que presentamos a continuación, surge en el marco de una capacitación presencial a docentes de escuelas primarias rurales de diferentes provincias de nuestro país, llevada a cabo enero del 2020, en la Ciudad de Buenos Aires.

En estas escuelas primarias rurales que participaron de la experiencia, las aulas tienen una característica muy particular, son aulas llamadas *"plurigrado"*. En ellas, los docentes tienen a cargo grupos de estudiantes de distintas edades y niveles educativos, es decir, que conviven en un mismo espacio estudiantes que pertenecen a distintos grados de escolaridad.

> Cuando se asume la enseñanza de la matemática con el compromiso de la participación de todos los alumnos en una comunidad de producción, en la que se resuelven problemas con distintos procedimientos, se elaboran conjeturas, se discute sobre la validez de las mismas, se comparan producciones y se establecen conclusiones… la tarea resulta todo un desafío (Chemello y Agrasar, 2019, p.9).

Además, si reconocemos que todas nuestras aulas, tanto cuando trabajamos en plurigrado como cuando lo hacemos en aulas graduadas, son heterogéneas y que todos los alumnos pueden aprender matemática, el desafío parece aún mayor, ya que debemos diseñar propuestas que involucren en este trabajo reflexivo a los estudiantes de distintas edades y con distintos conocimientos.

Planificar la enseñanza de la Matemática en aulas heterogéneas

Uno de los objetivos de esta capacitación fue, acompañar a los docentes en el proceso de planificación de la enseñanza de la Matemática teniendo en cuenta las características propias de las escuelas, comunidades donde están insertas y estudiantes.

Una posibilidad de plantear una propuesta didáctica en aulas heterogéneas, es a partir de la definición de un objeto de estudio común a todos los grupos y, teniendo en cuenta los saberes disponibles de cada uno de éstos, la introducción de las variables didácticas necesarias, para generar propuestas particulares para cada grupo o nivel. Esto da la oportunidad de que toda la clase esté estudiando un mismo tema, con actividades que incluyen distintos tipos de tareas de acuerdo al nivel en el que se encuentren.

Si consideramos la clase de matemática como un espacio de construcción de saberes a partir de la resolución de problemas y el intercambio de ideas en torno a los mismos, es necesario incluir espacios de debate como así también de elaboración de conclusiones matemáticas donde se expliciten y registren las ideas trabajadas.

Dado que, en el aula de plurigrado se distinguen claramente las tareas que cada grupo realiza, es necesario destacar el lugar de la elaboración de conclusiones matemáticas. Es interesante plantear en las clases, un espacio de intercambio común, donde cada grupo pueda compartir con los otros las conclusiones matemáticas elaboradas. Esto posibilita extender aquellas conclusiones a las que arriben los más pequeños a los grupos mayores, y también posibilita de manera recíproca que los más pequeños se nutran de las conclusiones de los más grandes.

Algunas cuestiones en relación a la enseñanza de la geometría

En los últimos años, los documentos curriculares de nuestro país, plantean que cada actividad constituye un problema matemático para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema y para hacerlo, elabora un cierto procedimiento y pone en juego las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones.

Ahora bien, dado que en esta capacitación el objeto de estudio fue la Geometría, nos resulta importante explicitar qué se entiende por problema geométrico. Una caracterización de los mismos está dada por Altman, Comparatore, y Kurzrok (2009):

> [...] un problema geométrico es aquel en el cual se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos en su resolución, pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras dibujos. Estos dibujos no cumplen, en la resolución del problema, la función de permitir llegar a la respuesta por simple constatación sensorial. La decisión autónoma de los alumnos acerca de la verdad o falsedad de sus respuestas se apoya en las propiedades de las figuras y los cuerpos. Sus argumentaciones producen nuevos conocimientos sobre estos objetos geométricos (p.4).

Nos resulta interesante recuperar los distintos tipos de tareas geométricas que pueden plantearse en relación al estudio de figuras, que dan lugar a un tipo de trabajo geométrico de exploración y producción de procedimientos de resolución, de comunicación de lo realizado y de debate en grupo para analizar la validez de las respuestas encontradas.

En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) se explicitan algunas situaciones y tareas posibles para proponer en el aula de modo que los estudiantes desarrollen algunas prácticas geométricas. Por ejemplo:

Copiar y construir

Las situaciones de copia con y sin modelo presente, dictado, pedido de datos y la construcción a partir de datos dados, permiten construir las figuras y analizar si es posible un dibujo, varios o tal vez ninguno que respondan a los datos. Al momento de elegirlas, es importante considerar cuáles son los conocimientos geométricos que se ponen en juego en cada caso. En este sentido, se presenta una breve síntesis descriptiva:

Copiar con modelo presente: La figura está disponible al lado de cada estudiante, deben pensar la figura en términos de los elementos que la constituyen sin explicitar las relaciones.

- Copiar sin modelo presente: Se dispone de una única figura y se encuentra en una mesa, los estudiantes pueden ir a buscar la información que quieran, anticipar información necesaria y registrarla.
- Pedir datos: El maestro tiene la figura y dice cuál es, y los niños piden los datos que necesiten. Éstos deben concebir la figura genérica porque no la puede ver.
- Construir a partir de datos: Sólo se brindan los datos, lo cual permite discutir la constructibilidad y cantidad de soluciones.
- Dictar una figura: Consiste en el intercambio de información con mensajes, habilita a la superposición de figuras como validación, requiere de la explicitación de relaciones.

Formar figuras a partir de otras

Las situaciones para armar nuevas figuras a partir de otras y desarmar figuras considerando otras líneas además de su contorno, dan lugar al establecimiento de relaciones entre las figuras que intervienen.

Comparar, describir, reconocer, clasificar

Partiendo de modelos ya realizados, dibujos o recortes en papel, se pueden organizar distintas actividades que involucran el reconocimiento de elementos y propiedades. Un ejemplo son los juegos de “adivinanza”, a partir de un conjunto de figuras que se elige según las propiedades que se pretendan trabajar. Los alumnos formularán preguntas para descubrir la figura que el docente ha pensado, teniendo en cuenta las condiciones que la consigna impone al tipo de preguntas que se pueden formular. Las preguntas surgirán de la comparación de las características de las figuras y luego permitirán describir a cada una. Asimismo, de la organización de grupos de figuras con propiedades comunes podrán surgir diferentes clasificaciones de las mismas.

Analizar afirmaciones y clasificar

Estas tareas permiten retomar y sistematizar conocimientos elaborados en situaciones que involucran los tipos de tareas mencionadas anteriormente. La organización de cuadros clasificatorios, son ejemplos de este tipo de tarea.

Una propuesta posible

A continuación, presentamos la consigna con la que trabajamos en el encuentro presencial:

a. En grupos de a cuatro, por parejas, escriban las instrucciones para que sus compañeros puedan construir esta figura sin verla.
b. ¡Intercambiamos los mensajes!
c. Cuando cada grupo, reciba el mensaje, construyan la figura sobre sobre una hoja lisa.
d. Al finalizar, comprobar superponiendo que la figura construida coincide con la original.

Los modelos que se propusieron dictar fueron:

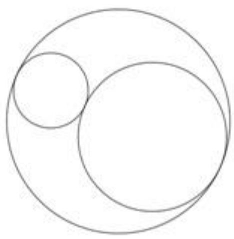


Figura 1. Modelo 1

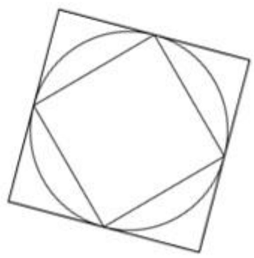


Figura 2. Modelo 2

La tarea seleccionada fue el dictado de una figura. Recuperamos a Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman (1998), quienes expresan que:

> Describir una figura (tarea que se realiza en el momento que los chicos producen los mensajes) y construirla a partir de su descripción textual (trabajo de los alumnos cuando están en función de receptores) son actividades que cumplen, desde un punto de vis-

> ta didáctico con un objetivo doble: **que los niños busquen nuevas relaciones para caracterizar la figura y que pongan en juego las concepciones que ellos tienen en relación con estas figuras con las que están trabajando.** Tanto los mensajes que los niños producen, como las construcciones que realizan a partir de los mismos, son portadores de los significados que ellos van construyendo en relación con la figura (p.14).

Cabe aclarar que en esta propuesta optamos por presentar las figuras en papel liso, lo cual constituye una variable didáctica de la situación, pues modifica las exigencias que el problema presenta para los estudiantes, en este ocasión docentes. En el caso del papel liso, resulta una variable didáctica pues habilita el uso de la regla graduada, la escuadra y el compás para explorar la figura; lo cual no siempre resulta necesario si el modelo se presenta en papel cuadriculado.

Nos resulta importante destacar que es posible generar una propuesta para un aula de plurigrado, teniendo en cuenta otra variable didáctica: las figuras que intervienen en la tarea de dictado. La elección del modelo a dictar, determinan los contenidos que se pueden abordar y las relaciones que se pueden establecer entre los objetos geométricos que intervienen. Por ejemplo: para los más pequeños se pueden modelos con cuadrados y rectángulos con distintos tamaños y habilitando el uso de papel cuadriculado. Para un grupo intermedio, se puede combinar más de una figura y elementos de las mismas como ser diagonales o bases medias, y seleccionar qué papel y elementos geométricos pueden utilizar. Por último, para los más grandes se puede proponer el dictado de figuras más complejas, como por ejemplo aquellas que combinen mayor cantidad de figuras, y permitir solamente el uso de papel liso.

La selección de figuras comunes, en todas las situaciones para cada uno de los niveles, habilitará a un momento de intercambio colaborativo entre pares, donde todos juntos puedan describir una misma figura aportando distintas propiedades.

Por otro lado, "es interesante pensar en esta actividad inserta en una secuencia en la que también se proponen otros problemas en los que es necesario utilizar de modo más explícito los nuevos aspectos que se pudieron reconocer" (Sadovsky et al., 1998, p.20).

Análisis de las producciones

Antes de analizar algunas de las producciones, nos interesa describir cómo se gestionó esta actividad con los docentes en la capacitación. Una de las restricciones que se sumó a la consigna fue la utilización de “los nombres de figuras conocidas” en el instructivo que elaboren, con el propósito de generar la necesidad de que los docentes exploren las propiedades de las figuras y las utilicen en sus producciones.

Al momento de elaborar los instructivos, algunos grupos comenzaron su escritura rápidamente sin realizar una exploración previa de las propiedades de las figuras que formaban parte del modelo a construir. En este momento, nos resultó pertinente realizar una intervención didáctica que sugiera la importancia de “hacerle preguntas a las figuras”, es decir, la necesidad de identificar las propiedades que las caracterizan y de este modo seleccionar las necesarias para elaborar el instructivo descartando aquellas que no sean útiles.

A continuación, presentamos algunos interrogantes que guían el análisis de las producciones de los docentes:

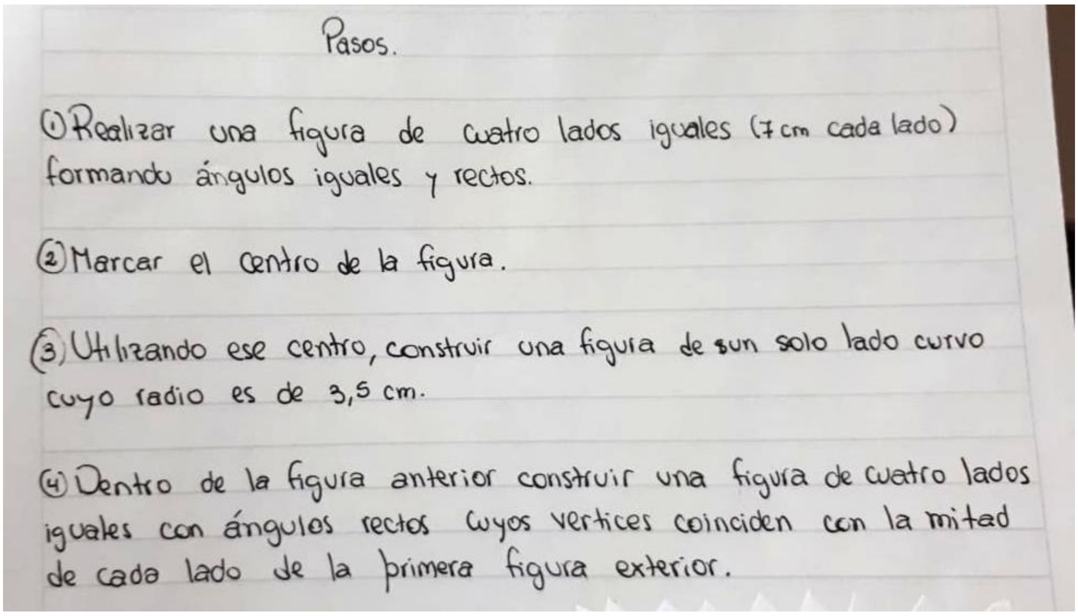
¿Con qué contenidos geométricos se puede relacionar esta actividad de dictado de figuras?

Al leer los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) elaborados por el Ministerio de Educación de la Nación (2005), que orientan el diseño de las propuestas didácticas, encontramos en los correspondientes del 2° ciclo, el siguiente contenido que se adecúa a la actividad presentada:

> El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y análisis de construcciones considerando las propiedades involucradas en situaciones problemáticas que requieran: copiar y construir figuras (triángulos, cuadriláteros, círculos, figuras combinadas) a partir de distintas informaciones (instructivo, conjunto de condiciones, dibujo) mediante el uso de regla, escuadra, compás y transportador, y evaluando la adecuación de la figura obtenida a la información dada (p.23).

¿Qué conocimientos pusieron en juego los docentes al realizar la actividad?

Si bien nos detendremos a analizar un solo instructivo, cabe aclarar que en todas las producciones de los docentes encontramos conocimientos geométricos similares a los hallados en éste en particular.



Pasos.

(1) Realizar una figura de cuatro lados iguales (7 cm cada lado) formando ángulos iguales y rectos.

(2) Marcar el centro de la figura.

(3) Utilizando ese centro, construir una figura de sun solo lado curvo cuyo radio es de 3,5 cm.

(4) Dentro de la figura anterior construir una figura de cuatro lados iguales con ángulos rectos cuyos vertices coinciden con la mitad de cada lado de la primera figura exterior.

Figura 3. Instructivo A, Modelo 2.

Al analizar el instructivo de la Figura 3, podemos notar claramente el uso de algunas nociones en relación a ciertos conceptos geométricos puestos en juego al redactar el mensaje. Por ejemplo, propiedades que definen al cuadrado como ser: cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales y rectos. Si bien este grupo no distingue las condiciones mínimas para definir a un cuadrado, enuncia las necesarias para hacerlo. También, encontramos que este grupo utiliza la noción de centro de la figura, reconocen al radio y al centro como elementos de la circunferencia y la relación entre los vértices de uno de los cuadrados con respecto a los lados del otro, es decir, los vértices del cuadrado interior, son los puntos medios de los lados del cuadrado exterior.

Al analizar la figura construida a partir del instructivo anterior (figura 4), observamos que las instrucciones para construir los cuadrados "funcionaron" dado que lo construido coincide con el modelo original. Nos resulta interesante destacar que, para determinar el centro de la figura que se solicita en el paso 2 del instructivo, este grupo se apoya en la base media del cuadrado y determina midiendo su punto medio. Dado que no tenemos evidencia de este procedimiento haya sido razonado de esta manera, es que podemos suponer que esta construcción ha sido más bien intuitiva y apoyada en la percepción. Por último, se observa que ante el pedido del trazado de "una figura de un solo lado curvo", este grupo asocia esa información a una semicircunferencia.

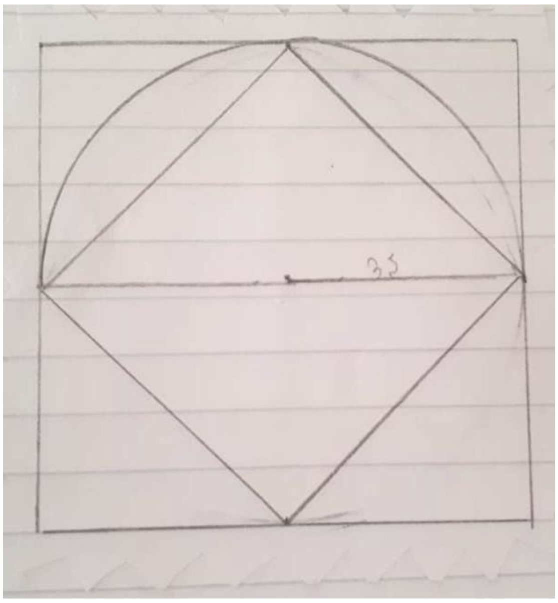
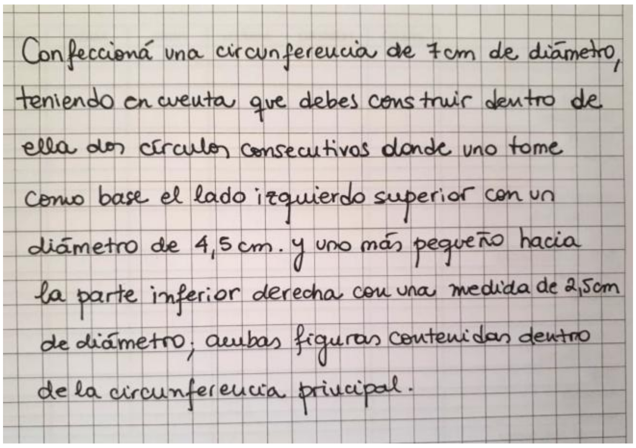


Figura 4. Figura construida a partir del instructivo A.

¿Cuáles fueron los errores y/o dificultades que los docentes reconocieron luego de realizar la actividad?



Confeccioná una circunferencia de 7cm de diámetro, teniendo en cuenta que debes construir dentro de ella dos círculos consecutivos donde uno tome como base el lado izquierdo superior con un diámetro de 4,5 cm. y uno más pequeño hacia la parte inferior derecha con una medida de 2,5cm de diámetro; ambas figuras contenidas dentro de la circunferencia principal.

Figura 5. Instructivo B, Modelo 1

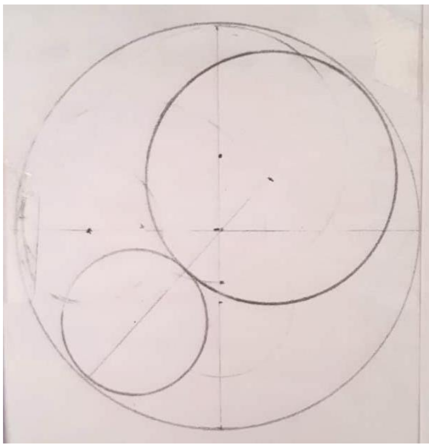


Figura 6. Figura construida a partir del instructivo B

En las figuras 5 y 6 podemos leer el instructivo y la figura construida a partir de éste. Si bien la figura construida coincide con el modelo propuesto, en el momento de la validación, el grupo que interpretó el mensaje y construyó la figura, expresó que no podía anticipar si lo realizado era correcto o no, dado que el instructivo recibido les resultó confuso. En la puesta en común, ambos grupos expresaron que el instructivo carecía de lenguaje específico y de especificidad al nombrar los elementos de una figura. Por ejemplo: al mencionar "*como base el lado izquierdo supe-*

rior” se confunde un punto de tangencia entre ambas circunferencias, con un “*lado*”, sin advertir que la circunferencia no posee lados. Otra cuestión que nos interesa remarcar, si bien no fue mencionada por los docentes, es que el grupo que realiza el instructivo intenta describir la figura en una posición que resulte coincidente con la del modelo original, es decir, consideran como una propiedad de la figura, la posición en la que se encuentra la misma, y esto se evidencia, cuando mencionan: “*lado izquierdo superior*” o “*la parte inferior derecha*”. Otra noción que los grupos expresaron como confusa, fue la diferencia entre círculo y circunferencia.

Por último, se propuso en la puesta en común reflexionar acerca de la necesidad de indicar la relación de los centros de las circunferencias interiores y el diámetro o centro de la exterior, y la redacción de ésta en forma de instrucción.

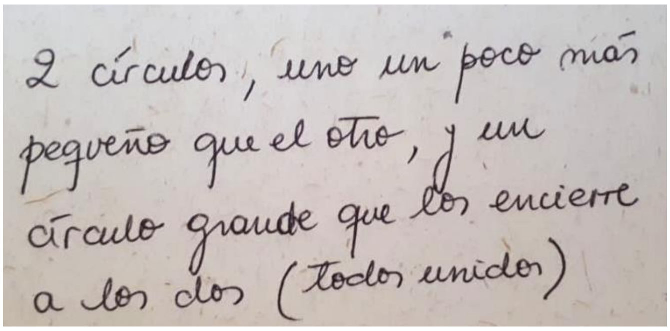

2 círculos, uno un poco más pequeño que el otro, y un círculo grande que los encierre a los dos (todos unidos)

Figura 7. Instructivo C, Modelo 1

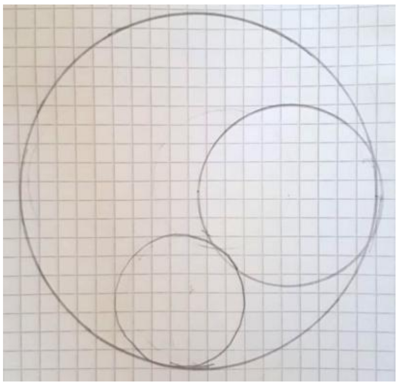


Figura 8. Figura construida a partir del instructivo C

Al analizar la figura 7, podemos observar que este grupo al intentar describir la figura dada a través de un texto, no logra encontrar los elementos que la definen y las relaciones que estos determinan, quedando su interpretación solamente en un plano perceptivo. Esto también se puede observar en la forma de redacción del mensaje, dado que éste solamente enuncia la presencia de ciertas figuras (círculos), sin establecer un orden en las acciones y pasos necesarios para construirlas.

Al momento de validar la construcción ambos grupos acordaron que el modelo construido -figura 8- responde al instructivo recibido, pero que no coincide con el modelo original presentado, dado que el mensaje redactado omitió información acerca de las relaciones que se pueden establecer entre las tres circunferencias que componen el modelo.

Al igual que en el caso anterior (figuras 5 y 6), ambos grupos reconocieron la dificultad que tuvieron para nombrar la tangencia de las circunferencias dadas, es decir, no pudieron describir que las mismas solo tienen solamente un punto en común, dado que utilizaron términos como: *"consecutivos", "todos los círculos unidos"*, *"a la par"*.

Conclusiones

A modo de conclusión, podemos expresar que la capacitación fue valorada muy positivamente por los docentes destinatarios dado que, tal como hemos mencionado en el desarrollo del trabajo, la misma promovió que los docentes pongan en juego tanto sabes geométricos como didácticos.

En cuanto a los saberes geométricos, posibilitó que se recuperen y amplíen muchos conceptos trabajados, así como también poner en discusión concepciones erróneas y la enseñanza de dichos conceptos.

Para finalizar, nos interesa mencionar la importancia de que los docentes puedan vivenciar experiencias de aprendizaje como la descripta, que les permitan, reflexionar y ampliar sus conocimientos tanto didácticos como matemáticos y que, a su vez, les brinden herramientas para pensar posteriormente sus prácticas profesionales. En sentido, recuperamos los aportes de Chemello, Agrasar, Chara y Crippa (s.f) quienes ponderan que:

> Varios autores (Robert y Douady, 2001, y Lerner, Stella y Torres, 2009) destacan la pertinencia de proponer situaciones formativas que denominan de "doble conceptualización". Estas situaciones persiguen un doble objetivo: lograr, por una parte, que los maestros construyan conocimientos matemáticos y, por otra, que elaboren conocimientos referidos a las condiciones didácticas necesarias para que sus alumnos puedan apropiarse de un recorte de dichos conocimientos.
>
> Están pensadas para que los docentes realicen quehaceres propios de la producción de conocimientos disciplinares para luego conceptualizar tales quehaceres. También para que analicen las condiciones didácticas en las que se desarrolló la situación de formación de la que participaron y analicen luego las condiciones didácticas necesarias para que sus alumnos puedan apropiarse de un quehacer de características similares. La reflexión acerca del proceso vivido durante la resolución permite identificar las características de la práctica matemática desarrollada, objetivarla y, hacer lo mismo con los supuestos de enseñanza involucrados. También permite establecer similitudes y diferencias con las situaciones experimentadas en su formación anterior, y vincularlas con las adecuadas al nivel donde se desempeña como docente (p.9).

Referencias bibliográficas

Altman, S., Comparatore, C., y Kurzrok, L. (2009). La enseñanza de la geometría en la escuela. *12ntes*, *1*(3), 4.7.

Chemello, G, Agrasar, M, Chara, S y Crippa, A. (s.f). Clase virtual Nº 6 ¿Qué matemática debe aprender un maestro en la capacitación y cómo la aprende? Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de la Nación.

Chemello, G. y Agrasar, M. (2019). *Matemática en aulas de plurigrado: el juego como recurso de enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Fundación Bunge y Born en alianza con la Fundación Pérez Companc.

Ministerio de Educación de la Nación (2013). *Cuarto Encuentro Nacional. Matemática para Todos en el nivel primario*. Buenos Aires: Argentina.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2005). *Núcleos de aprendizaje prioritarios (N.A.P)*. Buenos Aires, Argentina.

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H. y Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo n° 5. La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires, Argentina: Gobierno de la ciudad de Buenos Aires.

Tablas, Discos y Mapas. Posibles representaciones de las tablas de multiplicar

ARNALDO ARIAS
arnaldogabrielarias@gmail.com
CLIDIA RIGESTI
clidiar@yahoo.com.ar
Escuela Primaria de la Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este trabajo deseamos dar cuenta del abordaje de la matemática que hemos realizado en tercer grado, ambas secciones, de la Escuela Primaria de la UNL. El mismo consta de un recorrido a través de personajes que guardan relación con esta disciplina y a partir de los cuales articulamos contenidos curriculares para desarrollarlos en las clases diarias en el aula. El proyecto pedagógico, que caracteriza el modo de planificación que ha adoptado nuestra escuela y a partir del cual elaboramos las propuestas de enseñanza, atravesó el año académico 2019 y se extendió desde marzo hasta noviembre en una suerte de continuum. La matemática, producto de una construcción humana en contexto, con sus vicisitudes, marchas y contramarchas propias de quienes haciendo aciertan y desaciertan -según el punto de vista- fue el eje de ese proyecto al que le pusimos nombres propios.

En el texto que aquí estamos presentando hemos hecho un recorte epistemológico respecto del proyecto original. Escribimos entorno de la multiplicación a partir de tres recursos, tres maneras de presentarla y de organizar los factores y productos. La Tabla Pitagórica, el Disco de Waldorf y el Mapa de Tesla fueron las representaciones a partir de las que elaboramos las propuestas de enseñanza para trabajar contenidos de matemática en tercer grado.

Descripción de la experiencia de práctica

Al momento de comenzar a realizar nuestra planificación nos propusimos construir un corpus de textos de matemática para desde allí armar un proyecto pedagógico cuyo recorrido invite a las/os estudiantes de tercer grado a interpelar el sentido que tiene la organización de los productos resultantes de la multiplicación en la tabla Pitagórica. Nuestra intención fue la de “desarmar” la tabla que año tras año enseñamos en la escuela primaria para problematizar su construcción y buscar regularidades que la expliquen. En un segundo momento presentamos el Disco de Waldorf (decidimos quedarnos con esta manera de nombrarlo), una suerte de círculo numerado desde el cero hasta el nueve en el cual tejimos las diez tablas de multiplicar que antes habíamos visto con la Tabla Pitagórica. En el cierre, sobre el final del año, mostramos otra forma de organizar estos números: el Mapa de Tesla. Aquí rompimos la frontera del cien en tanto producto de diez por diez, en un intento por desnaturalizar representaciones que las prácticas escolares en general, y la enseñanza de la matemática en particular, producen respectivamente.

En primer lugar tomamos la Serie Cuadernos para el Aula de tercer grado de la escuela primaria (Zilberman, Castro y Chara, 2006) en donde encontramos conceptos que nos ayudaron a pensar la multiplicación en tercer grado. En aras de evitar la repetición memorística de las tablas de multiplicar, encontramos el siguiente pasaje que ilustra nuestra intención:

> Es importante que alentemos a cada alumno a buscar el procedimiento que le resulte más fácil para recuperar rápidamente un producto que no recuerda, como, por ejemplo, 6 x 8, superando el procedimiento “tan difundido” de empezar a recitar la tabla desde el comienzo 6 x 1, 6 x 2... hasta llegar a 6 x 8. (Zilberman et al., 2006, p. 88).

Luego tomamos el propio diseño curricular de la Escuela Primaria de la UNL para abordar desde allí los contenidos curriculares relacionados con la multiplicación en general, y las tablas de multiplicar, en particular. Encontramos contenidos tales como: “Búsqueda mental de mitad y de doble, de tercio y de triple. Procedimientos para multiplicar: sumas reiteradas. Combinación de procedimientos para multiplicar. Lectura de información contenida en tablas, gráficos y otros portadores” (Universidad Nacional del Litoral, 2006, p.27).

Desde aquí en adelante, en el propio proceso de construcción del proyecto en cuestión, fuimos imbricando bibliografía entorno de tres formas de presentar los productos de la multiplicación: en forma de tabla de doble entrada como la Tabla

Pitagórica, en forma de círculo como el Disco de Waldorf y en forma de dodecágono como el Mapa de Tesla.

Primero, Pitágoras

Las primeras semanas de clases se caracterizaron por una propuesta que tuvo como eje el juego a través de la resolución de acertijos matemáticos, sobre todo de ejercicios de pensamiento lateral. Con esto intentamos provocar en los estudiantes una variedad de soluciones tales que pusieran en cuestión la idea de camino único, algo que quedó evidenciado en las puestas en común que realizamos al finalizar los mismos. Podríamos decir que la operatoria con números naturales en particular sumas y restas, discriminando entre pares e impares, fue una característica de la mayoría de las actividades propuestas.

Poco a poco nos fuimos acercando a la idea de multiplicación entre números naturales en tanto suma sucesiva de un mismo número. Para esto utilizamos el ejemplo de Carl Friedrich Gauss (Paenza, 2015), algo que incorporamos luego en nuestro vocabulario como “el método de Gauss” y que pusimos en práctica cada vez que tuvimos que resolver la suma de una progresión aritmética.

Una vez finalizado el mes de abril presentamos la biografía de Pitágoras y propusimos un ejercicio a partir de la denominada “Tetraktys de Pitágoras ampliada con la Lambda de Timeo” (Martineau, 2014, p. 3). El mismo consistía en completar los círculos vacíos de la Tetraktys con los números correspondientes según sea duplicando o triplicando el número existente.

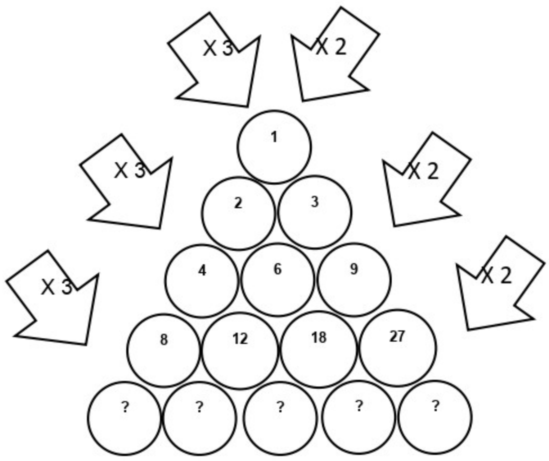


Figura 1. Tetraktys de Pitágoras ampliada con la Lambda de Timeo

En esta actividad recuperamos saberes relacionados con las tablas de multiplicar del 2 y del 3, respectivamente. Tal fue así que al concluir la misma escribimos en los cuadernos de clase lo siguiente:

- El número 6 se puede obtener duplicando el 3 ó triplicando el 2.
- El número 12 se puede obtener duplicando el 6 ó triplicando el 4.
- El número 18 se puede obtener duplicando el 9 ó triplicando el 6.

Finalmente pintamos con un color los números pares y con otro distinto, los impares. Estos últimos, curiosamente –al decir de los niños- se encontraron solamente en una de las líneas diagonales que comenzaba con la unidad. A partir de este "descubrimiento" abrimos el debate acerca de los resultados que se obtienen cuando en la multiplicación interviene un factor que es par.

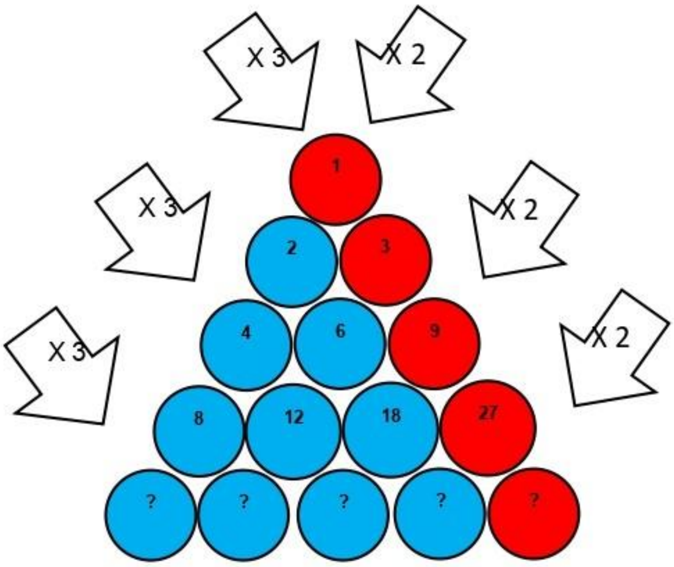


Figura 2. Números pares e impares

Cuando pasamos a trabajar con la Tabla Pitagórica les repartimos a las/os estudiantes la grilla vacía para ser completada con los productos correspondientes. Luego les preguntamos cuántos de esos productos eran pares y cuántos impares. A priori, las respuestas generalizadas surgidas desde el sentido común daban cuenta de paridad: cincuenta números pares y cincuenta números impares. Sometimos a prueba esta hipótesis y vimos que setenta y cinco números eran pares y veinticinco, impares. Nos parecía extraño que en cien casilleros ocupados por cien números, cuyo menor era el 1 y el mayor era el 100, no hubiera partes iguales entre pares e impares. Al recorrer con detenimiento la tabla vimos números repetidos y otros ausentes. Estos últimos estarían si prolongásemos la tabla del 1 infinitamente. Esto último puso en cuestión la arbitrariedad -¿de Pitágoras?- de limitar esta tabla hasta el producto de 10x10. Le siguió a estos planteos, que nos ayudaron a pensar, hipotetizar y debatir en el aula, ejercicios de comparación de productos entre: las tablas del 2, del 4 y del 8; las tablas del 5 y del 10; las tablas del 3 y del 6. Aquí volvieron a aparecer los conceptos "es el doble de" y "es la mitad de" en virtud de tratarse de tablas que pueden construirse duplicando o desdoblando otras.

En el cierre del trabajo con la Tabla Pitagórica localizamos los números cuadrados ubicados en la diagonal que va desde el 1 hasta el 100 y los escribimos en el cuaderno en una sucesión para luego intentar hallar los tres siguientes números cuadrados. Para ello tuvimos que encontrar primero una regularidad a partir de la cual pudimos resolver el problema planteado.

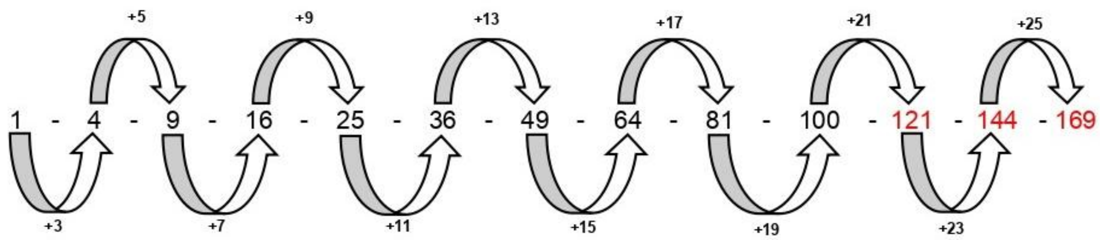


Figura 3. Números cuadrados obtenidos a partir de una progresión aritmética

Los números cuadrados 121, 144 y 169 se obtienen multiplicando 11x11, 12x12 y 13x13, respectivamente. De este modo se hizo presente el cuestionamiento a la "finitud" de la Tabla Pitagórica. Completamos esta actividad final recortando en hojas cuadriculadas y pegando en los cuadernos de clases cuadrados de 1x1; 2x2; 3x3; 4x4; etc.

Luego, el Disco de Waldorf

Reemplazamos el cuadrado de la Tabla Pitagórica por un disco circular de madera al que le clavamos diez chinches tipo galera, cada una coincidente con un número desde cero hasta el nueve. Le entregamos a cada estudiante un disco listo para atarle en la chinche correspondiente al número cero un hilo de color a elección del estudiante. Luego, en forma dirigida, tejimos las tablas desde la del 1 hasta la del 10 del siguiente modo:

Tabla del 1

Colocamos el disco de madera sobre la mesa de manera tal que el número cero quede hacia adelante. Luego tomamos el hilo que se encuentra atado en el propio número cero y lo vamos enganchando en cada número según el producto resultante de multiplicar el 1 por los números naturales comenzando por la unidad. La figura que se irá formando corresponde a la de un decágono pues en la tabla del 1 se recorren todos los números naturales. Cabe destacar que en el Disco de Waldorf la tabla del 1, como todas las demás, puede continuarse luego del 1x10 Cada vez que el hilo pasa nuevamente por el 0, para obtener el producto correspondiente se añade una unidad al valor de la decena. Este ejercicio finalizó con el pegado de la fotocopia de un decágono en el que los estudiantes fueron marcando los resultados en los ángulos interiores del mismo.

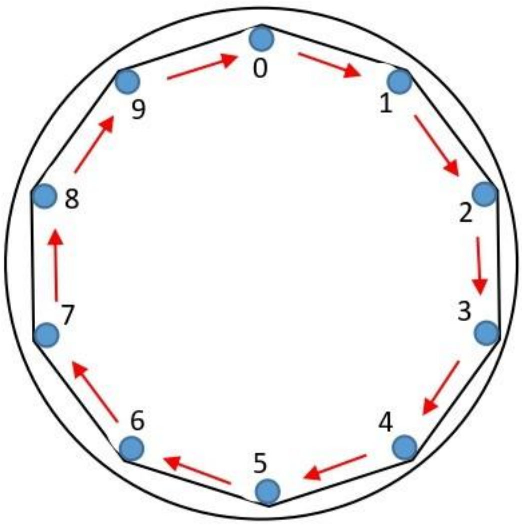


Figura 4: Disco de madera con los productos de la tabla del 1. El hilo recorre los números desde el cero hasta completar una vuelta.

Tabla del 2

Con el disco en la misma posición anterior realizamos el recorrido con el hilo pasando por detrás de las chinches tipo galera que tienen los números correspondientes a los productos de la tabla del 2. La figura que se forma es un pentágono.

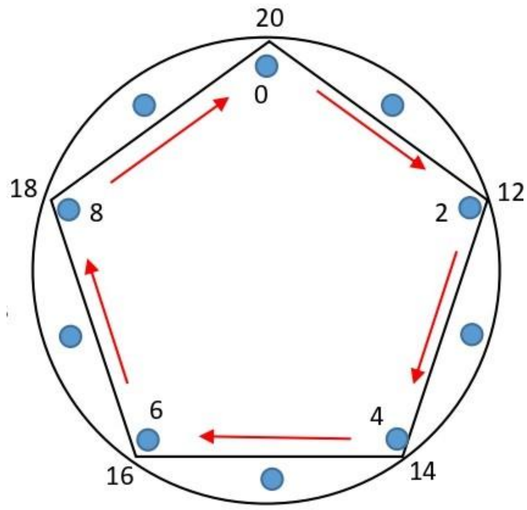


Figura 5. Productos de la tabla del 2.

El hilo recorre los números desde el cero, pasando por el 2, 4, 6 y 8. Cuando vuelve a pasar por el cero se lo considera como 10 y realiza un nuevo recorrido. Luego se considera al 2 como 12, al 4 como 14, al 6 como 16, al 8 como 18 y al cero como 20.

Tabla del 3

Con el disco en la misma posición anterior realizamos el recorrido con el hilo pasando por detrás de las chinches tipo galera que tienen los números correspondientes a los productos de la tabla del 3. La figura que se forma es una estrella de diez puntas.

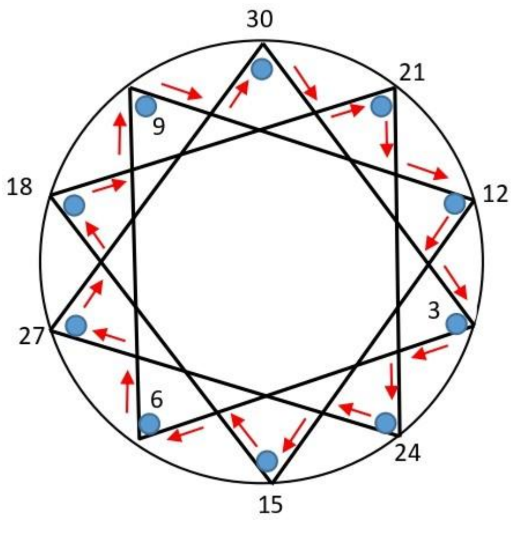


Figura 6. Productos de la tabla del 3

El hilo recorre los números desde el cero, pasando por el 3, 6 y 9. Luego pasa por el 2 que se cuenta como 12. Continúa por el 5 que es el 15, el 8 es el 18, 1 es el 21, el 4 es el 24, el 7 es el 27 y el 0 es el 30.

Tabla del 4

Con el disco en la misma posición anterior realizamos el recorrido con el hilo pasando por detrás de las chinches tipo galera que tienen los números correspondientes a los productos de la tabla del 4. La figura que se forma es una estrella de cinco

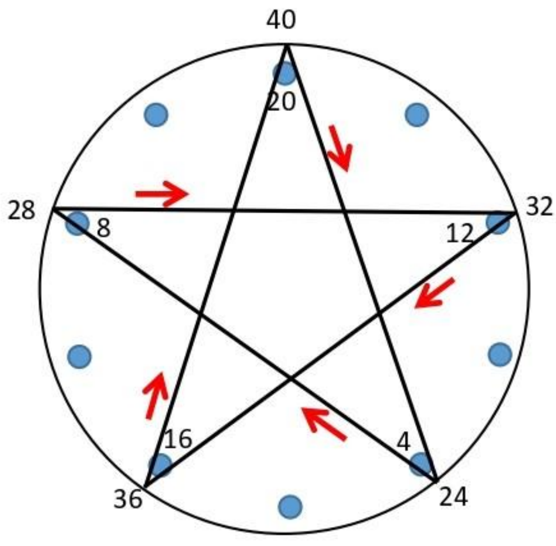


Figura 7. Productos de la tabla del 4.

El hilo recorre los números desde el cero, pasando por el 4 y el 8. Luego pasa por el 2 que se cuenta como 12. Continúa por el 6 que es el 16, el 0 es el 20, 4 esta vez es el 24, el 8 pasa a ser el 28, el 2 es el 32, el 6 es el 36 y el 0 es el 40.

Tabla del 5

Con el disco en la misma posición anterior realizamos el recorrido con el hilo pasando por detrás de las chinches tipo galera que tienen los números correspondientes a los productos de la tabla del 5. La figura que se forma es una línea recta vertical.

El hilo recorre los números desde el 0 hasta el 5 y vuelve en forma vertical.

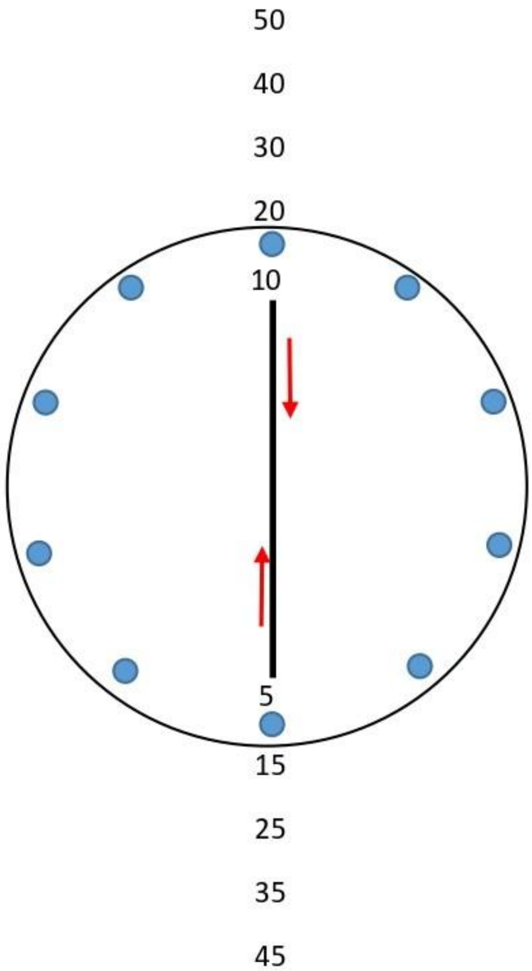


Figura 8. Productos de la tabla del 5.

Tablas del 6, 7, 8, 9, 10

Las cinco tablas restantes que completan las diez tablas que se propone en la Tabla Pitagórica tienen construcciones similares a las cinco antes desarrolladas. En el caso de la tabla del 6 el recorrido del hilo, que siempre parte desde el cero, en vez de comenzar por el 4 como lo hace en la tabla del 4, se dirige hacia el 6, luego al 2 (que sería el 12), después al 8 (que sería el 18), a continuación al 4 (que es el 24) y completa la forma de estrella arribando en el 0 (que sería el 30). Para marcar los productos 36, 42, 48, 54 y 60 se debe formar una nueva estrella de cinco puntas repitiéndose el mismo recorrido anterior. A diferencia de la Tabla de Pitágoras que puede estar representada en un cuadrado de papel de 10x10 sin margen para continuarla, el Disco de Waldorf (Carlgren, 1989) de la denominada Pedagogía Waldorf, correspondiente al modelo de escuelas homónimas -cuya primera sede tuvo lugar en Stuttgart, Alemania, en 1919, fundada por Rudolf Steiner- permite seguir agregando resultados con el recorrido del hilo. Si quisiéramos continuar la tabla del 6 bastaría con desplazarnos hasta el 6 (que sería el 66), luego al 2 (que sería el 72), después al 8 (que sería el 78), a continuación al 4 (que sería el 84) y finalmente al 0 (que sería el 90, producto de multiplicar 6x15). Podemos deducir que la tabla del 7 describe la misma figura que la tabla del 3, sólo que en sentido contrario, la tabla del 8 es igual a la del 2 (en sentido antihorario), la tabla del 9 se construye como la del 1 con la lógica anterior y, finalmente, la tabla del 10 se realiza envolviendo el hilo en la chinche tipo galera que se encuentra en el 0 pues todos sus productos son números terminados en cero.

Por último, el Mapa de Tesla

Sobre el cierre del año (el Disco de Waldorf fue en el mes de junio) presentamos el Mapa de Tesla (Machaca, 2019) con la intención de problematizar una vez más las representaciones y organización de múltiplos de un número que pueden obturar, en algunos casos, la posibilidad de pensar otros modos. Citamos por caso el ejemplo de Bautista, un estudiante de tercer grado que ante la consigna de marcar los productos de la tabla del 2 en el Mapa de Tesla se limitó a hacerlo hasta el número 20 e indicó que había terminado el trabajo, siendo que restaban dos tercios de números pares por marcar. Quizás la Tabla de Pitágoras, que Bautista conocía a la perfección, le impidió ver que las mismas son infinitas al igual que los números naturales, y que la tabla del 2 no termina en la multiplicación 2x10. Debido a la complejidad que entendimos ofrecía dicho mapa y en función de los fines didácticos que perseguimos, seleccionamos para trabajar en el aula una copia reducida del mismo que tenía al número 60 como el mayor múltiplo. Ese modelo nos sirvió para diseñar los Mapas de Tesla que las/os estudiantes completaron y pegaron en sus cuadernos. Los presentamos a continuación.

Los vértices del hexágono regular indican los múltiplos de 2. La tabla del 10 también respeta la forma hexagonal

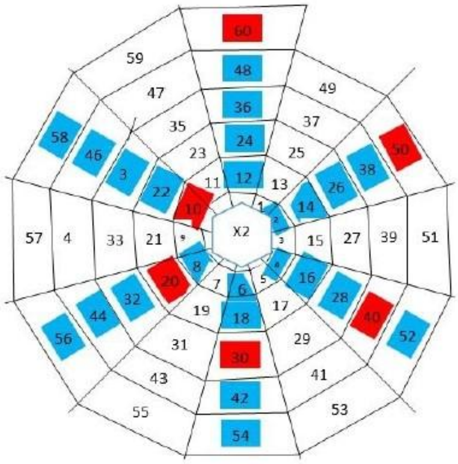


Figura 9. Tablas del 2 y del 10.

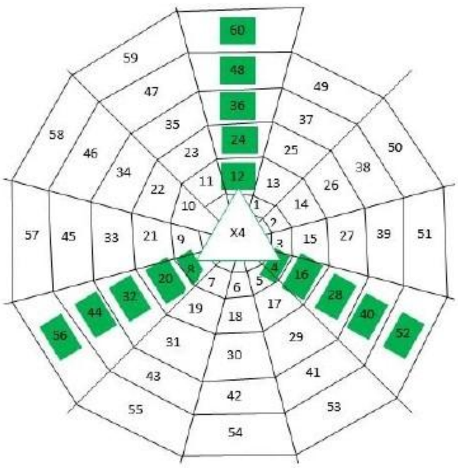


Figura 10. Tabla del 4.

Por ser 4 divisor de 8 y de 12, los vértices del triángulo señalan los múltiplos de estos tres números.

Como 3 es divisor de 6, 9 y 12, los vértices del cuadrado señalan los múltiplos de estos cuatro números.

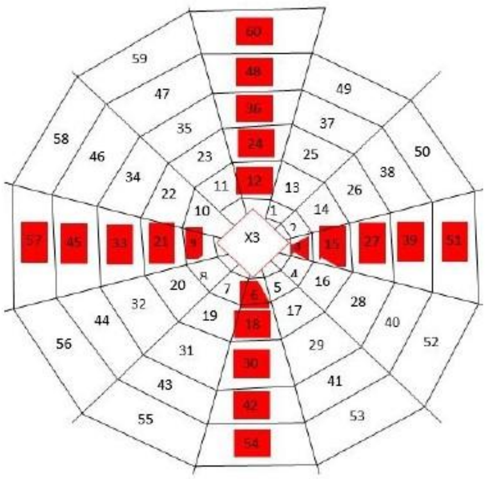


Figura 11. Tabla del 3.

Para seguir pensando

Realizar esta propuesta de enseñanza nos llevó a pensar en nuestras representaciones, en nuestras matrices que influyen en nuestro trabajo diario y permean el aprendizaje de las/os estudiantes que tenemos a cargo. La pregunta por el sentido de las tablas de multiplicar nos llevó a buscar otras estrategias que enriquecieron nuestra perspectiva y modificaron nuestras prácticas.

Nuestra intención, con este proyecto no fue la memorización de las tablas de multiplicar sino entender su funcionamiento y propiciar otras relaciones que subyacen en el entramado de su construcción. A partir de aquí nos proponemos interpelarnos para repensar nuestras prácticas y reformularnos el sentido de enseñar matemática en el primer ciclo de la escuela primaria.

Referencias bibliográficas

Carlgren, F. (1989). *Pedagogía Waldorf. Una educación hacia la libertad. La pedagogía de Rudolf Steiner*. Recuperado de https://docenteslibresmdq.files.wordpress.com/2013/12/pedagogia_waldorf_calgren.pdf

Machaca, R. (10 de julio de 2019). Nicola Tesla; conoce su mapa de multiplicación. *Azulweb*. Recuperado de https://www.azulweb.net/nikola-tesla-conoce-su-mapa-de-multiplicacion/

Martineau, J. (Ed.) (2014). *Quadrivium. Las cuatro artes liberales clásicas: aritmética, geometría, música y astronomía*. Madrid, España: Librero.

Paenza, A. (2015). *Matemática siento por ciento. Cuente conmigo.* Buenos Aires, Argentina: Editorial La Página.

Universidad Nacional del Litoral (2006). *Diseño Curricular de la Escuela Primaria de la Universidad Nacional del Litoral.* Resolución Honorable Consejo Superior UNL Nº272/06.

Zilberman, G., Castro, A. y Chara, S. (2006). *Matemática 3. Serie Cuadernos para el Aula. Primer ciclo. EGB/Nivel Primario.* Buenos Aires, Argentina: Gráfica Printer S.A.

Eje 2
Educación matemática en el nivel secundario

Análisis de la organización matemática estudiada en torno a la geometría plana en la escuela secundaria: estudio de un caso

María de la Trinidad Quijano

mquijano@unrn.edu.ar

Universidad Nacional de Río Negro. Universidad Nacional del Comahue. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología

Ana Rosa Corica

acorica@exa.unicen.edu.ar

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de la geometría en la escuela secundaria. Recientes investigaciones manifiestan la pérdida de presencia de la geometría en el aula de matemática en este nivel y su estudio con poco sentido. Con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco referencial, se presenta un estudio de caso, en que se caracteriza la organización matemática estudiada en relación a la geometría plana. Mediante la descripción y el análisis de carpetas de estudiantes de tercer año de una escuela secundaria de la ciudad de San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro, Argentina, se reconstruyó el saber que se estudió en el aula, y las decisiones matemáticas y didácticas que el docente realizó para el estudio de la geometría plana. Particularmente, se centra la atención en describir los componentes praxeológicos de las tareas que se propusieron estudiar. Los principales resultados señalan que el estudio de la geometría plana está vinculado a otras áreas de la matemática, como el álgebra o la aritmética. Además, las tareas presentes están encerradas en la matemática y son resueltas a través de una única técnica, siendo el entorno tecnológico-teórico presentado como un saber técnico para resolver problemas y no como elemento que justifica el hacer de la tarea.

Introducción

Este reporte de investigación forma parte de una investigación más amplia que se ubica en la problemática del estudio de la geometría en la escuela secundaria. La geometría favorece el trabajo propio de la actividad matemática así como en otras ciencias, permite aumentar el conocimiento del espacio y es una fuente de modelos de las situaciones problemáticas de la vida cotidiana; promueve en los estudiantes la visualización, la comunicación, el pensamiento crítico, la intuición y el razonamiento inductivo y deductivo, entre otros. Es evidente su potencialidad en diferentes campos de aplicación (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006; Barrantes y Balletbo, 2012, Barrantes, Balletbo y Fernandez, 2014; Bressan, Bogisic y Crego, 2000). Sin embargo, pese a la presencia de la misma en los distintos diseños curriculares actuales de escuela secundaria, diversos investigadores ponen de manifiesto la pérdida de presencia de la geometría en el aula de matemática y el estudio con poco sentido de lo que se propone enseñar (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006; Gascón, 2003; Itzcovich, 2005; Olivero, Bosch y Gascón, 2017; Rojas y Sierra, 2018). Entre las razones de la pérdida de presencia de la geometría, tanto en la escuela como en la formación docente, Itzcovich (2005) señala la dificultad de los docentes en encontrar problemas que representen verdaderos desafíos; la poca claridad en el sentido que adquieren los conocimientos geométricos en los diferentes diseños curriculares; la decisión docente de dejar de lado el tema por falta de tiempo, priorizando otros como álgebra, aritmética o funciones.

Este trabajo forma parte de una investigación en la que uno de sus objetivos es caracterizar las organizaciones matemáticas en torno a la geometría plana que se estudian en la escuela secundaria de la provincia de Río Negro, Argentina. Para ello, se seleccionaron cinco docentes que se desempeñan en los primeros cuatros años de escuela secundaria, de tres establecimientos educativos de la ciudad de San Carlos de Bariloche (uno de gestión pública, uno de gestión social y uno de gestión privada). En esta oportunidad, se presenta un estudio de caso, adoptando como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2013a, 2017). Particularmente se describe y analiza el material provisto por uno de esos docentes, que se desempeña en tercer año de escuela secundaria de gestión social. Se propone reconstruir el saber que se estudió en el aula, y conocer las decisiones matemáticas y didácticas que el docente realizó en cada institución para el estudio de la geometría plana.

Marco teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2013a, 2017), considera como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en las instituciones de enseñanza como saber enseñado.

En la TAD se admite que toda actividad humana regularmente realizada puede ser descripta con un modelo único, denominado *praxeología*, que consta de dos niveles: i) El nivel de la *praxis* o del *saber hacer* que engloba, por un lado, un cierto *tipo de tareas* y cuestiones que se estudian, y por otro, las *técnicas* para resolverlos; ii) El nivel del *logos* o del *saber*, que reúne los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, esto es, la *tecnología*. Un segundo nivel de descripción, explicación, justificación (esto es, el nivel *tecnología de la tecnología*) se denomina *teoría*.

Los cuatro elementos mencionados (tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría) son imprescindibles para construir una praxeología. A su vez, Chevallard (1999) también propone la noción de *género de tareas*, la cual hace referencia a una acción sin especificar el objeto al que se aplica y existe bajo diferentes tipos de tareas. Por ejemplo, *calcular* es un género de tareas, mientras que *calcular la distancia entre dos puntos del plano euclidiano* es un tipo de tarea.

En el proceso de estudio de una noción matemática es necesario considerar la *praxeología* u *organización matemática* (*OM*), que es la *realidad matemática* que puede construirse en una clase donde se estudia el tema; y la *praxeología u organización didáctica,* que es la *manera* en que puede ser construida esa realidad matemática. Debido a la naturaleza de este trabajo, el centro está puesto en describir las *OM* en torno a la geometría plana que se propone estudiar en el material provisto por el docente.

Metodología

En este trabajo se propone una investigación cualitativa de tipo exploratoria, descriptiva e interpretativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), empleando técnicas del análisis documental (Pinto Molina, 1992). Se propone un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1999), constituyendo el caso la carpeta de estudiantes de un curso de tercer año de una escuela secundaria de la ciudad de San

Carlos de Bariloche proporcionada por un profesor que facilitó el material para el desarrollo de la investigación. El estudio se centra en la reconstrucción de la Organización Matemática Estudiada (OME) a partir del estudio de carpetas de dos estudiantes del curso seleccionado, las que fueron elegidas intencionalmente por el profesor, de acuerdo al presentismo de los estudiantes durante el año escolar, responsabilidad y compromiso con el estudio en la materia. Se hará mención de una carpeta, siendo que se considera que una complementa a la otra y en conjunto permiten reconstruir la OME en el curso al que refieren.

En correspondencia con el referencial teórico adoptado, el análisis centra la atención en los componentes praxeológicos. En primer lugar, se atiende a aspectos generales del material, tales como estructura, organización, cantidad de tareas de geometría plana, redacción de tareas, etc. Luego se centra la atención en el análisis de las tareas que fueron estudiadas según el material de estudio. Se identifican, por una parte, las nociones que constituyen el entorno tecnológico-teórico (i), y por otra los elementos que conforman el entorno práctico-técnico, es decir, los géneros de tareas (Gi) y tipos de tareas (Ti) que se asocian a cada una de las tareas presentes en los materiales. Para cada Ti se expone un ejemplar de tarea, en el que se explicita la técnica presente. El instrumento de análisis que se confeccionó para tal fin es una tabla como la que se presenta a continuación (Figura 1).

Género de tareas	Tipo de tareas	Número de tarea	Ejemplar de tarea	Técnicas empleadas	Entorno tecnológico- teórico

Figura 1. Tabla para el análisis de tareas

Características del Diseño curricular de educación secundaria de la provincia de Río Negro

En el diseño curricular de educación secundaria de la provincia de Río Negro (DC) se proponen estudiar en tercer año, los siguientes saberes (Figura 2) en torno a la geometría plana (Ministerio de Educación y de Derechos Humanos de Río Negro, 2017, pp. 138-139):

1) El análisis de las condiciones necesarias y suficientes para la construcción de figuras semejantes a partir de distintas informaciones (identificando las condiciones necesarias y suficientes de semejanza de triángulos y recurriendo al teorema de Thales en aquellas situa-

ciones que lo requieran)
2) La exploración y análisis de las relaciones entre perímetros y entre áreas de figuras semejantes.
3) El uso del Teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas (sen, cos y tg) en la resolución de problemas con triángulos rectángulos y con mediciones indirectas de distancias y de ángulos.
4) El análisis de las razones trigonométricas y el uso de la relación pitágorica para resolver problemas con triángulos rectángulos.

Figura 2. Tabla para el análisis de tareas

De manera sintética se puede destacar que la metodología propuesta para el estudio de la geometría plana es la resolución de problemas, tanto de la vida real, como de otras disciplinas y de la propia Matemática. Se explicitan propósitos vinculados al trabajo desde diferentes marcos (aritmético, geométrico, algebraico) se promueve un quehacer heurístico y se destaca el uso de recursos tecnológicos en el aula.

Descripción de la Organización Matemática Estudiada

El material que se analiza corresponde a tercer año de una escuela de gestión social. La organización general de la carpeta es la siguiente: primero se presenta el entorno tecnológico-teórico, como un saber acabado e incuestionable (definiciones, teoremas, propiedades) y luego ejemplares de tareas propuestas para la aplicación de técnicas que requieren exclusivamente del entorno tecnológico-teórico que los antecede.

Las nociones de geometría plana a las que refieren las tareas indicadas en el material son: teorema de Pitágoras, perímetro de un cuadrado, área de un rectángulo, teorema de Thales y razones trigonométricas de un ángulo agudo.

En la carpeta se hacen explícitos dos entornos tecnológico-teóricos. Por un lado, el teorema de Thales (Figura 3), que también es llamado teorema de las proporciones. El enunciado se realiza en forma coloquial, junto con un ejemplo gráfico, en el que se representan tres rectas paralelas (esto no se aclara en la representación) y dos rectas transversales, y las proporciones correspondientes que se forman en dichas rectas. No se observan indicios de demostración de dicho teorema, o de algún tipo de aclaración al respecto.

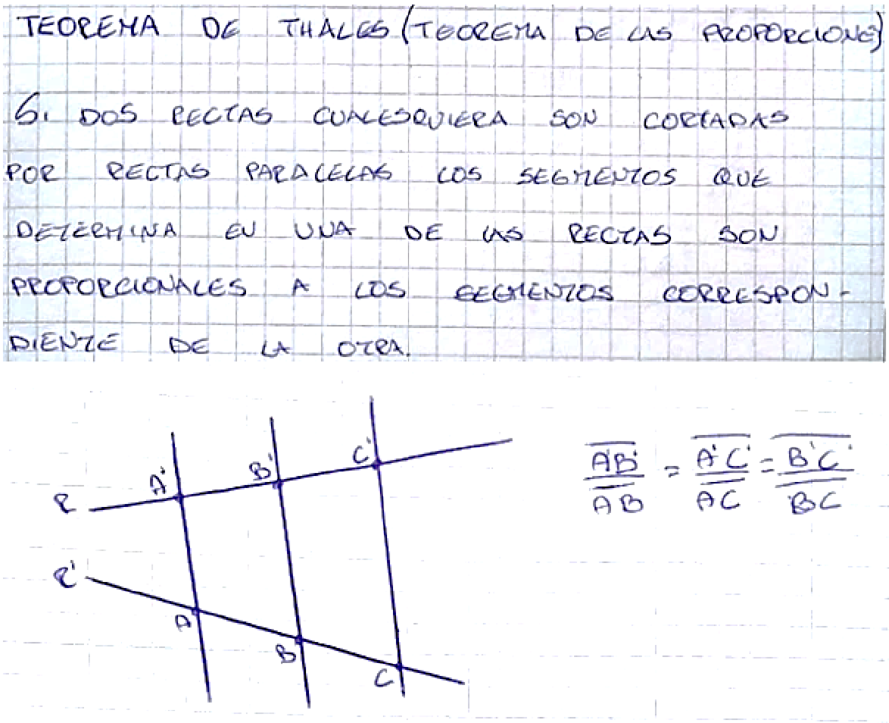


Figura 3. Teorema de Thales (teorema de las proporciones)

Por otro lado, se explicita la definición de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo (Figura 4), que se menciona como "fórmulas trigonométricas". Se observa el uso de una representación de un triángulo rectángulo en el que se diferencian los catetos respecto a uno de los ángulos agudos señalados, y la hipotenusa.

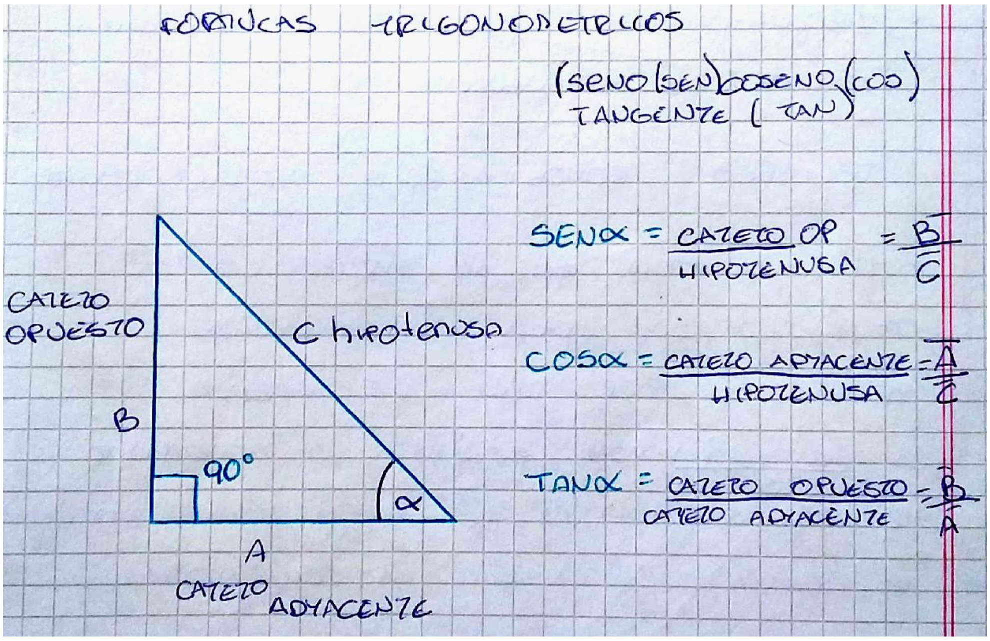


Figura 4. Razones trigonométricas

Para resolver las tareas propuestas se requiere, además de los dos identificados, otros elementos tecnológicos y que no se hacen explícitos en la carpeta. Esto se deba probablemente a que no son considerados como objetos directos de estudio al momento de proponer dichas tareas. Los elementos tecnológicos identificados para el hacer de las técnicas que surgen al resolver las tareas presentes en la carpeta son doce: 1: *Teorema de Thales;* 2*: Razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo;* 3: *Teorema de Pitágoras;* 4: *Propiedades de triángulos;* 5: *Propiedad uniforme de la igualdad;* 6: *Propiedades de operaciones en R;* 7: *Equivalencia unidades de longitud;* 8: *Propiedad de proporciones*; 9: *Definición de perímetro;* 10: *Perímetro de un cuadrado;* 11: *Definición de área;* 12: *Área de un rectángulo*

En el material se identificaron 19 tareas vinculadas a la geometría plana, que se intercalan en la presentación del entorno tecnológico-teórico y se refieren a los géneros de tareas: G1: *Calcular* y G2: *Verificar*. Se destaca que 18 tareas se identifican con el género *calcular* y solo una con el género *verificar*.

Los tipos de tareas y la cantidad de tareas que se identifican con cada tipo son:

T1: *Calcular la longitud de los lados de triángulos* (9 tareas); T2*: Calcular la longitud de segmentos de rectas* (3 tareas); T3*: Calcular ángulos interiores de triángulos* (2 tareas)*;* T4*: Calcular el perímetro de figuras* (1 tarea)*;* T5*: Calcular el área de figuras* (2 tareas)*;* T6*: Calcular razones trigonométricas* (1 tarea)*;* T7*: Verificar la hipótesis de un teorema* (1 tarea).

A continuación, a modo de ejemplo, se describen las técnicas empleadas y el entorno tecnológico-teórico inmediato necesario para el hacer de un ejemplar de tarea (Figura 5) del tipo T1: *Calcular la longitud de los lados de triángulos*, que se indica en la carpeta.

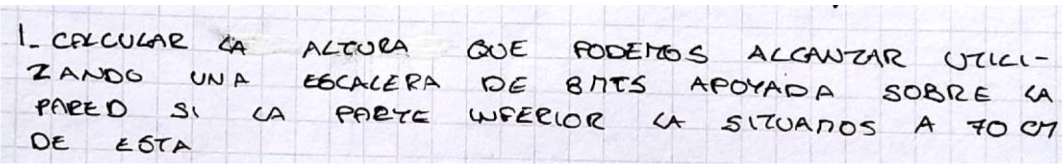

1_ CALCULAR LA ALTURA QUE PODEMOS ALCANZAR UTILIZANDO UNA ESCALERA DE 8MTS APOYADA SOBRE LA PARED SI LA PARTE INFERIOR LA SITUAMOS A 70 CM DE ESTA

Figura 5. Tarea de T_1

En la carpeta hay 6 tareas que comparten la técnica y el entorno tecnológico de este ejemplar. En líneas generales, la técnica empleada puede resumirse en: identificar la información proporcionada en la tarea y la incógnita a calcular; identificar, con la información proporcionada, el tipo de triángulo que se forma; establecer cuáles son los catetos e hipotenusa del triángulo; identificar los datos del problema en la ecuación $A^2=B^2+C^2$; operar y calcular la incógnita; y finalmente interpretar el resultado obtenido. El entorno tecnológico inmediato se resume en: teorema de Pitágoras (2), propiedad uniforme de la igualdad (5), propiedades de operaciones en R (6), equivalencia de unidades de longitud (7).

Análisis de la Organización Matemática Estudiada

Uno de los aspectos que se destaca de las tareas presentes en la carpeta es su representación gráfica como parte de la consigna, en las que se observa el uso de estereotipos (Moriena y Scaglia, 2003, Scaglia y Moriena, 2005; Barrantes, López y Fernández, 2014, 2015). Las figuras que se representan en todo el material refieren a triángulos y rectas paralelas cortadas por rectas transversales. En relación a triángulos rectángulos, en todos los casos se apoyan sobre uno de los catetos, de forma que ambos catetos son paralelos a los márgenes de las hojas de las carpetas (Figura 11). Asimismo, en ciertas representaciones de rectas paralelas, éstas también lo son a los márgenes de las hojas de las carpetas, tal como se puede observar en la siguiente tarea identificada con T2*: Calcular la longitud de segmentos de rectas* (Figura 6).

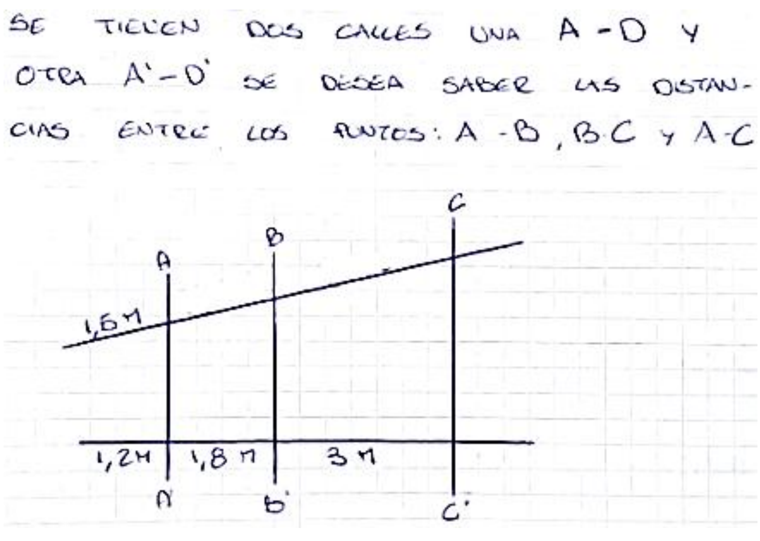


Figura 6. Tarea de T_2

Además se advierte que en algunos casos se obvian las unidades de medidas en los valores que se dan como datos en las figuras, tal como se puede apreciar en la tarea exhibida en la Figura 11. En estas representaciones también destacamos algunas imprecisiones. En particular, en la tarea que se identifica con T7*: Verificar la* *hipótesis de un teorema* se brinda la representación de un triángulo con la medida de sus ángulos interiores, pero no se condicen los datos numéricos con su representación. Según las medidas proporcionadas, el triángulo es acutángulo y la representación brindada es la de un triángulo obtusángulo (Figura 7).

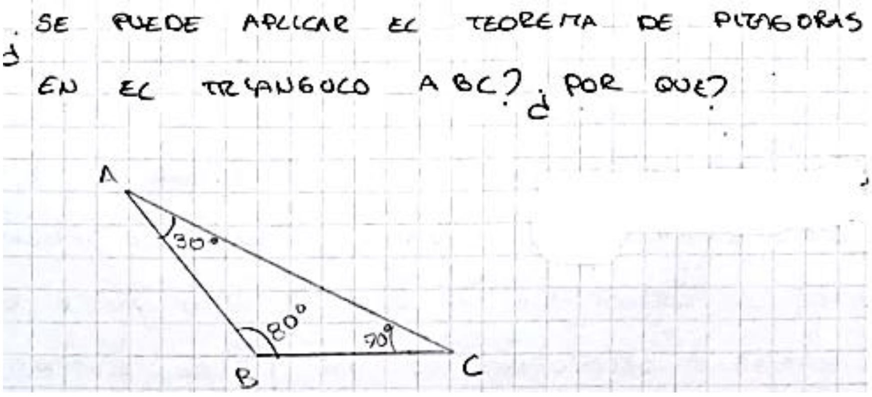


Figura 7. Tarea de T_7

Otro aspecto a considerar en el análisis se relaciona con la redacción de las consignas o enunciados de las tareas propuestas. Seleccionar o diseñar consignas para llevar al aula es una tarea inherente a la práctica docente a la hora de planificar las clases. Además de la claridad que deben poseer en relación a lo que se requiere, se necesita que “atiendan al contenido, que sean factibles de ser realizadas por nuestros estudiantes, que requieran conocimientos previos que nuestros alumnos dispongan, que promuevan un trabajo interesante para el estudiante, etc.” (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodriguez, 2016). En ciertas tareas del material analizado se observa la ausencia de datos o de condiciones iniciales en la consigna presentada. Esto podría indicar la presencia de una tarea “abierta”, es decir, una situación matemática o extramatemática donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano, para que sea el estudiante quien decida qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas (Fonseca, 2004). Sin embargo, dada las resoluciones que se manifiestan, este no sería el tipo de tarea pensado. Por ejemplo, en la tarea que se exhibe en la Figura 5, falta indicar que las rectas (o las “calles”) A, B y C son paralelas. Sin este dato, no se puede aplicar el teorema de Thales, y se requiere de dicho entorno tecnológico-teórico para ser resuelta. Esto mismo ocurre con otras tres tareas propuestas. Así también, hay seis tareas, una de las cuales se presenta en la Figura 11, en las que la redacción estaría dada de manera implícita, es decir, se representa la figura que conforma la tarea, se explicitan los datos y, con una letra (en todos los casos se utiliza la letra “x”), se da a entender que el valor de lo que ella representa es lo que se requiere calcular.

El tipo de tareas que se proponen estudiar están encerradas en la matemática. Se vincula el álgebra con la geometría en ellas, pero no invitan a alguna indagación y vínculo con otras disciplinas. Sólo al dar inicio al estudio de la trigonometría, se realiza una vinculación de su aplicación en la vida cotidiana, dando respuesta a la pregunta ¿Para qué sirve?, tal como se indica en la siguiente figura (Figura 8):

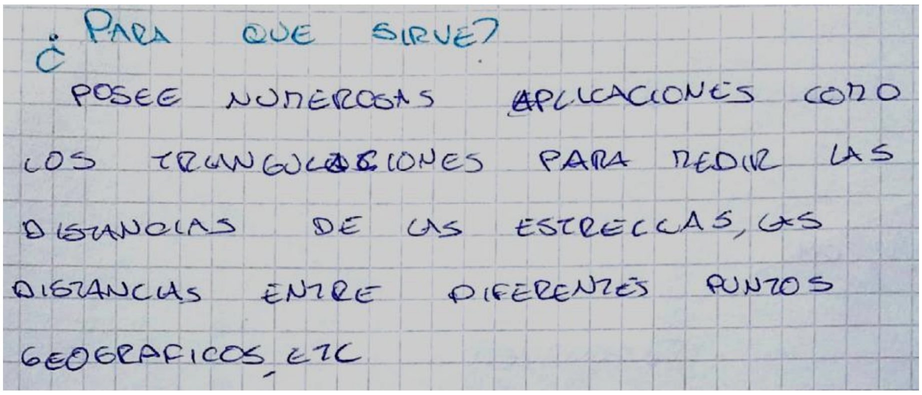


Figura 8. Aplicaciones de la trigonometría

La presencia de TICs en la enseñanza de la geometría plana que se evidencia en este material se vincula al uso de la calculadora. En la carpeta se encuentra un recuadro con la manera de hallar ángulos, dada una razón trigonométrica. Este modo de hacer se presenta en el siguiente fragmento (Figura 9), y está en correspondencia con las dos tareas vinculadas a T3*: Calcular ángulos interiores de triángulos*.

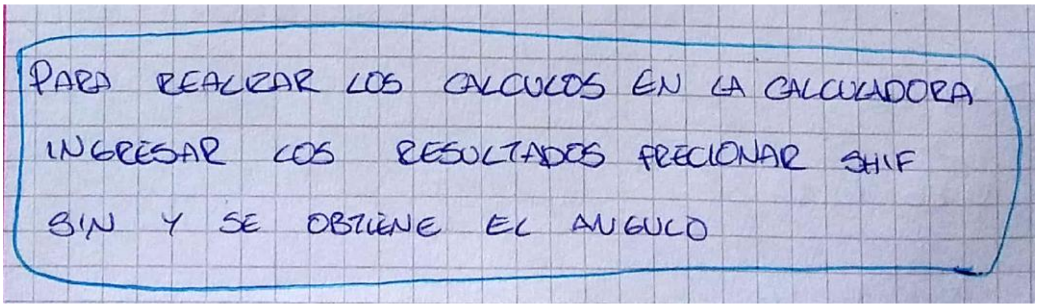


Figura 9. Uso de la calculadora

Como se mencionó anteriormente, las tareas propuestas en el material analizado responden a dos géneros de tareas, G1: *Calcular* y G1: *Verificar*. Respecto a esta última, sólo hay una tarea propuesta (Figura 7), y hace referencia a la posibilidad (o no) de aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo dado. El triángulo es acutángulo, por lo que no se podría aplicar dicho teorema. En la tarea sólo se propone esta verificación, pero no se hace mención del para qué se debería aplicar o cuál sería la importancia de poder aplicarlo o no. La tarea queda relegada a la distinción del tipo de triángulo dado, para constatar la posibilidad de aplicación del teorema o no.

El tipo de tareas T1: *Calcular la longitud de los lados de triángulos* se encuentra representado por nueve tareas, de las cuales ocho corresponden a triángulos rectángulos y una involucra triángulos no rectángulos y semejantes. De las que implican triángulos rectángulos, seis de ellas se resuelven con la misma técnica. Y de ellas, cinco (de las cuales una se expone en la Figura 5), están planteadas mediante un contexto que se vincula con situaciones de la vida cotidiana, pero en realidad son un simple contexto de un problema matemático (Chevallard, 2013b). La tarea que se presenta en la Figura 10, en cambio, está planteada desde un contexto matemático puro, aunque en líneas generales, requiere la misma técnica que las cinco tareas anteriores, incorporando al entorno tecnológico-teórico 4: *Propiedades de triángulos,* particularmente del triángulo isósceles:

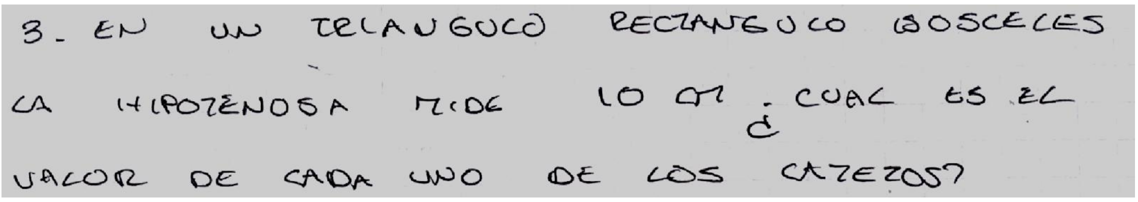

3. EN UN TRIANGULO RECTANGULO ISOSCELES LA HIPOTENUSA MIDE 10 cm ¿CUAL ES EL VALOR DE CADA UNO DE LOS CATETOS?

Figura 10. Tarea de T_1 en contexto matemático

Hay dos tareas vinculadas a T1 que también involucran triángulos rectángulos, pero difieren de las anteriores en cuanto a la técnica y al entorno tecnológico que las justifica. Ambas están planteadas desde un contexto matemático y se requiere emplear 2: *Razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo* para resolverlas. Cabe destacar que en ambas tareas, se resuelve todo el triángulo rectángulo dado, es decir, se hallan las medidas de todos sus lados y ángulos, aunque se destaca el valor de lo pedido (lo mencionado como “x”) por sobre el resto, por lo que se interpreta que la tarea hacía referencia a hallar ese valor. Si bien el entorno tecnológico es el mismo para ambas tareas, las mismas están resueltas mediante dos técnicas diferentes. En una de ellas se utiliza la razón trigonométrica que inmediatamente lleva a calcular la incógnita. En la otra, en cambio, se calcula primero un lado no dado del triángulo mediante una razón trigonométrica para luego, utilizando ese resultado, hallar el lado faltante mediante otra razón trigonométrica. Es decir, se calculan valores intermedios que luego son usados como datos, haciendo que esta técnica no sea tan fiable ni económica como la primera mencionada.

El tipo de tareas T2: *Calcular la longitud de segmentos de rectas*, queda representado por tres tareas similares (una de ellas se muestra en la Figura 6) que comparten la misma técnica y el mismo entorno tecnológico (1, 8, 6). La tarea exhibida en la Figura 6 es la única que se aproxima a una situación de la realidad, aunque es una "realidad de opereta" Chevallard (2013b, p. 46) ya que es un contexto de un problema que en definitiva es matemático, tal como ocurre con otras tareas ya mencionadas.

Por otro lado, al tipo de tarea T6: *Calcular razones trigonométricas*, se le asocia una única tarea en la que se dan como datos las medidas de los tres lados de un triángulo rectángulo y se requiere que se calculen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de uno de sus ángulos agudos. Esta tarea le sigue inmediatamente a la presentación del entorno tecnológico 2: *Razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo*.

El tipo de tareas T3: *Calcular ángulos interiores de triángulos* comprende dos tareas en las que se requiere hallar algún ángulo interior de un triángulo rectángulo, dándose como dato dos lados del triángulo. En la Figura 11 se indica una de esas tareas.

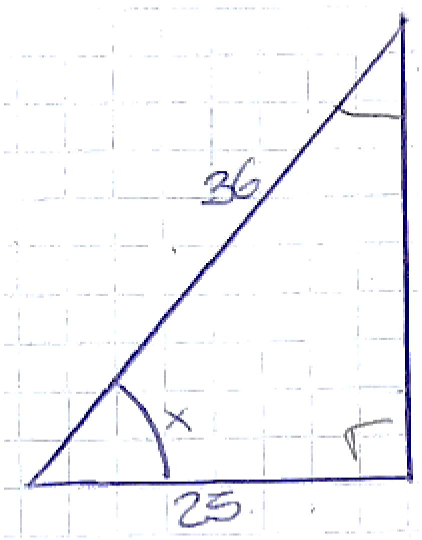


Figura 11. Tarea de T_3

Si bien este tipo de tareas puede resolverse mediante diferentes técnicas y entornos tecnológicos-teóricos, esto no se refleja en el material analizado. Sólo se resuelve a través de una técnica, sin haber indicios sobre la posibilidad de hacerlo diferente.

El tipo de tareas T4: *Calcular el perímetro de figuras* al que se asocia una única tarea, y el tipo de tareas T5: *Calcular el área de figuras* cuyas tareas asociadas son dos, están propuestas de manera consecutiva, bajo el título "Resolución de situaciones problemáticas". No hay indicios de haberse estudiado el perímetro y área en tareas previas a estas, y se presentan luego de haberse estudiado una tarea que se resuelve con el teorema de Pitágoras. En estas tareas, el estudiante debe, primero, reconocer la figura que se forma con los datos que se brindan (las figuras son, respectivamente, un cuadrado y dos rectángulos), brindándose las medidas de dos de sus lados. Luego se debe reconocer de qué manera se relaciona la incógnita en cada caso con el perímetro o el área de las figuras, operar e interpretar el resultado. En la Figura 12 se exhibe un ejemplo de esas tareas

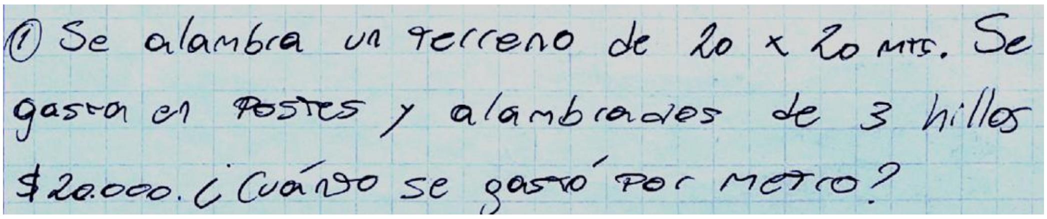

① Se alambra un terreno de 20 x 20 mts. Se gasta en postes y alambrados de 3 hillos $20.000. ¿Cuánto se gastó por metro?

Figura 12. Tarea de T_4

Conclusiones

Desde el punto de vista de los saberes propuestos en el DC para el tercer año año de secundaria, la organización matemática estudiada en torno a la geometría plana que se infiere del análisis realizado resulta reducida. De los cuatro saberes propuestos para estudiar en el DC el 3 y el 4 estarían parcialmente contemplados en esta carpeta. En relación al 1 y 2, si bien en el material analizado se estudia el entorno tecnológico del teorema de Thales, las tareas propuestas no conducen a estudiar los saberes que se señalan en estos puntos, es decir, no se estudia la semejanza de figuras. Hay una tarea en la que se presentan dos triángulos semejantes, pero no se mencionan como tales, ni se estudian sus propiedades o construcción.

Las tareas estudiadas del material analizado se subtienden a dos géneros de tareas, y entre ellos, *calcular* es el que más se destaca. En este sentido, el estudio de la geometría plana pareciera estar vinculado a otras áreas de la matemática, particularmente al álgebra y a la aritmética. Estas implican resoluciones vinculadas a la aplicación de procedimientos, fórmulas y técnicas conocidas, o a la utilización de una propiedad o de una definición matemática que precede inmediatamente a la tarea en cuestión. Es decir, las tareas son resueltas mediante una única técnica inmersa en un entorno tecnológico-teórico que, tal como está planteado, se pensaría como técnicas para resolver problemas más que medio que justifica el hacer de la tarea.

El quehacer de los estudiantes es limitado con las tareas propuestas, ya que no invitan a la exploración, a buscar contraejemplos y regularidades, a exponer conjeturas, argumentar, etc.

En este material hay tareas propuestas en contextos matemáticos y no matemáticos, sin embargo, las situaciones que vinculan datos y eventos reales resultan situaciones pseudo reales (Rojas y Sierra, 2018), es decir, no constituyen verdaderos problemas, ya que en la misma carpeta antes de cada tarea se indican las nociones geométricas necesarias para su hacer.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *39*(1), 1-9.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, *8*(1), 25.

Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M. (2014). Enseñar geometría en secundaria. En J. Asenjo, O. Macías y J.C. Toscano (Eds.). *Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (pp. 1-14).* Buenos Aires, Argentina: OEI.

Barrantes, M., López, M y Fernández M. Á. (2014). Las representaciones geométricas en los libros de textos utilizados en la Comunidad Autónoma de Extremadura. *Campo abierto: Revista de educación*, *33*(1), 97-116.

Barrantes, M., López, M., y Fernández, M. Á. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *9*(2), 107-127.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: UNGS.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar*. Buenos Aires, Argentina: Noveduc Libros.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013a). Éléments de didactique du développement durable. Leçon 3. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013b). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, *20*(1), 159-169.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, Vigo.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I: desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma,* 44, 25-38.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones* (Vol. 3). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Ministerio de Educación y Derechos Humanos de Río Negro (2017). *Diseño Curricular Escuela Secundaria*. Río Negro, Argentina. Recuperado de: http://unterseccionalroca.org.ar/imagenes/documentos/leg/Resolucion%20945-17%20%28ANEXO%20I-%20DC%20ESRN%29.pdf

Moriena, S., y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, *15*(1), 5-19.

Olivero, F., Bosch, M. y Gascón, J. (2017). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. En G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage, T. Sierra (Eds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 875-898). Recuperado de https://citad4.sciencesconf.org

Pinto Molina, M. (1992). *El resumen documental: principios y métodos*. Madrid, España: Pirámide.

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. En *VI congrès international de la TAD* (pp. 589 -596). Autrans, Francia.

Scaglia, S., y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación matemática*, *17*(3), 105-120.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (Segunda edición). Madrid, España: Ed. Morata.

Análisis didáctico de textos escolares del secundario sobre los objetos matemáticos aleatoriedad y probabilidad

MARIO ALVAREZ
mariogalvarez@gmail.com
Facultad Regional Concordia. Universidad Tecnológica Nacional
GABRIELA PILAR CABRERA
Universidad Nacional de Villa María
MARCEL POCHULU
Universidad Nacional de Villa María

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis didáctico de las tareas de enseñanza sobre aleatoriedad y probabilidad en textos escolares de Matemática del nivel secundario. Para la investigación se consideraron las herramientas teórico-metodológicas que propone el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS).
Metodológicamente se analizaron las tareas propuestas en siete textos escolares de matemática, referenciados como frecuentes por profesores del área. Para el análisis se estructuraron configuraciones epistémicas, compuestas por: el tipo de situación problema; los conceptos, propiedades, procedimientos tanto previos como emergentes y los argumentos y razonamientos necesarios para validar las soluciones posibles, como también el uso de términos, expresiones, notaciones, etc. Finalmente se realizó una valoración general de las propuestas de enseñanza a partir de los indicadores de idoneidad que proporciona el EOS.

Introducción

Una fuente primaria de consulta de los docentes para la preparación de las clases son los textos escolares. Por lo tanto, se constituyen como influyentes, en forma directa o indirecta, en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las instituciones escolares.

Según Font (2011), una de las competencias que debe tener el profesor de matemática es el análisis didáctico de secuencias de tareas, que promueva su diseño, su valoración y procesos de mejora. Por tareas se entienden las situaciones que el docente propone a los alumnos, sean indistintamente problemas (en su acepción más amplia del término), actividades de investigación, aplicación de algoritmos, rutinas de cálculos, etc. Estas tareas se constituyen en el punto de partida de la actividad para el desarrollo de la clase, de la cual se espera pueda producir algún aprendizaje.

El presente trabajo tuvo por objetivo realizar un análisis didáctico de las tareas y actividades que se encuentran en los textos escolares de nivel secundario de matemática sobre los objetos aleatoriedad y probabilidad, utilizando herramientas teóricas que devienen del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS), propuesto por Godino (2002) y colaboradores.

Encuadre teórico y metodológico

Se analizaron 7 libros de textos escolares de matemática del nivel secundario, tomando como referencia los años donde aparece la temática de estudio. La selección se realizó como resultado de entrevistas informales realizadas a profesores del nivel secundario, pertenecientes a instituciones estatales y de gestión privada, de la ciudad de Concordia, Entre Ríos, Argentina.

Como herramientas teóricas se emplearon las que propone el EOS como marco teórico y metodológico dentro de la Didáctica de la Matemática propuesta por Godino (2000, 2002) y Godino, Batanero y Font (2007). En particular, se utilizaron los constructos de configuración epistémica y los indicadores de idoneidad didáctica de un proceso de estudio.

En las configuraciones epistémicas se articulan seis objetos matemáticos primarios: las situaciones problemáticas, los conceptos, las propiedades o proposiciones, los procedimientos, las argumentaciones y el lenguaje. Estas configuraciones son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, constituyendo los elementos del significado de un objeto matemático particular (desde una institución en este caso). En las configuraciones epistémicas, las situaciones problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática, y al mismo tiempo, motivan la aparición del conjunto de reglas. El lenguaje, en tanto, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos los entendemos como prácticas que aparecen para justificar el conjunto de reglas y están regulados por el uso del lenguaje que, por su parte, sirve de instrumento para la comunicación. De esta manera, el análisis de las configuraciones epistémicas da información acerca de la "anatomía" de las tareas que propone un texto matemático, lo que hace factible resaltar el valor contextual y funcional de los objetos que intervienen, permitiendo caracterizar textos de distintas épocas e incluso orientaciones epistemológicas y didácticas.

Para el estudio se confeccionó una configuración epistémica para cada libro. Para ello, fue necesario anticipar posibles desarrollos de los alumnos, con la finalidad de establecer conceptos, propiedades y procedimientos, tanto previos como emergentes, que están implicados en la tarea. El análisis se hizo teniendo presente los objetos primarios que intervienen en la situación problema, pero la síntesis final deviene de una mirada global de esta configuración epistémica.

También se usaron los indicadores de idoneidad didáctica que proporciona el EOS con el fin de tener una valoración de las tareas, según las seis facetas implicadas en los procesos de estudio matemático (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica). No obstante, por tratarse de tareas que están en un libro de texto, el estudio se centró en las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica. Se debe tener en cuenta que resulta poco viable valorar en forma completa las idoneidades mediacional y emocional, debido a que refieren al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y al grado de implicación de los estudiantes en el proceso de estudio.

Respecto a la idoneidad interaccional, referida al grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje, se consideró si la propuesta promueve el trabajo colaborativo o implique argumentar sobre el análisis realizado por otro compañero (para estos casos se asignó una idoneidad interaccional alta).

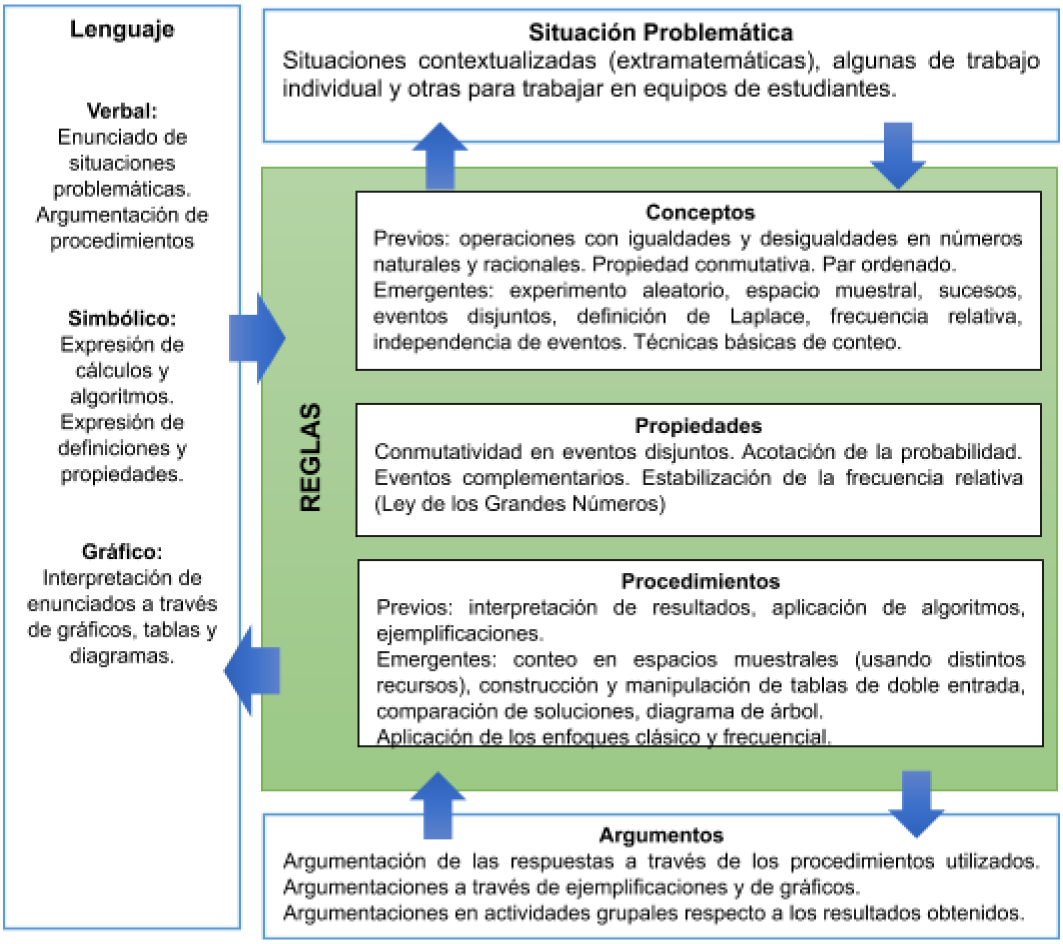
Análisis de resultados

Para preservar la privacidad de los autores y de las correspondientes editoriales, no se mencionan los mismos en el desarrollo del análisis, y se alude a ellos por número (del 1 al 7). Según las características generales de las secuencias didácticas, de sus estructuras y los enfoques utilizados, se clasificaron los textos en tres grupos:

GRUPO 1: Los libros 5 y 6 pertenecen a este grupo y presentan una configuración epistémica similar, caracterizada por lo siguiente:

- Los temas se introducen con situaciones problemas contextualizadas, las cuales para resolverlas necesitan de conceptos, propiedades y procedimientos previos que deben poseer los estudiantes y motivan a que emerjan conceptos, propiedades y procedimientos necesarios para llegar a la solución de la misma.
- Desarrollo de la unidad didáctica mediante problemas contextualizados de afianzamiento o consolidación. Estos problemas contextualizados de afianzamiento o integradores son propuestos al final del tema.
- La configuración epistémica de estos textos muestra que se pone énfasis en la resolución de situaciones problemas como centro de la actividad matemática.
- Las tareas demandan de un lenguaje verbal, simbólico y gráfico según el tipo de situación.
- En muchas de las situaciones problemas propuestas se requiere de la argumentación, es decir, se deben justificar las respuestas en base a conceptos, propiedades o procedimientos aplicados previamente. El tipo de argumentación es inductivo. Esto se observa en actividades individuales, pero también grupales (por ejemplo, comparando los resultados entre uno y otros integrantes)
- La gestión de la clase que sugiere el texto lleva a que el profesor proponga situaciones problemas que los estudiantes han de intentar resolver. Luego, en el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas, se recuperan los conceptos involucrados en la unidad didáctica. Estos conceptos, a su vez, se relacionan y organizan para ser primero aplicados a ejercicios y después, utilizados en la resolución de problemas contextualizados más complejos.

En el Cuadro 1 se presenta la configuración epistémica de estos libros:

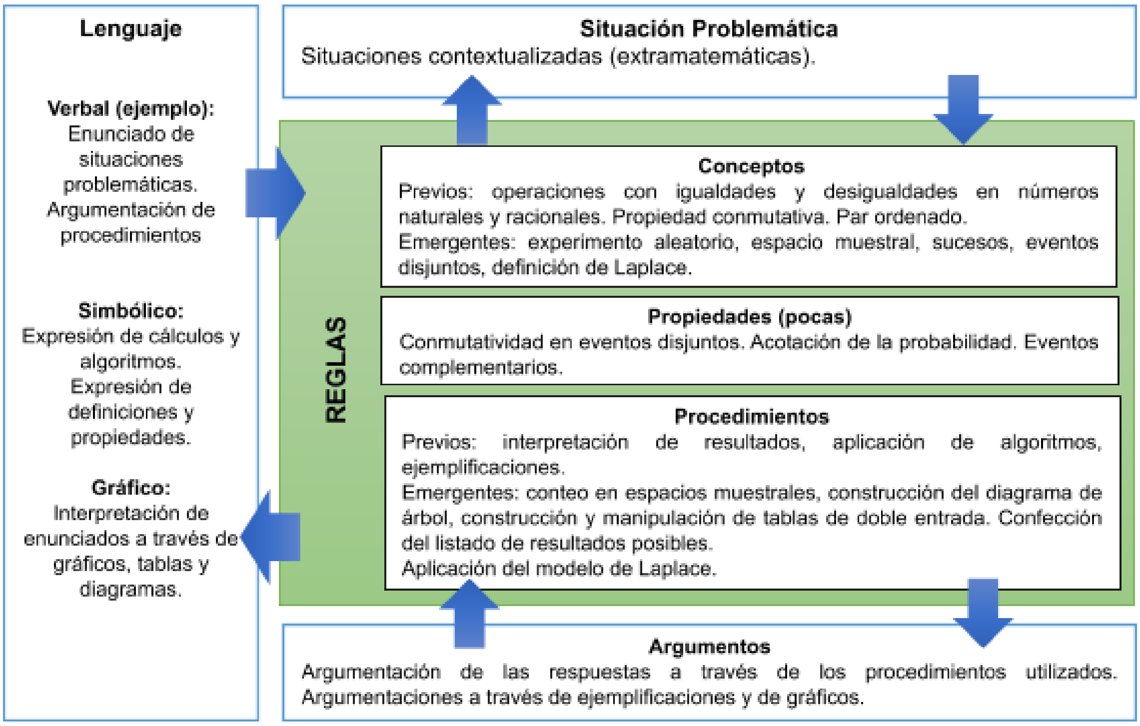


Cuadro 1. Configuración epistémica de los libros del Grupo 1

GRUPO 2: Los libros 2,3 y 4 presentan una configuración epistémica similar, caracterizada de la siguiente forma (resumida en el Cuadro 2):

- Gran parte de las situaciones problemas son extramatemáticas y la mayoría vinculadas a los juegos de azar. Presentan situaciones para aplicar o afianzar conceptos o procedimientos previamente desarrollados, prevaleciendo contextos lúdicos. Requieren de la utilización de lenguaje verbal, simbólico y gráfico, según el tipo de situación.
- Los conceptos, definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos se introducen con situaciones problemas intra y extra-matemáticos.
- Los procesos de argumentación son de tipo individual-inductivos. No hay situaciones donde se promueva la discusión entre estudiantes o grupos de ellos.
- La actividad matemática que caracteriza a las situaciones problemas propuestas están centradas en procesos más bien algorítmicos.

- La gestión de la clase que sugiere el texto lleva a que el docente proponga situaciones problemáticas vinculadas a juegos de azar, luego expone los conceptos, procedimientos, propiedades. Los estudiantes resuelven situaciones similares a las trabajadas anteriormente y, en general, se les pide argumentar la solución.

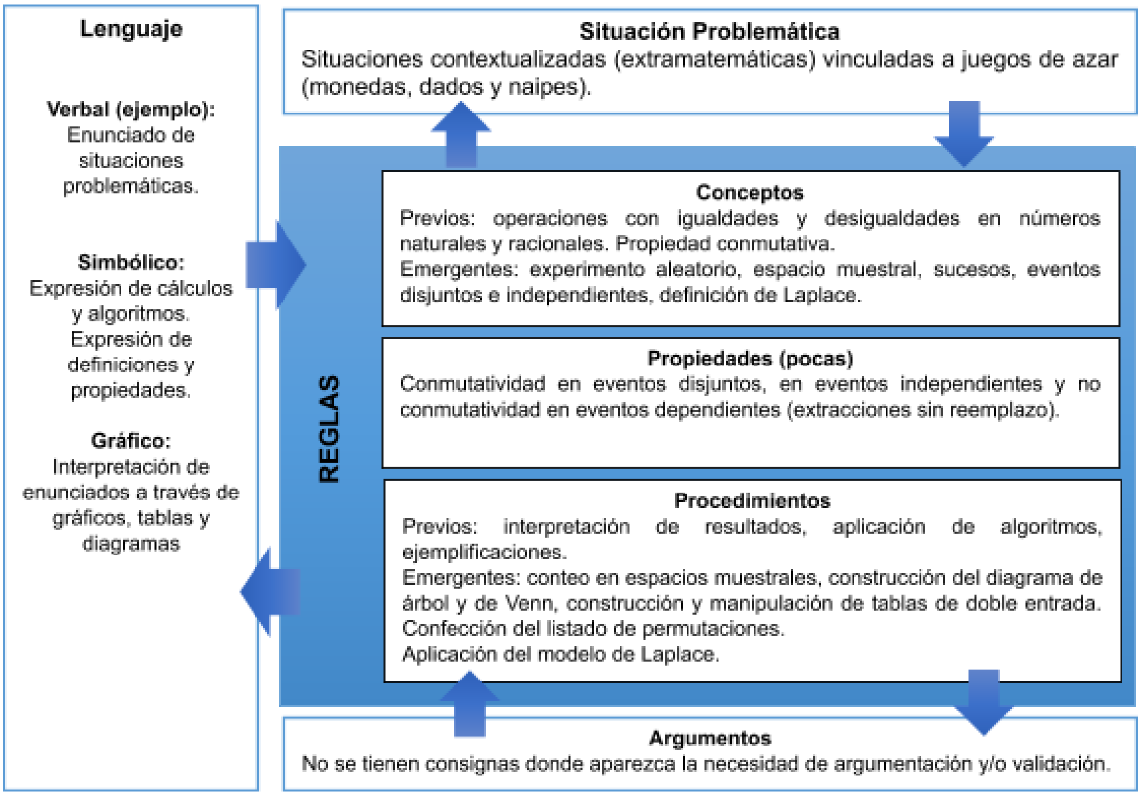


Cuadro 2. Configuración epistémica de los libros del Grupo 2

GRUPO 3: Los libros 1 y 7 presentan la siguiente configuración epistémica (resumida en el Cuadro 3):

- La mayoría de las situaciones problemas están vinculadas a los juegos de azar casi con exclusividad. Algunas de ellas son utilizadas para afianzar y/o integrar conceptos y procedimientos pero siempre del mismo tipo. Requieren de la utilización de lenguaje verbal, simbólico y gráfico, según el tipo de situación.
- Los conceptos, definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos se introducen con situaciones problemas como ejemplos sin exploración previa de algún tipo.
- No aparecen situaciones problemas que impliquen procesos de argumentación, es decir, no demandan justificar o validar las resoluciones.
- La actividad matemática que caracteriza a las situaciones problemas propuestas está centrada en procesos de algoritmización y responden a una concepción más formalista de la matemática. Las situaciones problemas solo tienen la función de afianzar un concepto, y por sí solas no inducen a que se construyan los mismos.

- La gestión de la clase que promueve conduce a pensar en un docente que expone los conceptos, propone ejemplos y explicita propiedades. Los estudiantes han de aplicar dichos conceptos y propiedades a la resolución de problemas de la misma naturaleza.



Cuadro 3. Configuración epistémica de los libros del Grupo 3

Valoración de la idoneidad didáctica de las tareas

La idoneidad didáctica es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo (Godino, Batanero y Font, 2006). Para ello se utilizan seis criterios parciales de idoneidad: Epistémico (relativo a los significados institucionales), Cognitivo (significados personales), Mediacional (recursos tecnológicos y temporales), Emocional (actitudes, afectos, emociones), Interaccional (interacciones docente – discentes) y Ecológico (relaciones intra e interdisciplinares y sociales). Cada una de estas idoneidades se valora cualitativamente como de baja, media o alta idoneidad. De esta manera, la idoneidad didáctica de los procesos se entiende como la articulación coherente de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

Teniendo en cuenta estos indicadores y las configuraciones epistémicas, se muestra sintéticamente en la Tabla 1 un primer análisis de las distintas idoneidades parciales. Se prestó especial atención a las dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional y ecológica, dado que nos resulta poco viable valorar en las actividades de los textos la idoneidad mediacional y emocional, pues la primera hace referencia al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, mientras que la segunda se refiere al grado de implicación de los estudiantes en el proceso de estudio.

	Epistémica	Cognitiva	Interaccional
Libro 1	BAJA	MEDIA	BAJA
Libro 2	MEDIA	ALTA	MEDIA
Libro 3	MEDIA	ALTA	MEDIA
Libro 4	MEDIA	ALTA	MEDIA
Libro 5	ALTA	MEDIA	ALTA
Libro 6	ALTA	ALTA	ALTA
Libro 7	MEDIA	BAJA	BAJA

Tabla 1. Valoración de la idoneidad didáctica de los libros analizados

Con respecto a la idoneidad ecológica, y tomando como referencia la configuración epistémica elaborada a partir del significado institucional global o de expertos, se consideró una valoración alta para los libros 5 y 6, mientras que los restantes se valoró con idoneidad ecológica media.

Reflexiones finales

Se considera que el Grupo 3 tiene una idoneidad didáctica más alta que los demás, ya que incluye problemas contextualizados y toma como centro de la actividad matemática la resolución de problemas. Estas situaciones no sólo son representativas de los significados de los objetos en estudio, sino también, permiten contextualizar los conocimientos (incluyendo los previos que tienen los alumnos), ejercitarlos y aplicarlos. También se encuentra que el lenguaje, los conceptos, las propiedades y los procedimientos son representativos de estos objetos. Por último, se destaca que promueven la actividad de expresar, comunicar y argumentar los procedimientos realizados. Este marco de contextualización es acorde, por ejemplo, a la propuesta del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología (2019) donde se propone iniciar el trabajo sobre una actividad de la vida real que dote de sentido a lo que se va a aprender (p. 10).

Se le atribuye al Grupo 1 una idoneidad didáctica baja, pues las situaciones problemáticas no contextualizan los conocimientos pretendidos (más bien apuntan a desarrollos algorítmicos y resolución de problemas similares). No conllevan hacia alguna instancia de interacción, puesto que la configuración epistémica sugiere una clase magistral donde el profesor explica, ejemplifica y los estudiantes resuelven situaciones similares. Este modelo no permite al docente valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos en estudio, tener en cuenta las dificultades y eventualmente determinar la intervención que considere más adecuada.

Al Grupo 2 se le asigna una idoneidad didáctica media (tomando como referencia las características mencionadas para los Grupos 1 y 3). Presenta situaciones problemas para aplicar o afianzar conceptos o procedimientos previamente desarrollados, pero siempre prevalecen contextos lúdicos. Los procesos de argumentación son de tipo individual-inductivos y se piden sobre la solución del estudiante para un determinado problema. No hay situaciones donde se promueva la discusión entre estudiantes o grupos de ellos. La actividad matemática que caracteriza a las situaciones problemas propuestas está centradas en procesos más bien algorítmicos. Por último, destacamos que la gestión de la clase que sugiere el texto lleva a que el docente proponga situaciones problemáticas vinculadas a juegos de azar, luego expone los conceptos, procedimientos, propiedades. Los estudiantes resuelven situaciones propuestas similares a las trabajadas anteriormente y, en general, se les pide argumentar su solución propuesta. Luego continúan resolviendo problemas de características similares.

El análisis didáctico pone en relieve la actividad matemática que estaría presente en la clase y facilita al docente la gestión adecuada de la misma, ya que se podría elevar la idoneidad didáctica de aquellas facetas que se ven más desfavorables. Es decir, el análisis de los criterios de idoneidad permite una mejor adaptación al contexto y circunstancia de la clase con el fin de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, un texto podría tener idoneidad media, como los del

Grupo 2, pero la intervención docente con nuevos cuestionamientos que agregue a una tarea o el modo en que gestiona la clase, elevaría la idoneidad del proceso.

Referencias bibliográficas

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista Iberoamericada de Educación Matemática,* (26), 9-25.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *Uno*, (25), 77-87.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición *matemática*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39*(1-2), 127-135.

Ministerio de Educación Cultura, Ciencia y Tecnología (2019). *Plan Nacional Aprender Matemática*. Recuperado de https://www.educ.ar/recursos/150806/libro-del-plan-nacional-aprender-matematica?from=150050

Números enteros negativos: condiciones de posibilidad para su transmisión

DANIELA EMMANUELE
emmanueledaniela@gmail.com
FLORENCIA JUSTO
fcjusto11@gmail.com
EVELIN PONZONI
eveponzoni@gmail.com
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario

Resumen

En el presente informe (correspondiente a una investigación en curso) exploramos las posibilidades de transmisión del contenido específico números enteros negativos en la escuela secundaria desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Escolar. Para ello, realizamos análisis de propuestas editoriales de uso frecuente y entrevistamos a cuatro docentes que han trabajado con sus estudiantes dicha temática. A través de estos análisis, pretendemos reflexionar acerca de los modos de presentación de la noción de número entero negativo en el aula, su posterior desarrollo, el tipo de material bibliográfico utilizado, y el grado de relevancia que adquieren el uso de la historia y la epistemología de este contenido dentro de la propuesta didáctica de los/as docentes.

Introducción

El informe de avance que se presenta a continuación corresponde a una investigación en curso –dentro del Proyecto ING 548-, no concluida, al momento de su comunicación.

Planteo del problema – Relevancia y pertinencia del tema: Los *Números Enteros* constituyen un contenido correspondiente al ciclo básico de la escuela secundaria orientada de la provincia de Santa Fe, específicamente de primer año. El Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada de la Provincia de Santa Fe (2014) propone una continuidad con lo trabajado en la escolaridad primaria y con los años posteriores, donde se retoman y se amplían los conjuntos numéricos, siempre con la intencionalidad de provocar procesos de resignificación de contenidos, de reflexión acerca de los mismos y de búsqueda de estrategias para la resolución de problemas. En la sección *Fundamentación General de la Propuesta Curricular*, se establece claramente qué se entiende –en términos de la propuesta curricular- tanto por Educación como por Aprendizaje:

> [...] Educación como lugar de encuentro con el otro para explorar posibilidades y contribuir a los sentidos compartidos, siendo ésta una de las herramientas para propiciar apropiación creativa y transformadora de la cultura, la igualdad de oportunidades en la sociedad y asegurar la horizontalidad y democratización del conocimiento y de los bienes simbólicos y materiales –concepción que posibilita comprender que no hay verdades absolutas, ni conocimientos neutrales, ni procesos lineales, ni posibilidades de avanzar en soledad–; y Aprendizaje como forma de resolver problemas con otros en un marco ético que preserve el bien común. (Diseño Curricular Educación Secundaria Orientada, 2014, p. 11).

Respecto a la democratización del conocimiento, Meirieu (2013) postula tres exigencias de importancia fundamental para que ello tenga lugar, a saber: 1) Transmitir saberes emancipadores; 2) Compartir valores; y 3) Formar para el ejercicio de la democracia. Concebimos a la transmisión de un saber, una cultura, una historia- en nuestro caso, en tanto profesoras en Matemática, transmisión de un saber matemático, de la cultura matemática, de la historia del concepto de número- como el acto específicamente humano que asegura la continuidad de valores, principios, símbolos, prácticas, etc., entre generaciones. En dicho acto de transmisión, lo que se pone de relieve es el modo de relación que se establece entre el sujeto portador, el sujeto de la recepción y el objeto a pasar; y es esa reubicación de roles entre pasador, pasante y objeto –todos los cuales se modifican en el mismo momento en que la transmisión se da- que no hay lugar para la adjudicación de rasgos mecánicos a dicho concepto. Esto es, la transmisión implica tanto un trabajo para el sujeto que pasa como para aquel que recibe. Se trata de un acto simbólico tendiente a la inscripción del otro en una genealogía común que lo posicione como heredero de un legado cultural, de una filiación. “Esto significa pensar la enseñanza escolar como política de transmisión y el desafío de imaginar una escuela que sea garantía de construcción de lo común” (Bolleta y Tarruella, 2018, p. 4).

Para Meirieu, un saber es considerado emancipador cuando se le puede transmitir al alumnado la idea de que esos saberes resultaron emancipadores del ser humano en algún período de su historia. Enfatiza la necesidad de enseñar los saberes junto a la historia de los mismos para poder valorarlos en su capacidad emancipadora y propiciar la comprensión de nuestro complejo mundo (Meirieu, 2013).

Es bien sabido que los números negativos presentan dificultades importantes para los/as estudiantes al momento de su conceptualización y operatividad (Iriarte Bustos, Jimeno Perez y Vargas-Machuca de Alva, 1991; Bruno, 1997; Pluvinage y Flores, 2016). El mayor inconveniente en el aprendizaje de esta nueva categoría de números –coincidimos- viene dado por las limitaciones para proporcionar significado a la idea de magnitud negativa tal cual ocurrió en el propio desarrollo de la disciplina matemática, en tanto cuerpo de conocimientos formalizado, a lo largo de su historia.

Respecto a aspectos metodológicos, se indica explícitamente en el Diseño Curricular (2014) que el estudio de este tipo de números debe permitir la resolución de problemas de distinta índole, la estimación e interpretación de los resultados logrados así como la argumentación de las técnicas utilizadas, no reduciéndose a la aplicación repetitiva de algoritmos sin sentido, carentes de significación. Históricamente, el comercio ha requerido alguna manera de registrar créditos y deudas, demandando modos de registro que permitan su distinción. Esto está sin dudas relacionado al surgimiento de los números enteros negativos como entidades que expresan débitos, pero la génesis del número entero en tanto entidad abstracta es, por un lado, de naturaleza algebraica, y por el otro, se relaciona con el surgimiento del primer lenguaje simbólico que hizo posible considerar las soluciones negativas de ecuaciones y problemas (que al principio no eran admitidas por carecer de sentido) (Boyer, 1986). A partir de estos hechos y necesidades es que surgen los números enteros como objetos matemáticos asociados a prácticas tanto comerciales, lúdicas como profesionales de la comunidad matemática. De allí que nos preocupamos por la transmisibilidad de este saber en la escuela secundaria, y su vinculación con el problema que lo originó.

Posicionándonos desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Escolar (TSME) y acordando en "[...] caracterizar a la Matemática como un producto cultural y social, atravesada por las concepciones sociales y las decisiones de la comunidad matemática, provocándose una interacción que funciona como generador de conocimientos" (Diseño Curricular Escuela Secundaria Orientada, 2014, p.47), señalamos la importancia que adquiere la *recreación de prácticas de referencia* en el aula. Las prácticas de referencia remiten, de acuerdo con la TSME, a aquello que integra un conjunto articulado de actividades desarrolladas por un sujeto o por un grupo cultural con una finalidad específica y bajo una práctica social que norma y regula las mismas. La incorporación de este tipo de prácticas suple la ausencia de un modelo organizado que conduzca al estudiantado a una construcción del conocimiento a través de su resignificación (Camacho Ríos, 2011).

Preguntas de Investigación: Nos interrogamos, en primer lugar, acerca de cuáles son las condiciones de posibilidad para la transmisión de los saberes relativos a los números enteros negativos. En segundo lugar, en relación a los sujetos pasantes de tales saberes, específicamente a los/as docentes –agentes privilegiados de tal transmisión- y a sus prácticas, nos planteamos las siguientes preguntas: 1) ¿Cómo se introduce la noción de número entero negativo en el aula?; 2) ¿De qué manera se desarrolla la unidad didáctica correspondiente al tratamiento de los números enteros?; 3) ¿Qué tipo de libros de texto se seleccionan?; 4) ¿Qué grado de relevancia se le otorga a la historia y a la epistemología de los conceptos involucrados, en especial, al concepto de número entero?

Marco teórico

Nuestro marco teórico corresponde a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), teoría que pretende explicar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, entendiendo por *explicar* el exponer "desde un punto de vista evolutivo los avances sustentados en las relaciones entre saber, mente y cultura hacia las matemáticas" (Cantoral, 2016, p.29). La socioepistemología se sostiene en cuatro principios fundamentales: 1) principio de la racionalidad contextualizada; 2) principio del relativismo epistemológico; 3) el principio de la resignificación progresiva; 4) principio normativo de la práctica social.

Con el propósito de democratizar el aprendizaje de la matemática, la TSME propone un programa de enseñanza alternativo al tradicional (buscando así intervenir en el sistema didáctico que cuestiona) cuyos pilares son la racionalidad contextual, el curriculum flexible, la centración en las prácticas y el rediseño del discurso matemático escolar (dME), articulando una noción de aprendizaje relativa a los contextos y a las prácticas de referencia. Con dME nos referimos al dispositivo que norma, regula y establece las bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Soto, 2010). Se trata de un elemento fijo (resistente al cambio) que norma las acciones y las prácticas desarrolladas en el aula, provocando "(...) por un lado, la imposibilidad de participar en la construcción social del conocimiento matemático y por el otro, la negación de la pluralidad epistemológica" (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015, p.25).

El dME estipula una cierta manera para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de significados atribuidos a los objetos matemáticos. El dME produce los consabidos fenómenos de adherencia, opacidad y exclusión: a) el fenómeno de *adherencia* está relacionado con la universalización del conocimiento que fue construido socialmente, en y para responder a las necesidades de regiones dominantes (por lo que podría estar afectada su función al ser utilizado en contextos con especificidades diferentes de aquel del cual surgió); b) el fenómeno de *opacidad* es la característica que permite describir el efecto de disociación entre la vida cotidiana (que resulta opaca, relegada a un segundo plano) y la matemática escolar; y, por último, c) el fenómeno de *exclusión* alude al olvido e invisibilización de los contextos, las comunidades y las situaciones específicas donde el conocimiento matemático emerge, considerando exclusivamente una epistemología dominante que ha impuesto argumentaciones, significados y procedimientos.

Dadas estas características –desde nuestro enfoque, no propicias para la transmisión de los saberes matemáticos-, la TSME propone el rediseño del dME. En lo que concierne al rediseño debemos distinguir dos tipos: 1) rdME: es aquel que concierne a la confección de propuestas didácticas áulicas basadas en una epistemología renovada y que será objetivada en libros de texto, programas de estudio, etc; 2) RdME: es aquel que concierne a la ruptura de orden epistemológico con lo instituido. El RdME es lo que posibilita el pasaje de la centración en el objeto a la centración en las prácticas sociales consideradas como la base de la construcción del conocimiento matemático. Este rediseño "privilegia la articulación de argumentaciones, propicia la emergencia de racionalidades situadas y contextualizadas, favorece el carácter funcional del saber (su valor de uso) e impulsa una resignificación progresiva que considere marcos de referencia diversos” (Reyes Gasperini, 2016, p 46).

El saber, y más precisamente, la evolución del conocimiento en saber, involucra procesos deliberados e intencionales para el uso compartido de ese conocimiento; son procesos constructivos, muy sofisticados, de carácter social y son capaces de provocar interacciones (implícitas o explícitas) entre mente, conocimiento y cultura. Dado que los significados de los objetos de conocimiento son creados en el ejercicio de prácticas e interacciones sociales normadas, así como de retroalimentaciones sucesivas de las acciones ejecutadas y de las interacciones dialécticas entre los actores sociales, éstos adquieren **valor de uso**. “El conocimiento depende, entonces, de las experiencias vividas que a su vez modifican las percepciones y creencias e incluso su propia identidad” (Cantoral, 2016, p. 65). Por ello, desde la perspectiva socioepistemológica, se insiste en cambiar de foco en la cuestión de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas: pasar de hacer foco en el objeto para hacerlo en las prácticas. A este recurso, se lo denomina *descentración del objeto*.

Diseño metodológico

Con la intención de inspeccionar, conocer en profundidad y describir las condiciones de posibilidad para la transmisión de los saberes relativos a números enteros negativos, planteamos una investigación de carácter exploratorio-descriptivo. Hemos adoptado una perspectiva cualitativa ya que focalizamos nuestra atención en lo que los sujetos hacen dentro de las instituciones seleccionadas para este estudio. A grandes rasgos, se puede indicar que, en un diseño cualitativo, las hipótesis y las categorías son conjeturas iniciales que se explicitan en respuesta al problema de estudio y que los objetivos son describir, comprender e interpretar el significado de la conducta de los actores sociales –en este caso, profesores/as de Matemática de nivel secundario-. El investigador, observa e interpreta al mismo tiempo que reconstruye significados situacionales por intersubjetividad (Rodriguez Gil, Gil Flores y García, 1996). Nos ocupamos de estudiar de manera subjetiva, particularidades dentro del tema elegido, extrayendo conclusiones permanentemente atravesadas por el contexto. El diseño seleccionado es de tipo transeccional exploratorio, es decir, se recolectaron datos en un solo momento, en un tiempo único, con el fin de explorar todo lo concerniente a nuestras preguntas de investigación (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Lucio, 2008). Teniendo en cuenta las preguntas de investigación formuladas, los objetivos de este estudio son:

Objetivo General: Analizar cuáles son las condiciones de posibilidad para la transmisión de los saberes relativos a los números enteros negativos.

Objetivos específicos: 1) Describir cómo se introduce la noción de número entero negativo en el aula. 2) Explicitar de qué manera se desarrolla la unidad didáctica correspondiente al tratamiento de los números enteros. 3) Especificar qué tipo de libros de texto se seleccionan para el tratamiento de los números enteros. 4) Examinar qué grado de relevancia se le otorga a la historia y a la epistemología de los conceptos involucrados, en especial, al concepto de número entero.

Para alcanzar nuestro propósito, decidimos recolectar datos mediante las siguientes técnicas:

a) Análisis de propuestas editoriales

b) Entrevistas con docentes

Análisis de datos

Análisis de propuestas editoriales

Por razones de espacio, sólo detallamos 4 de los libros de texto analizados, de uso habitual en las escuelas secundarias. El criterio de análisis fue estructurado a los fines de responder las preguntas de investigación de manera coherente con el marco teórico. Las categorías de análisis consideradas son: 1) Presentación del contenido; 2) Historización y epistemologización del contenido; 3) Momento de institucionalización/formalización; 4) Actividades propuestas. En:

i) Rodas, P., Legorburu, N. y Garaventa, L. (2006) *Carpeta de Matemática 8, Colección libros y +*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor, encontramos que la introducción del tema se realiza a través de tablas, con temperaturas o resúmenes bancarios que contienen números "por debajo del cero". Se institucionaliza el tema luego de una revisión inicial y ejercicios. No contiene mención alguna sobre la historia del concepto. Incluye actividades que se enmarcan en el contexto del comercio como las operaciones financieras que debe hacer un kiosquero, por ejemplo. Si bien las actividades que se proponen son mayoritariamente algorítmicas e intramatemáticas, se presentan algunos ejercicios donde se aplica el contenido en situaciones cotidianas extramatemáticos.

ii) Berman, A. (2011) *Matemática II*. Buenos Aires, Argentina: Santillana, hallamos que la introducción se hace a través de un juego de cartas, donde cada color representa una suma o una resta de puntaje. Hay una actividad para que resuelvan los estudiantes en relación con jugadas posibles de dicho juego. No hay un único momento de institucionalización, algunas veces aparece antes de la ejercitación y otras, después. No hace mención respecto a la historia. Entre las actividades propuestas, encontramos abundante ejercitación, prioritariamente intramatemática y algorítmica.

iii) Abálsamo, R. (2013) *Activados- Matemática 1.* Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos, la introducción -escasa y muy corta- se hace a partir de una imagen, según la cual los alumnos deben formular preguntas partiendo de ciertas posibles respuestas. El momento de institucionalización es siempre previo a la ejercitación. No contiene menciones históricas y el tipo de actividades propuestas es algorítmico casi en su totalidad.

iv) Kurzrok, L., Altman, S., Arnejo, M. y Comparatore, C. (2018) *Matemática 2*. Buenos Aires, Argentina: Tinta fresca, la introducción se realiza a través del relato histórico y de una actividad, en la cual se pide, por ejemplo, hallar la diferencia entre el punto más alto de una montaña y el punto más bajo sobre el nivel del mar. Respecto al momento de institucionalización, encontramos que es siempre posterior a la ejercitación. Si bien –en este caso- hallamos mención de la historia y contextualización histórica de su uso en diversas comunidades, incorporando la disyuntiva en la consideración del número cero, señalamos que las actividades propuestas son de tipo algorítmico.

Análisis de entrevistas con docentes

Las entrevistas semiestructuradas se plantearon voluntarias y anónimas. Nos dedicamos a entrevistar a cuatro docentes (a los que denominaremos **D1**, **D2**, **D3**, **D4** respectivamente) de nivel secundario que trabajan con sus estudiantes los números enteros. Atendiendo a responder las preguntas de investigación, diseñamos la entrevista con el propósito de analizar cómo distintos docentes de nivel secundario introducen la noción de número entero –en particular, negativo-, cómo la desarrollan y cómo la concluyen, qué focalizan en relación con la evaluación, qué dificultades encuentran para su transmisión y la relación que establecen con la historia y la epistemología del contenido. Para esto nos pareció útil conocer sobre el material bibliográfico con el que cuentan los/as profesores/as al momento de armar sus unidades didácticas, qué aspectos tienen en cuenta al momento de seleccionarlos, cuánto influye esto en el tipo de actividades que les proponen a sus estudiantes, y si se condice con lo que se plantea desde el Diseño Curricular para el eje "Números y Operaciones”, donde está incluido el contenido de interés. Los ejes de análisis que hemos considerado son: 1. Introducción del tema; 2. Desarrollo y evaluación del tema; 3. Dificultades en la enseñanza; 4. Dificultades observadas en el aprendizaje; 5. Materiales y criterios de selección; 6. Articulación vertical y/u horizontal; 7. Historia y epistemología del contenido.

Respecto a la *introducción del tema*, todos los/as docentes entrevistados/as señalan que introducen el tema partiendo de situaciones –a veces lúdicas, otras veces, problemáticas- relativas a ascenso/descenso en montañas o alturas diversas; compra-venta de bienes u objetos; temperaturas bajo cero y similares. Por ejemplo: **D1**: “La noción de números enteros la introduzco con algunos ejemplos, de decirle a los chicos que no es lo mismo tener un freezer que tenga temperaturas bajo cero que estar en el día con un sol y tener 24 grados de calor, o que no es lo mismo un alpinista que esté escalando una montaña a un buzo que esté por debajo del mar, buscando algo”. **D2**: “Este año, por ejemplo, en números enteros lo que estuvimos haciendo con los chicos es irnos del aula y, bajábamos y subíamos escaleras. Entonces íbamos representando la acción de subir y bajar de piso a piso, y después lo fuimos interpretando de escalón a escalón y después lo fuimos revisando con la temperatura, que es lo básico. Hicimos un juego de cartas. En el juego de cartas identificamos las que tenían color rojo y las que tenían color oscuro; jugamos con las francesas. Entonces hablábamos de lo que era quitar y agregar”. **D3**: “Un año empecé introduciéndolo con un juego… que era el chinchón. Una actividad donde primero tenían que jugar al chinchón y después se les hacía una especie de consignas donde se les daba situaciones de juego y ahí surgía que hay ciertos números que en lugar de sumar, restaban. Surgió de ahí y luego se empezó a trabajar con otras situaciones”. (En años posteriores), “(…) empecé directamente con situaciones cotidianas como el trabajo con temperaturas, alturas de montañas, actividades donde se trabaja con ascensor, como para ahí notar la necesidad de esos números para algunas situaciones”. **D4**: “Bueno, te cuento cómo lo estuvimos haciendo hasta ahora. Nosotros trabajábamos con libro específicamente y seguíamos bastante ese material. En ese material, la propuesta consistía, como muchas de otras bibliografías, en la introducción de números enteros a partir de situaciones cotidianas, donde el signo negativo estuviera asociado a alguna situación concreta. Por ejemplo, temperaturas bajo cero, la profundidad bajo el mar, y también mucho, que es lo que los chicos más manejan, el tema del dinero: ganancias y pérdidas. De hecho, **las operaciones, suma y resta con números enteros** las entienden mejor en términos de ganancias y pérdidas que en términos de ponerle una fórmula o receta a seguir”.

Respecto al *desarrollo y evaluación del tema*, hallamos que, en general, primero desarrollan valor absoluto de un número entero (con su correspondiente interpretación como distancia al origen en la recta numérica) y luego atienden a los aspectos operativos (operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación). Por ejemplo: **D1**: "Obviamente después hablamos de distancia, de valor absoluto con la definición correcta de distancia. (...) Vamos haciendo operaciones combinadas, ecuaciones y hacemos resolución de problemas. Eso es lo que vemos de números enteros, obviamente que en operaciones combinadas y ecuaciones llegamos a ver todos los tipos de operaciones, suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíces también". **D2**: "En el aula trabajamos la recta, las operaciones, eh... pasamos por las sumas algebraicas, la supresión de paréntesis, corchetes y llaves, y operaciones combinadas. Para dar todo eso también vimos la regla de los signos para la multiplicación y la división". **D3**: "Después de tener la noción de número negativo seguimos trabajando con todo lo que es distancia, se trabaja en la recta numérica el tema de la distancia al cero, el opuesto de un número y la propiedad de que tienen igual distancia al cero". **D4**: "La unidad se concluye haciendo básicamente operaciones. Hacen operaciones combinadas, a la suma y la resta se le agrega multiplicación, división, potenciación y radicación y así más o menos termina la unidad".

Al momento de interrogar a los/as docentes sobre si encuentran *dificultades en la enseñanza* de este contenido, nos encontramos con respuestas variadas. Dos de ellos manifestaron no tener dificultades, y los restantes nos expresaron que encuentran diversos obstáculos: **D1**: "No, en este contenido no. En particular, como decirte "me resulta más difícil que otro", por ahí como es primer año y es tema nuevo para ellos, puede ser que hasta que se adapten, que también pasa por una cuestión de adaptación a la secundaria, yo creo que es un cambio donde todo es nuevo para ellos". **D2**: "Sí, tengo dificultades, que, por ejemplo, a medida que va avanzando las generaciones me doy cuenta que el vocabulario se va haciendo más empobrecido. (...) Me doy cuenta que tengo que volver para atrás y afianzar ciertos conceptos que yo creo que ya están dados o entendidos pero hay que volver". **D3**: "O te das cuenta al final de la unidad, o te das cuenta cuando trabajás fracciones con negativos, al final lo que trabajamos sigue teniendo el mismo error el chico que cuando no lo hicimos, o al revés. (...) Un año me pasó que lo hacía más como ellos iban trabajando, y después me pasó que me encontré a mitad de año con que no sabían, no habían terminado de saber cuándo sumaban, cuándo restaban, cuando yo no había hecho la conclusión esa, entonces al otro año fue que dije "bueno, vamos a dejar esto escrito qué es lo que tienen que hacer", llegar a esa conclusión, que no quede oral... Uno corrige unos errores, pero te encontrás otros, estoy en ese vaivén". **D4**: "En general enseñar números me parece un tema bastante... -piensa la palabra- áspero. (...) hasta números enteros no me parece tan malo, se puede mejorar un poco tal vez la introducción de las operaciones. Me parece que podría haber un poco más de trabajo de cómo se introducen las operaciones. Pero a nivel conceptual me parece que al menos lo entienden".

En cuanto a las *dificultades observadas en el aprendizaje*, los/as docentes resaltan que a los/as estudiantes les cuesta la abstracción y lo algebraico. **D1**: "Les cuesta un poco al principio entender y diferenciar, cuando se tienen que abstraer de un problema en particular y tienen que resolver, no sé, una operación combinada sin pensar en la particularidad del "tengo tanto, debo tanto" y estoy haciendo meramente cuentas, entonces ahí sí se confunden si lo abstraemos totalmente". **D2**: "(...) identificar los signos positivos y negativos en la interpretación de textos, eso fue lo que más costó. Es lo que noté. (...) Y... el problema que tuve es: tablas, interpretación de textos y el seguimiento de lo que es el trabajo en el hogar, porque tienen otras actividades, entonces la dedicación es parcial, no es total". **D3**: "Y hay chicos que les cuesta todavía entender por qué se usan esos números, o no logran, no sé si por falta de tiempo o en el montón hay muchas actividades que se corrigen oralmente (...) Además de los errores mecánicos que tienen las operaciones que hay de todos los colores". **D4**: "En general les cuesta mucho la suma y la resta y tienden a confundirla con la multiplicación. O sea, la regla de los signos que uno analiza para la multiplicación y división, después de un tiempo, no todos los alumnos, no siempre, pero tienden a confundirla".

Acerca de los *materiales utilizados y los criterios de selección*, hallamos que -en general- los/as docentes no se encuentran satisfechos con un único libro, por lo que confeccionan apuntes. Por ejemplo: **D1**: "(...) no pensé cómo usar, o algún juego, algo de eso, pero la verdad que todavía no hice nada. Esta bueno usar herramientas distintas, pero aún no pensé nada." Respecto a libros: "No, no. (...) no les hago sacar fotocopia ni trabajar con algún libro, sino que les voy buscando yo distinto material y les voy proponiendo clase por clase (...)". En cuanto a los criterios de selección, dice: "por ahí hay problemas que están mal planteados, algo que está planteando un problema que tiene sentido que la solución sea positiva y cuando lo resolvés te queda algo negativo. Cosas de ese estilo, trato primero de resolverlo, hacerlo y después plantearle algo a los chicos que sea lógico". **D2**: "Sí, en primer año estoy haciendo cuadernillos. Entonces por cada tema desarrollo un cuadernillo pero lo saco yo de varios libros. (...) Como recursos didácticos tengo entre otras cosas, pizarrón y todas esas cuestiones, de recursos tecnológicos, el proyector y también actividades interactivas, esas sí las saco de internet”. **D3**: “Los juegos, que alguno son de acá del departamento, otros no, son juegos que descargo yo, que inventamos. (...) tenemos apunte propio hecho por la otra profe de primero y yo. Hacemos un apunte en paralelo. Dos años seguidos usamos libros y no nos terminaban de cerrar”. **D4**: “Hemos trabajado con algunos recursos como aplicaciones interactivas donde ellos puedan hacer operaciones (...) En todos los casos teníamos material” - se refiere a libro. “Es el material que me bajaba del departamento”.

Respecto a la *articulación vertical y/u horizontal* de este contenido, los/as profesores/as entrevistados/as opinan que es posible relacionar este contenido con otras materias, pero consideran que no es factible debido al desconocimiento de las temáticas de las mismas y la falta de un espacio de reunión para pensar dicha articulación. **D1**: “Obviamente con los contenidos mismos de Matemática sí, pero otras materias... -piensa- este... en particular no sé. Porque no sé en realidad qué dan en otras materias. (...) Bueno, creo que se podría con historia... No sé, este suceso ocurrió tantos años antes de Cristo... Si veo esta batalla o esta guerra y si querés ahí también hay situaciones para representar con números enteros, por esto de ser antes o después de Cristo...”. **D2**: “Con números enteros no hice nada. Podría pensarlo... No lo hice, me dejaste algo para que lo haga. Me gustan los desafíos, me voy a poner a hacerlo (risas). No, no hice nada, los números enteros como que lo doy un poco rápido”. **D3**: “Sí, lo que me pasa con este tema y con otros montones de temas, el desconocimiento que tenemos de lo que está dando exactamente el otro profesor y la imposibilidad de tener una reunión y hablar seriamente de esto, no favorece a que uno pueda hacer actividades que sean afines a varias materias”. **D4**: “Sí me parece que se pueden articular, lo que pasa es que me parece que hay que hacer trabajos que sean con otros colegas de trabajo, que no sea docente de la misma asignatura, y eso, lo que yo veo actualmente, por lo menos en Argentina, que todo depende de la buena voluntad del docente, de algunos lineamientos institucionales, que está como muy acotada por un montón de cosas”.

En relación con la *historia y epistemología del contenido*, ante la pregunta “Y de la historia del contenido, ¿hacés mención? ¿O del problema que le dio origen?” se evidencia una ausencia prácticamente total que parecería resultar del hecho, por un lado, de no encontrar la manera de incluirlo en la clase; y, por otro, de no poseer los conocimientos necesarios para que ello sea posible. **D1**: “No. Solo les hago notar que con las herramientas que tenemos... Por ejemplo, como vimos el conjunto de los números naturales, que hasta el momento con esas herramientas no hay posibilidad de solución para ciertas situaciones que se van presentando. (...) Pero no hago referencia total a la historia. Cuando vemos ecuaciones, bueno, si no ampliamos el conjunto numérico no vamos a poder resolver con el conjunto numérico que nosotros teníamos pero ni siquiera les hago buscar la historia". **D2**: "Sí, lo hacemos en contexto. Ellos tienen tres partes en la carpeta: tienen la que es Matemática, otra parte que es Trabajos prácticos y Evaluaciones y la última se llama Anexo. En Anexo hacemos toda la búsqueda de curiosidades, y si hay en una parte de lo que estamos trabajando algún matemático que tuvo que ver con ese desarrollo, hacemos la búsqueda. (...) Les contaba que el número negativo era relativamente nuevo en la historia de la Matemática y no lo podían creer. ¡Ni yo tampoco!". **D3**: "Lo histórico... no. Desconozco exactamente, sí lo he estudiado, pero no cómo aprovecharlo más que para conocer las dificultades... no ha sido una aplicación directa en el aula lo histórico. Yo no encontré la manera". **D4**: "No, en estas clases no están incluidos. Lo mismo que nos pasa siempre a todos, en la bibliografía, por ahí algunos libros pueden llegar a hacer alguna mención, no en general en la parte de números, sobre todo números enteros... no hay mucho".

Reflexiones finales

Lo que aquí expresaremos es en calidad de reflexión preliminar. Daremos aproximaciones a las respuestas finales de algunas de las preguntas planteadas para ir acercándonos al establecimiento de las condiciones de posibilidad de trasmisión del número entero negativo.

Observamos que, en general, el modo de introducir la temática y de desarrollar la unidad didáctica, produce la asociación de números positivos y negativos a las operaciones de suma y resta, respectivamente, cuando –creemos, en términos de la transmisión de saberes emancipadores- deberían darse modos de presentación que conduzcan hacia la formación de números como entidades abstractas y hacia una incipiente pero progresiva algebrización. No hallamos indicios, en las entrevistas realizadas, de propuestas didácticas que pongan en juego actividades conducentes a la identificación –dentro de lo posible, dado el nivel educativo que tratamos– del tipo de cuestiones que dieron lugar a la generación de la noción de número entero negativo; tampoco encontramos propuestas áulicas basadas en la recreación de prácticas de referencia que permitan reconstruir los campos de problemas y los elementos teóricos que justifican y explican las técnicas. Se trata –generalmente– de propuestas que no logran provocar los deseados procesos de resignificación, y de actividades ineficaces para propiciar la apropiación de la cultura matemática. Al menos, lo que dicen que hacen los/as docentes, nos permite inferir que sus prácticas áulicas se centran en los objetos matemáticos y no en las prácticas que le otorgan significado y sentido. Estos modos de presentación conspiran contra la intención de construir, hacer, recrear matemática dentro del aula – atendiendo a los principios fundamentales en que se sostiene la Socioepistemología, y –nos parece– que lo que se logra es una repetición algorítmica de una serie de reglas (que no alcanzan a tener sentido emancipador para el/la estudiante) y de las cuales, los/as alumnos/as no logran apropiarse, deviniendo usuarios/as pasivos/as de una cultura ajena. Todo esto –creemos- es representativo de los fenómenos de exclusión y opacidad del dME que norma las prácticas áulicas. Parecería que, en lugar de hacer hincapié en propiciar la abstracción, se atiende a las operaciones en términos aritméticos (suma y resta) y no en términos algebraicos (suma algebraica).

En cuanto a las propuestas editoriales, encontramos que las mismas no parecen satisfacer las necesidades de los/as docentes, en tanto la mayoría de ellas propone actividades mayoritariamente algorítmicas, repetitivas, y escasos e insuficientes ejercicios que den lugar al planteo de problemas contextualizados a la vida cotidiana o a otros dominios científicos (lo cual podría colaborar con la disminución de los fenómenos de opacidad y exclusión). Hay una marcada ausencia de marcos de referencia entre las propuestas editoriales de las que disponen los/as docentes en general, lo cual redunda en la circunscripción a una epistemología dominante que lejos está de resultar plural y de dar lugar a una racionalidad contextualizada. Esto podría ser el obstáculo que los/as docentes encuentran a la hora de pensar en articulaciones verticales/horizontales dentro de sus diseños didácticos.

La historia y la epistemología del contenido se hallan prácticamente ausentes tanto en los libros de textos como en la formación docente que han recibido los/as docentes como estudiantes de profesorado. Será necesario –sostenemos- el atender estas cuestiones desde la formación de grado. Seguiremos con el análisis de datos que será comunicado en una posterior presentación. Sin revertir algunas de las características descriptas en torno al modo de presentación de la temática, y sin fortalecer los aspectos histórico-epistemológicos del concepto de número entero negativo, creemos que las posibilidades de transmisión resultan seriamente disminuidas y acotadas. En base a lo estudiado, estamos diseñando una propuesta alternativa tendiente al rediseño del dME que –pensamos- incrementaría las posibilidades de transmisión del concepto de número entero negativo en la escuela secundaria.

Referencias bibliográficas

Bolleta, V. y Tarruella, N. (2018). *Condiciones actuales para la transmisión en la escuela secundaria*. Proyecto de Investigación 04/ V099-3 2017-2020. Anuario Pilquen. Sección Divulgación Científica del Curza.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Editorial Alianza Universidad Textos.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas, (*29), 5-18.

Camacho-Ríos, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *3*(2), 152-171. Recuperado de *http://ries.universia.net*

Cantoral, R. (2016). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: Gedisa.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Lucio, B. (2008). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.

Iriarte Bustos, M. D., Jimeno Perez, M. y Vargas-Machuca de Alva, J. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA,* (7), 13-18.

Meirieu, P. (2013). La opción de educar y la responsabilidad pedagógica. Conferencia de Philippe Meirieu. Ministerio de Educación de la República Argentina, Buenos Aires, Argentina.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). *Diseño Curricular Jurisdiccional. Escuela Secundaria Orientada*. Santa Fe, Argentina.

Pluvinage, F. y Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros. *Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 120-141.

Reyes Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: Gedisa.

Rodríguez, G., Gil Flores, J. y García Jímenez, E. (1996). *Metodología de la Investigación cualitativa*. Granada, España: Aljibe.

Soto, D. (2010). *Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión socioepistemológica*. (Tesis de maestría). CINVESTAV, México.

Registros de representación de funciones. Análisis de un texto escolar

JIMENA FERNÁNDEZ

jimenaf85@gmail.com

Escuela Secundaria de la Universidad Nacional del Litoral y Escuela Industrial Superior. Universidad Nacional del Litoral

SILVIA BERNARDIS

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

El tema funciones es considerado uno de los más importantes en la matemática y en su relación con otras disciplinas. La dificultad de los estudiantes para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones es una de las más mencionadas por los investigadores de Educación Matemática, tales como: Artigue (1998), Sfard (1991), Hitt (2003), Ruiz-Higueras (1994). Según Duval (2006), la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles para la comprensión, construcción y comunicación de los contenidos matemáticos. En particular en el caso de las funciones, las dificultades se hallan en la articulación entre las diferentes maneras de representar el concepto; la idea surge de los trabajos de Janvier (1987), en cuyo análisis se abordan las conversiones entre distintos tipos de registros tales como el verbal, tabular, gráfico y simbólico.

En este trabajo nos proponemos analizar la propuesta para el abordaje del tema de un texto escolar actual y centrar la atención en el apartado que se dedique a su iniciación.

Introducción

Spivak (1996) considera que el concepto más importante de toda la matemática es, sin dudarlo, el de función, dado que en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender por lo tanto, menciona el autor, que el concepto sea de gran generalidad. Por otro lado, también es un tema que genera dificultades en su enseñanza y aprendizaje, por lo que su estudio es abordado por investigadores en el campo de la Educación Matemática. Por ejemplo, Godino y Font (2003), afirman que es una de las principales ideas de las matemáticas y que su estudio deberá centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para los alumnos y usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones.

El tema funciones también es considerado uno de los más importantes en la matemática y en su relación con otras disciplinas por especialistas en Educación Matemática como Artigue (1998), Sfard (1991), Hitt (2003), Ruiz-Higueras (1994) quienes acuerdan en que es un tema muy complejo, tanto para abordar desde una secuencia didáctica, como como desde el punto de vista de la comprensión de los estudiantes. La dificultad de los estudiantes para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones es una de las más mencionadas por los investigadores.

En este trabajo, nos centraremos en estudiar los distintos registros de representación del concepto de función como así también las conversiones que se pueden realizar de uno a otro registro.

Marco teórico

Para realizar el análisis de los registros de representaciones materiales en la presentación de los contextos y en las tareas propuestas por los autores en los libros escolares, las transformaciones de las mismas y el papel que juegan en la comprensión por parte de los estudiantes, nos basamos en la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) (Duval, 1995; 2006) Según dicha teoría, la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles para la comprensión, construcción y comunicación de los contenidos matemáticos.

Según Duval (1995), para que un conjunto estructurado de signos sea considerado un Registro de Representación Semiótica (RRS), requiere que en su seno se puedan realizar tres actividades cognitivas fundamentales:

- constituir una traza o un conjunto de trazas perceptibles que sean identificables como una representación de cualquier cosa en un sistema determinado.
- transformar las representaciones mediante las únicas reglas propias del sistema de manera que se obtengan otras representaciones que pueden constituir un aporte de conocimiento con relación a las representaciones iniciales.
- convertir las representaciones producidas en un sistema en representaciones de otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a lo que se representa.

Como ejemplos de tales RRS se tienen la lengua natural (oral, escrita), representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal), representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas).

Las transformaciones posibles entre representaciones pueden ser de dos tipos:

- Tratamiento. La actividad supone una transformación entre representaciones de un mismo RRS.
- Conversión. La actividad supone una transformación entre representaciones de distintos RRS, siendo, en este caso, esencial la articulación de los registros.

Duval (2016) plantea que realizar conversiones (también llamadas traducciones o codificaciones) es una tarea compleja pues es necesario que entre dos registros que no tienen nada en común se reconozca el mismo objeto. Dicho autor afirma que:

> Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación es sólo en las matemáticas donde se requiere fuertemente la coordinación de registros. ¿Realmente se tiene en cuenta este requerimiento básico? Muy a menudo, las investigaciones se enfocan en cuáles son las representaciones correctas o cuál sería el registro más accesible para lograr que los estudiantes comprendan verdaderamente y usen algún conocimiento matemático particular. [...] El verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación" (pp.91, 92).

En este trabajo nos proponemos estudiar la propuesta para el abordaje del tema funciones de un texto escolar y centrar la atención en el apartado de iniciación. Consideramos de gran utilidad realizar este tipo de estudios, dado que ponemos bajo la lupa un instrumento de gran importancia para la elaboración de propuestas de trabajo de docentes y alumnos. Como señala Vargas (2003), citado por Vidal (2010):

> el libro de texto de matemáticas, concebido como instrumento asociado a la comunicación de saberes matemáticos, es el instrumento mayoritariamente usado por los profesores. [...] Esta posición privilegiada del texto, condice indudablemente al reconocimiento de la necesidad de convertirlo en objeto de estudio didáctico, y, en consecuencia, de aprendizaje didáctico (p.2).

Afirmaciones como la anterior hacen evidente la importancia que se le otorga a los textos en el proceso educativo, resulta interesante indagar acerca del tratamiento que éstos dan a los objetos matemáticos, para inferir las implicaciones que tiene dicho tratamiento en la enseñanza y el aprendizaje de los mismos, en particular del concepto de función. El propósito de este trabajo es explorar en el texto escolar seleccionado el tratamiento de los registros de representaciones de funciones y las conversiones entre ellos que proponen los autores.

Uno de los elementos más importantes para el aprendizaje en matemática son los problemas, las actividades y los ejercicios que el profesor propone a sus estudiantes. Para unificar los términos vamos a denominar *contexto* al lugar que proporciona el entorno desde el que se plantean las preguntas o consignas y *tarea* a las propuestas de acción (preguntas y consignas) que los profesores plantean a los estudiantes para el aprendizaje.

Según Penalva y Llenares (2011), lo que la tarea exige a los estudiantes determina la *demanda cognitiva* de la tarea y en parte su potencial de aprendizaje. Explican los autores que *demanda cognitiva* de una tarea es la clase y nivel de pensamiento que su resolución exige a los estudiantes. Afirman que la clase y nivel de pensamiento en el que se implican los estudiantes determinará lo que ellos pueden llegar a aprender. Para analizar las demandas cognitivas de las tareas tomaremos como referencia El Programme for International Student Assessment (PISA) considera tres niveles de exigencia en las tareas que plantean ((INECSE, 2005):

• *Primer nivel*: reproducción y procedimientos rutinarios. Ejercicios relativamente familiares que requieren la reiteración de los conocimientos practicados (recuerdos de propiedades, uso de procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos, realización de operaciones sencillas).

• *Segundo nivel*: conexiones e integración para resolver problemas estándar. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación.

• *Tercer nivel*: razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales (reflexión). Los ítems requieren cierta comprensión y reflexión, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos. Exige generalización y explicación o justificación de los resultados.

Objetivos

- Distinguir los tipos de contextos y los registros de representación que eligen los autores como entorno para presentar las tareas.
- Reconocer en las tareas propuestas por el texto las conversiones de dichos registros y el nivel cognitivo que demandan en su resolución.

Metodología y Documento de Estudio

La metodología corresponde a una investigación cualitativa no interactiva (McMillan y Schumacher, 2005), debido a que el tipo de información analizada proviene de documentos escritos. Es un estudio descriptivo e interpretativo. Describimos lo que observamos en la propuesta de los autores y realizamos interpretaciones en concordancia con el marco teórico en el que basamos la investigación.

Se trata de un análisis del capítulo en el cual se introduce e inicia el tema funciones en el texto cuyas especificaciones se muestran en la Tabla 1.

Primer Autor	Editorial	Título	Año de Edición
Borsani	Estrada	Hacer Matemática ½	2018

Tabla 1. Ficha del texto escolar

En la provincia de Santa Fe, el texto corresponde a los contenidos del primer año de la escuela secundaria obligatoria.

En una primera etapa nos proponemos analizar la ubicación de los contextos en el abordaje del tema, el tipo y los registros de representación que utilizan los autores para la presentación de éstos.

Luego, para identificar las conversiones de registros de representaciones propuestas, caracterizamos los tipos de tareas que favorezcan estas traducciones, es decir, analizamos las diferentes acciones que se realizan a la hora de convertir de uno a otro registro. Finalmente, identificamos cuáles son las conversiones que se proponen con mayor frecuencia en las tareas, cuáles con menor frecuencia y cuáles no aparecen.

Para realizar la caracterización, la referencia que utilizamos proviene de los trabajos de Janvier (1987) (citado en Font, 2011). Consideramos los siguientes registros de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Por otra parte, el ejercicio de analizar las tareas contribuyó a ir refinando las categorías de tareas relativas a las funciones desde la perspectiva de las representaciones utilizadas y de las conversiones entre ellas que el proceso de resolución demanda.

En la Tabla 2 presentamos distintas tareas que implican conversiones de una forma de representación a otra y pone de manifiesto la multiplicidad de relaciones que se pueden establecer entre las diferentes formas de representar una función.

Desde/Hacia	**VERBAL**	**TABULAR**	**GRÁFICO**	**SIMBÓLICO**
VERBAL	-	Elaborar una tabla de valores a partir de un relato.	Esbozar gráficamente un relato.	Modelizar un relato por medio de una fórmula.
TABULAR	Realizar un relato a partir de la Interpretación de valores de una tabla.	-	Graficar a partir de los datos de una tabla.	Modelizar mediante una fórmula los datos de una tabla.
GRÁFICO	Realizar un relato a partir de la Interpretación de una gráfica.	Extraer coordenadas de puntos de una gráfica para elaborar una tabla.	-	Determinar una fórmula que se ajuste a la gráfica.
SIMBÓLICO	Realizar un relato a partir de la interpretación de los parámetros de una fórmula.	Elaborar una tabla de valores a partir de una fórmula.	Graficar la fórmula dada.	-

Tabla 2. Tareas que demandan conversiones entre registros.

En cuanto a las demandas cognitivas consideramos la siguiente caracterización:

- Primer Nivel: reproducción de procedimientos presentados como ejemplos en el libro.
- Segundo Nivel: requieren establecer relaciones entre distintos registros de representación.
- Tercer Nivel: explicación o justificación de los resultados.

Discusión de los resultados

En el texto seleccionado encontramos la noción de función en el capítulo 7: *Estudio de funciones: lectura y producción de gráficos, tablas y fórmulas*. En este capítulo se proponen 22 contextos (los autores las denominan Actividades), para el tratamiento del tema. Para cada uno de ellos se formulan distintas tareas. El análisis de los resultados los dividiremos en dos etapas, en la primera describimos los contextos que proponen los autores para el tratamiento del tema y en la segunda caracterizamos las tareas según las conversiones de registros que promuevan.

Primera Etapa: Los Contextos

En una primera etapa analizamos los contextos y volcamos los datos en la tabla, según los siguientes criterios:

<u>Código</u>: Número de orden/página

<u>Ubicación en el abordaje del tema</u>

Introductoria (I)

De desarrollo (D)

Complementaria (C)

<u>Tipo de contexto</u>

Vida cotidiana (VC)

Aplicación a otras áreas del conocimiento (OA)

Matemático (M)

<u>Tipo de registro de representación</u>

Verbal(V)

Gráfico (G)

Simbólico (S)

Tabular (T)

Cantidad de registros usados para presentar el contexto: 1, 2, 3, 4

En la Tabla 3 presentamos los primeros renglones de la planilla de Excel donde relevamos los datos de un total de 22 (veintidós) contextos propuestos en el texto analizado.

Contexto	**Ubicación en el abordaje del Tema**	**Tipo de contexto**	**Tipo de registro de representación**				**Cantidad**
			V	**G**	**S**	**T**	
01/p.98	I	VC	1	1	0	0	2
02/p.99	I	VC	1	1	0	0	2
03/p.99	I	VC	1	1	0	0	2
04/p.100	I	VC	1	1	0	0	2

Tabla 3. Relevamiento de los Contextos

A partir de un análisis inductivo de cada contexto que propone el texto, consolidamos los resultados en la Tabla 4.

Ubicación			**Tipo de contexto**			**Tipo de registro de representación**				**Cantidad de registros de representación**		
I	**D**	**C**	**VC**	**OA**	**M**	**V**	**G**	**S**	**T**	**1**	**2**	**3**
13	4	5	13	6	3	22	16	2	6	3	14	5
59%	18%	23%	59%	27%	14%	100%	73%	9%	27%	14%	64%	23%

Tabla 4. Análisis de los Contextos

Consideramos interesante que el mayor número de contextos propuestos por los autores se ubique en la introducción, esto refleja características de la postura didáctica adoptada por los mismos. Los autores eligen con mayor frecuencia contextos de la vida cotidiana en la propuesta de tareas para el abordaje del tema. El énfasis está puesto en brindar experiencias a los estudiantes para que interpreten contextos nuevos apoyándose en algo que proporcione un marco de referencia inicial, enmarcando este concepto nuevo en lugares familiares para el estudiante que le den sentido.

Otra cuestión interesante que plantean los autores son los contextos matemáticos y en relación con otras áreas del conocimiento, ya que establecen, por un lado, una conexión para mostrar una concepción unitaria de la matemática, estableciendo relaciones entre problemas y conceptos aparentemente dispares y, por el otro, la importancia de la matemática como instrumento de análisis de la realidad a través de un proceso de modelización.

En cuanto a la cantidad de registros de representación que eligen los autores para presentar los contextos vemos que en casi todos presentan más de un registro, con mayor frecuencia dos registros de representación, el verbal y el gráfico. Es decir, se hace un especial hincapié en promover la utilización de diferentes registros de representación y se prioriza el uso de estos dos.

Segunda Etapa: Tareas de conversión

En esta segunda etapa nos dedicamos al análisis de las tareas propuestas para cada contexto analizado en la primera etapa. Este capítulo cuanta con 114 tareas. Estudiamos cada una para identificar las conversiones que demanda su resolución teniendo en cuenta los siguientes criterios:

Código: Número de contexto- Número de tarea /página

Conversión de registro que demanda su resolución

VG: verbal a gráfico
VT: verbal a tabular
VS: verbal a simbólico
GV: gráfico a verbal
GT: gráfico a tabular
GS: gráfico a simbólico
TV: tabular a verbal
TG: tabular a gráfico
TS: tabular a simbólico
SV: simbólico a verbal
SG: simbólico a gráfico
ST: simbólico a tabular

En la Tabla 5 mostramos un ejemplo de los primeros renglones de la planilla de Excel del relevamiento de los datos.

Nº	Tarea	Conversión que demanda su resolución											
		VG	VT	VS	GV	GT	GS	TV	TG	TS	SV	SG	ST
1	01-01/p.98	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	01-02/p.98	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	01-03/p.98	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	01-04/p.98	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 5. Relevamiento de las tareas

En la siguiente tabla observamos las frecuencias, tanto absolutas como porcentuales, de cada conversión de representación en otra. Es importante aclarar que, en algunos casos, una misma tarea demanda para su resolución más de una conversión, como vemos en la Tabla 6 en el primer renglón. Por lo tanto, los totales superan la cantidad de tareas analizadas.

Conversión que demanda su resolución											
VG	**VT**	**VS**	**GV**	**GT**	**GS**	**TV**	**TG**	**TS**	**SV**	**SG**	**ST**
68	14	8	76	5	3	11	9	1	7	4	0
60%	12%	7%	**67%**	4%	3%	10%	8%	1%	6%	4%	0%

Tabla 6. Conversiones que demandan las tareas

Como podemos observar, los autores priorizan las tareas de conversión entre los registros verbal a gráfico y viceversa. Las demás conversiones son muy poco demandadas en la resolución de las tareas presentadas para los contextos que proponen los autores. Esto está en concordancia con el hecho de que la mayoría de los contextos corresponden a la introducción al tema y del tipo de la vida cotidiana, pues, así como dijimos que se destaca una intención de que los estudiantes construyan las nuevas nociones apoyándose en contextos conocidos y familiares, las conversiones, que son un desafío nuevo para cada aprendiz, están sostenidas por registros de representación que le resultan conocidos y familiares.

Según Hitt (2003), el problema en la enseñanza de las funciones no es el escaso trabajo con otras representaciones, sino la inadecuada articulación entre las distintas representaciones. Por lo tanto, en este punto consideramos de suma importancia que el docente en la selección de las tareas y en sus intervenciones en la actividad áulica, plantee experiencias a sus estudiantes que demanden conversiones que aparecen menos frecuentemente.

Como ya hemos mencionado, no sólo pretendemos analizar la conversión que demanda la resolución de cada tarea, sino que también observaremos el nivel de *demanda cognitiva* que exige cada una. En la Tabla 7 se muestran los resultados de este relevamiento.

Niveles de demanda cognitiva		
Primer	**Segundo**	**Tercer**
0	94	20
0%	82%	18%

Tabla 7. Niveles de demanda cognitiva

El texto se caracteriza por tareas con una demanda cognitiva predominante del segundo nivel, es decir requieren que los estudiantes establezcan relaciones entre distintas representaciones de una misma situación para su resolución. Interpretamos esto como una potencialidad del mismo, esto es, el hecho de ofrecer numerosas experiencias de conversión entre registros de representación. Si cruzamos esta información con la obtenida en la Tabla 6, notaremos que en dichas experiencias hay conversiones que aparecen sumamente priorizadas por sobre las demás. Interpretamos que es una información valiosa para los docentes al momento de diseñar propuestas. La selección de tareas para desarrollar la actividad docente en el aula es uno de los roles profesionales que tienen mayor impacto en el proceso de aprendizaje. Según Hitt (2003) la manipulación de representaciones matemáticas por parte de los estudiantes les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto o concepto matemático, y la riqueza de la imagen conceptual construida dependerá de las representaciones que el estudiante haya utilizado. Es en este sentido, la importancia que debe darse al uso de las diversas representaciones matemáticas en la enseñanza de la matemática.

Otra potencialidad que encontramos en la propuesta de los autores en el texto escolar analizado es la presencia de las tareas del tercer nivel que exigen una explicación o justificación de la respuesta o decisión, consideramos que esta perspectiva es importante para iniciar a los estudiantes en las demostraciones matemáticas. Es primordial habituar a los estudiantes a que justifiquen sus decisiones con las herramientas matemáticas que poseen, respaldando las afirmaciones con propiedades conocidas. Como sostiene Dreyfus (2000): “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático" (p.130).

Reflexiones finales

Como ya lo hemos mencionado, es de gran importancia, a la hora de construir la noción de un concepto, que los aprendices realicen conversiones de los registros de representación del mismo. De hecho, para Janvier (1987), el aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión del mismo.

Para ello, tiene relevancia poner en evidencia de las propuestas actuales de los textos escolareas, las características analizadas de los contextos y tareas. El aporte del presente estudio lo consideramos de interés para la selección conveniente de tareas por parte del docente para el abordaje del tema en la escuela secundaria.

El paso de uno a otro registro amplía y reorganiza la información que está implícita en uno de los mismos, si bien es deseable que los estudiantes trabajen las conversiones entre todos los registros de distinto tipo, este trabajo se beneficia con la tecnología. Consideramos que un software de geometría dinámica, como GeoGebra por ejemplo, es un entorno favorable para este propósito. Además, permite automatizar y simplificar algunas de ellas, no obstante, algunas resultan difíciles de automatizar y requieren más trabajo en la clase.

Para continuar con esta línea de investigación nos proponemos el análisis de otros textos escolares actuales, utilizando el esquema presentado en esta comunicación. Además, nuestra intención es fortalecerlo a través del diseño de tareas complementarias y sugerencias para los docentes con el propósito de contribuir positivamente a la construcción del sentido del concepto de función por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime*, *1*(1), 40-55.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido del currículum. En M. Colén, Y. Fraile y C. Vidal, (Eds.), *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. (pp. 125- 133). Barcelona, España: GRAÓ DE Irif, S. L.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Suiza: Peter Lang.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. *Énfasis* (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi (Coord.), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp. 145- 186). España: Graó.

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2003). El carácter funcional de las representaciones. *Annales de didactique et de sciencies cognitives*, (8), 255-271.

INECSE Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2005). *PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencias. Recuperado de: http://pisaparacentroseducativos.es/pdf/Items%20liberados%20Matem%C3%A1ticas.pdf

Mcmillan, J.H. y Schmacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5° edición). Madrid, España: Pearson Addison Wesley.

Penalva, M. y Llenares, S. (2011). Tareas matemáticas en la educación secundaria. En J. Goñi (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas.* (pp. 27- 51). Barcelona, España: Graó.

Ruiz Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y Didáctico* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, (*22*), 1-36.

Spivak, J. (1996). *Cálculo infinitesimal*. Barcelona, España: Reverté.

Vidal, R. (2010). El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo 1910-2010. *Cuadernos de Educación, (*27), 1-21. Recuperado de https://repositorio.uahurtado.cl/bitstream/handle/11242/8979/txt128323.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Trayectoria longitudinal para la iniciación a las ecuaciones

MICAELA MAZZOLA
micamazzola@gmail.com
SILVIA BERNARDIS
silvia.bernardis@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

¿Qué tipo de trabajo algebraico se puede proponer en los primeros años de la escuela secundaria que no solo permita abordar con sentido el tratamiento de las ecuaciones, sino que al mismo tiempo se avance sobre técnicas de resolución?

Esta pregunta guía el siguiente trabajo, cuyo propósito es describir cómo, dentro del enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), se utilizan contextos y modelos para promover el progreso de los estudiantes en la comprensión de la matemática, específicamente de las ecuaciones. En primer lugar, se presentan las características de la EMR relacionadas con el papel de los contextos y modelos en este enfoque. Luego, se presenta parte de un experimento de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008) que realizamos sobre una trayectoria longitudinal para introducirse al trabajo con ecuaciones. Se estudia el uso del modelo de la tira numérica dentro de esta trayectoria longitudinal: de una tira de números que representa un contexto relacionado con la progresión aritmética, se avanza a un conjunto de tiras de números para abordar las operaciones con expresiones algebraicas y a una herramienta que apoya el uso y resolución de ecuaciones.

Introducción

En los diseños curriculares de algunas jurisdicciones la entrada al trabajo algebraico es situada en el inicio de la escuela secundaria, luego de un largo recorrido de trabajo aritmético que se realiza en la escolaridad primaria, y se propone el trabajo con ecuaciones como una posible entrada. En tanto, numerosos investigadores (Panizza, Sadovsky y Sessa, 1997; Rabino, Cuello y De Munno, 2004; Sessa, 2005; Novembre, 2009) manifiestan que, en la mayoría de las prácticas áulicas del nivel secundario, se inicia el tratamiento del álgebra en forma abstracta, prevaleciendo las técnicas de resolución de ecuaciones propuestas por el profesor e imponiendo un lenguaje carente de sentido para el alumno. Una vez que el "mecanismo" (despejar la incógnita) se da por aprendido, se presentan numerosos "ejercicios de" y problemas donde aplican lo visto en forma de reglas, sin establecer relaciones que impliquen una comprensión del problema.

Este objeto se presenta sin tener necesidad de él, lo que provoca que los alumnos rechacen este contenido y lo conciban como una imposición externa: aprenden a escribir y manipular ecuaciones para responder a una demanda de los profesores, sin logran comprender las razones que sostienen su funcionamiento. En consecuencia, la imposibilidad de tener control sobre lo que hacen de modo mecánico implica que las reglas de resolución sean una fuente inagotable de dificultades para los alumnos y los docentes las deben repetir todos los años – y en todos los niveles - ya que los alumnos no las recuerdan o no las saben aplicar.

Podemos distinguir entonces dos problemáticas asociadas a la enseñanza de las ecuaciones. Por un lado, la problemática asociada al dominio de técnicas de resolución y de transformaciones algebraicas. Por otro lado, la problemática asociada al conocimiento más acabado del objeto ecuación, ya que un abordaje centrado solamente en las técnicas de resolución abarca parcialmente al objeto.

En esta dirección, presentamos parte de un experimento de enseñanza, como un tipo de experimento de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). Con el objetivo de elaborar una trayectoria longitudinal en relación con el contenido ecuaciones con una variable, donde no sólo se aborde con sentido el tratamiento de las ecuaciones, sino que al mismo tiempo se avance en la comprensión de las transformaciones que se requieren para resolverlas.

En la ejecución de los experimentos de enseñanza, Cobb y Gravemeijer (2008) distinguen tres fases: preparación del experimento, experimentación en contextos de clase y análisis retrospectivos de los datos generados, los cuales informan sobre el diseño permitiendo su mejora. En esta comunicación nos centramos en la primera de estas fases. Asimismo, nos proponemos ilustrar y describir la construcción, el uso y la evolución de modelos dentro del enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR).

Aportes teóricos

Los lineamientos teóricos que han sido fundamento de este trabajo provienen de la EMR, corriente didáctica iniciada por Hans Freudenthal en los años sesenta.

El uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática. Desde esta corriente "un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado" (Freudenthal, 1991, p. 73). El término "realista" no implica que los contextos necesariamente deban estar restringidos a situaciones de la vida real, sino que refiere a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan *imaginar*.

Otra de las características fundamentales de la EMR es el uso didáctico de modelos. Una forma de ayudar a los estudiantes a obtener una comprensión conceptual de los objetos matemáticos es mediante el uso de modelos como "formas de pensar sobre conceptos abstractos" (Warren y Cooper, 2009, p. 77). Dichos modelos didácticos pueden verse como herramientas de organización y representación de las situaciones problemáticas matemáticas en las que se manifiestan los conceptos matemáticos esenciales y los aspectos de la situación y a través de los cuales la situación concreta se conecta con las matemáticas más formales (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Esto significa que el término "modelo" no se toma de modo muy literal. Materiales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas y símbolos pueden servir como modelos.

Como señalan los autores, los modelos pueden desempeñar la función de tender un puente entre el nivel informal y el formal: pasando de un "modelo de" a un "modelo para". Esto es, se trata primero de un "modelo de" una situación concreta en la que el modelo está muy relacionado con el problema específico y luego va desprendiéndose de la situación hasta evolucionar a un "modelo para" un razonamiento matemático formal, esto es, un modelo más general y descontextualizado, el cual se puede aplicar para organizar matemáticamente situaciones relacionadas afines y nuevas.

En este sentido, los modelos se constituyen como vehículos para promover y apoyar el progreso de "matematización progresiva", característica más general de la

EMR. La evolución ulterior del modelo permite al alumno atravesar progresivamente distintos niveles de comprensión. Gravemeijer (1994, 2004; citado en Zolkower y Bressan, 2012) distingue cuatro niveles en el paso entre un “modelo de” y un “modelo para”: situacional, referencial, general y formal, tanto en el eje horizontal (pasaje de un problema contextual a un problema matemático) como en el vertical (trabajo dentro de la matemática misma) (ver Figura 1).

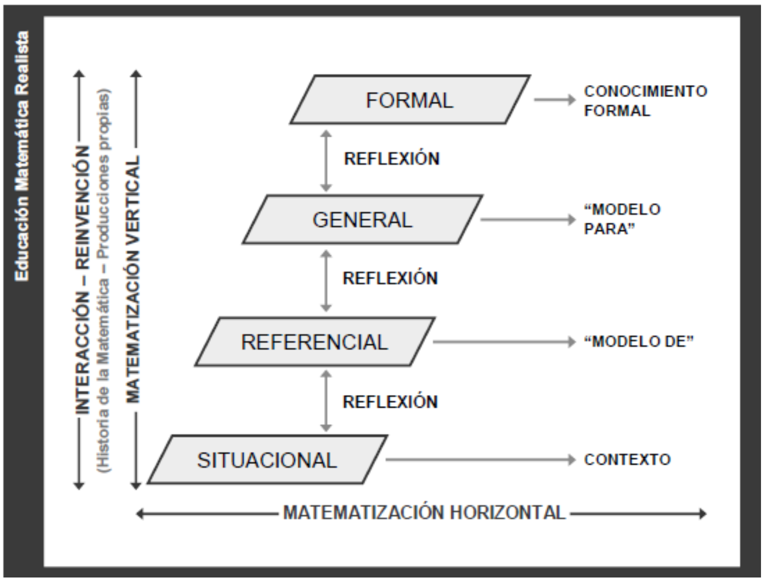


Figura 1. Niveles de matematización (Zolkower y Bressan, 2012)

Tomando como referencia los estudios citados, consideramos las siguientes descripciones para cada nivel. En el nivel situacional, la situación problemática planteada se interpreta y organiza matemáticamente por medio de estrategias informales y nociones intuitivas o anteriormente aprendidas. En el nivel referencial, se inicia el proceso de matematización vertical, donde los estudiantes elaboran modelos gráficos, notaciones, procedimientos y estrategias que esquematizan el problema, pero éstos se refieren de un modo u otro a la situación particular dada.

Continuando el proceso de matematización vertical iniciado, en el nivel general se distancia de toda referencia al contexto y se reflexiona sobre los conceptos, procedimientos, modelos y estrategias utilizados. Se profundiza los aspectos matemáticos a fin de generalizarlos, lo que permitirá a los estudiantes usarlos y reconocerlos como “modelos para” resolver problemas análogos. En el último nivel, el formal, se trabaja en el uso comprensivo de los conceptos, procedimientos estándares y notaciones generales y convencionales, propios de la matemática.

Como menciona Van den Heuvel-Panhuizen (2008), es esta característica de niveles del proceso de aprendizaje lo que da coherencia longitudinal a la trayectoria de enseñanza y aprendizaje.

Primera etapa: el contexto

La siguiente tarea apunta a involucrar a los estudiantes en el trabajo de producir fórmulas para contar colecciones, esto es, para generalizar un procedimiento de cálculo que guarda una regularidad, y dar respuesta a los interrogantes planteados a partir de su lectura y transformación. El trabajo se plantea en forma individual, cada alumno recibirá la consigna con una cuadrícula donde aparecen cuadraditos sombreados con la inicial de su nombre.

Consideramos que esta tarea se enmarca en un contexto realista, dado que constituye un problema imaginable para ser matematizado por los estudiantes.

Tarea 1: Nombre ampliado
Realiza una ampliación de la letra inicial de tu nombre de manera que conserve su forma. Si el patrón continúa, ampliando el número de cuadrados sin deformar la letra, ¿cuántos cuadrados habrá en la 100ª letra?

Por ejemplo (ver Figura 2), si la inicial es la M se entregará la letra de la izquierda y una posible ampliación será la letra de la derecha. Será oportuno discutir con los alumnos sobre qué se entiende con ampliar la letra conservando la misma forma.

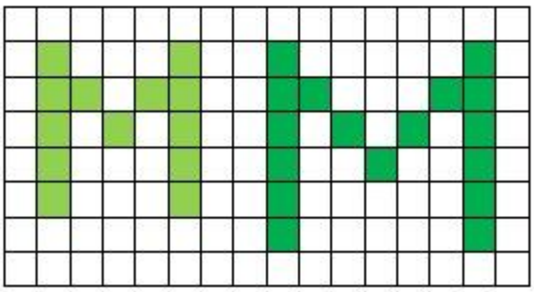


Figura 2. Ejemplo de ampliación de inicial del nombre

Esta tarea inicial permite a los alumnos usar como recurso la imagen que se presenta y el conteo directo, pero a la vez, se espera que se encuentren con la limitación del procedimiento aritmético y surja la necesidad de buscar nuevos procedimientos. La elaboración por parte de los alumnos de las primeras ampliaciones les permite comprender de qué se trata y posibilita la búsqueda de estos nuevos procedimientos.

En este sentido, consideramos que los alumnos la abordarán en un nivel *situacional* al interpretar y organizar matemáticamente la situación por medio de estrategias informales y nociones intuitivas o anteriormente aprendidas.

Segunda etapa: modelo de la tira numérica

La siguiente tarea tiene como objetivo permitir a los alumnos pasar al nivel *referencial*. Se propicia la construcción del modelo de la tira numérica (inspirado en Kindt et al., 2006), el cual esquematiza la progresión aritmética que genera cada letra, pero la resolución sigue refiriéndose a la situación particular dada.

La tarea demanda las siguientes acciones: buscar, expandir, generalizar y describir un patrón numérico, usando palabras y/o símbolos, expresiones y fórmulas. Threlfall (1999) recomienda el uso de patrones repetitivos como un vehículo para trabajar con símbolos, un escalón conceptual al álgebra y un contexto para la generalización. Aquí se presentan patrones lineales dado que el elemento enésimo puede ser expresado como an+b, donde b representa el número inicial de cuadraditos, *n* la cantidad de ampliaciones y *a* el número de incremento de los cuadraditos en cada ampliación. Estos patrones pueden ser crecientes o decrecientes.

En esta tarea, al tener que armar la secuencia, el alumno debe identificar el patrón y luego comunicarlo al tener que expresar cómo lo hizo. Esto se profundiza en las siguientes consignas y se avanza hasta registrarla simbólicamente.

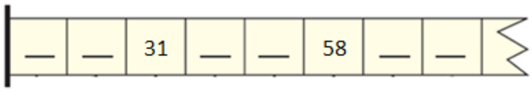
Por otro lado, en términos de Stacey (1989), se encuentran consignas de "generalización próxima" y de "generalización lejana", al preguntar, por ejemplo, por el lugar 10 o por el lugar 1000 de la tira, respectivamente. Mientras la primera permite hacer comprender de qué se trata a partir del conteo, la segunda apunta a enfrentarse con los límites de los procedimientos utilizados y la necesidad de buscar nuevos. Esto incentiva a los alumnos al trabajo con la producción de fórmulas y el uso de la letra como variable.

Tarea 2. Tiras numéricas

1. Completa la siguiente tira con la cantidad de cuadraditos pintados a medida que vas ampliando tu letra:

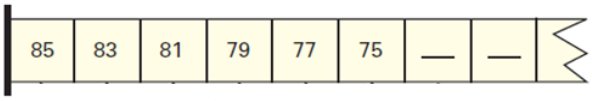
a. ¿Cómo la obtuviste?
b. ¿Qué número aparecerá en el lugar 10 de la tira? ¿Y en el lugar 1000?
c. ¿Estará en la tira el número 100? ¿Cómo lo sabes?
d. Escribe un número grande que nunca aparecerá en la tira. ¿Cómo tienes la certeza de que nunca aparecerá?
e. Escribe una fórmula que te permita calcular la cantidad de cuadraditos sombreados si conoces el número de ampliaciones.

2. Un estudiante completó algunos lugares de la tira de su letra:



a. Halla los números que faltan en la tira.
b. Escribe una regla para esta tira de números
c. ¿Qué número aparecerá en el lugar 10 de la tira? ¿Y en el lugar 1000?
d. ¿Estará en la tira el número 1.229? ¿Y el número 1.460?

3. Un estudiante decidió armar una letra y reducirla de manera que conserve su forma. Luego de hacerlo registro la cantidad de cuadraditos sombreados en esta tira:



a. ¿Cuántos cuadraditos inicialmente tenía su letra?
b. ¿Cuál es la disminución de cuadraditos en cada reducción qué realiza?
c. Con estas reducciones, ¿puede llegar a cero? ¿Por qué?

Al preguntar sobre cómo encontrar un cierto número en una tira, o qué valor de n se necesita para encontrarlo, surgen las ecuaciones del tipo $an+b=c$, donde n representa el número de ampliaciones y el número inicial de la tira corresponde a $n=0$ (ninguna ampliación). Este tipo de ecuaciones favorece la interpretación del signo igual como anuncio de un resultado, uso que se le da generalmente en la escuela primaria. Además, favorece la interpretación del número c como resultado de un cálculo, conformándose como una tarea hallar el valor de n que al multiplicarlo por a y luego agregarle b da c. Las mismas pueden resolverse aritméticamente.

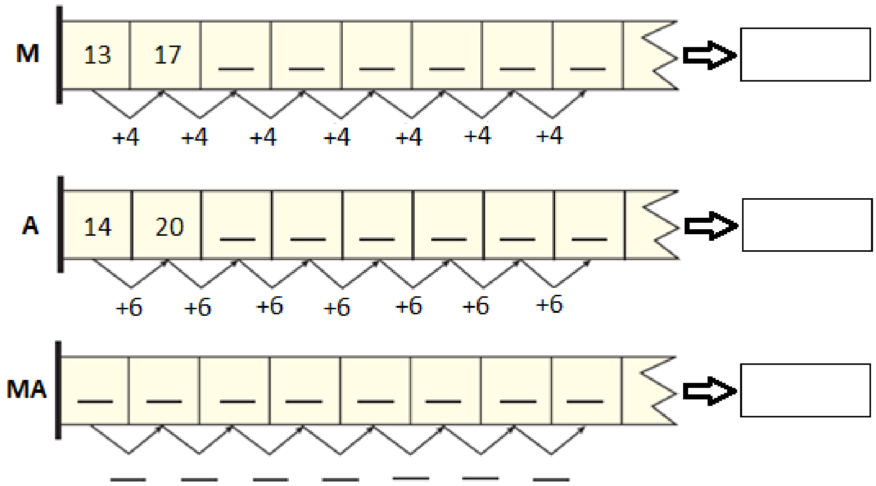
En algunos casos será posible encontrar el valor de n y en otros no, por lo que se construye la noción de ecuación como función proposicional, esto es como proposición que puede tomar dos valores de verdad -verdadera o falsa- según los valores particulares de la variable que se considere y su conjunto solución como el conjunto de valores de las variables que hacen que la proposición sea verdadera.

Tercera etapa: modelo para operar con expresiones algebraicas

En la siguiente tarea aparecen las tiras numéricas conectadas a las operaciones con expresiones lineales. Mediante un trabajo de exploración, reflexión y generalización, los alumnos serán capaces al final de operar expresiones de manera formal (es decir, mediante una manipulación simbólica).

Tarea 3. Operar con tiras

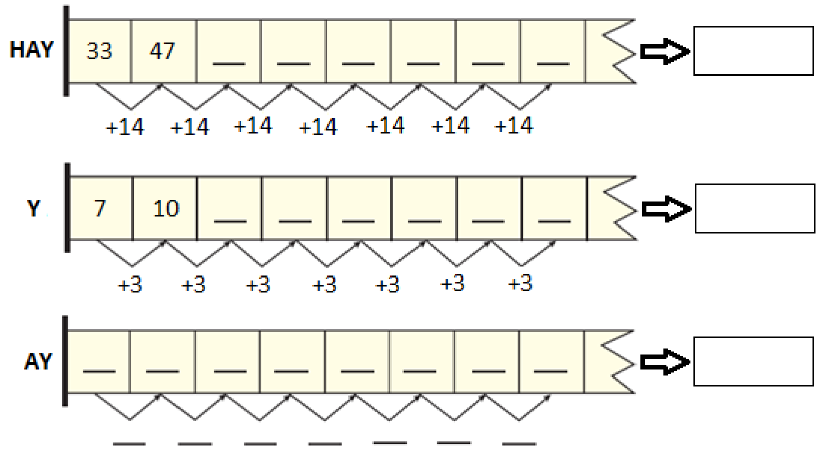
1. Un grupo de estudiantes empezó a formar sílabas y a ampliarlas. Empezaron con MA y registraron en las siguientes tiras algunos datos:



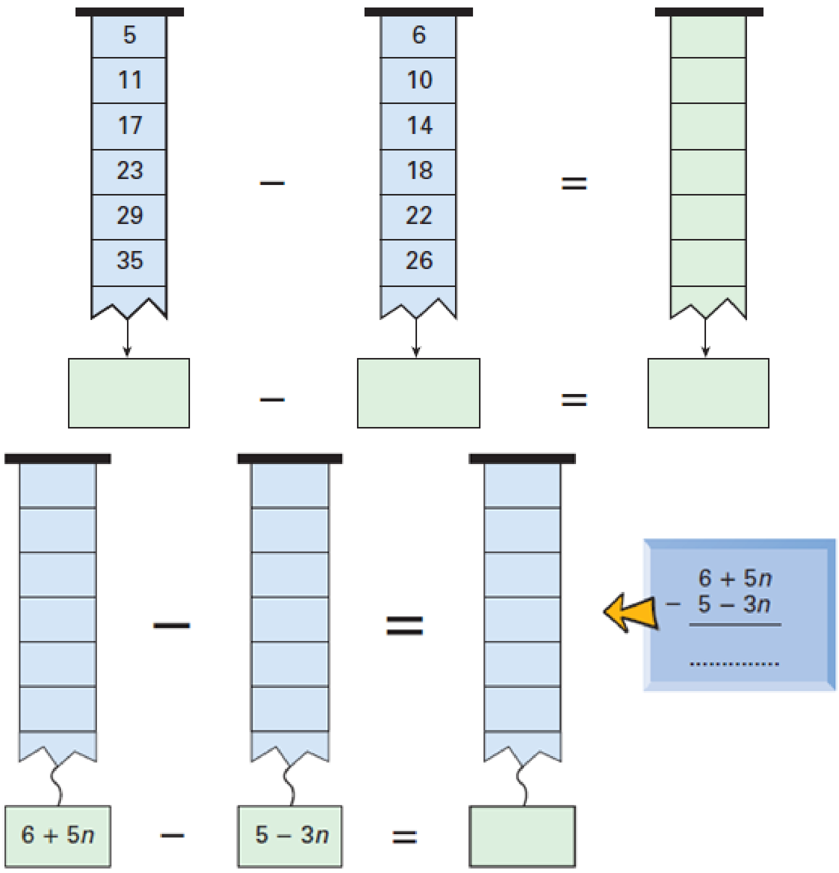
a. Completa y compara estas tres tiras de números.
b. Escribe expresiones para las tiras de números M, A y MA (M+A).

2. La expresión de la tira T es $7 + 3n$ y la expresión de la tira E es $11 + 5n$. En ambos casos, n empieza en cero. Pablo quiere hacer una expresión para la tira TE. Primero hace las tiras T y E. Luego suma los números de las dos tiras para averiguar los números de la tira TE. Después hace la expresión de la tira TE. Muestra los tres pasos de la solución de Pablo. Andrea opina que ella tiene una manera más rápida de encontrar la expresión. ¿Qué podría tener Andrea en mente?

3. Un grupo de estudiantes armó algunas expresiones de monosílabos para que otro grupo le quite una de las letras y forme otro monosílabo. Para empezar, entregaron el monosílabo HAY y tienen que formar AY. En las siguientes tiras se registran algunos datos:



a. Completa y compara estas tres tiras de números.
b. Escribe expresiones para las tiras de números HAY, Y y AY (HAY – Y).
4. Completa los números y las expresiones que faltan:



5. Reflexiona: Escribe una explicación para un compañero de clase que describa la forma en que se pueden sumar y restar expresiones.

Conjeturamos que operar aquí resultará a los alumnos relativamente sencillo. Esto se debe a que la letra conserva la referencia al contexto, hecho que permite a los estudiantes apoyarse en él para dotar de sentido a las operaciones: por un lado, se suman – o restan – los cuadraditos iniciales; por el otro, se suman – o restan – los cuadraditos que se agregan.

Al surgir estos aspectos generalizables de las estrategias, se avanza al nivel *general* donde se da lugar al modelo de la línea numérica como "modelo para" realizar las operaciones entre las expresiones lineales. Consideramos que la consigna 5 permite avanzar al nivel *formal*, al trabajar con procedimientos generales y convencionales. Esta formalización permitirá aplicar la estrategia en futuras consignas, posibilitando a los alumnos comprender y controlar el sentido de las leyes de transformación que necesitarán posteriormente para resolver ecuaciones.

Cuarta etapa: modelo para resolver ecuaciones

Se propone un momento de trabajo grupal con la siguiente consigna.

Tarea 4. Igualar tiras Un estudiante expresa que su letra tiene la misma cantidad de cuadrados que la de su compañero, cuando tienen la misma cantidad de ampliaciones, ¿es esto posible? Explica tu respuesta.

De esta manera, se presentan las ecuaciones definidas como igualdades en las que intervienen variables, rompiendo así la entrada clásica al tratamiento de dicho objeto matemático que considera la letra como incógnita, es decir, como un valor desconocido que trae como consecuencia que los alumnos tengan dificultades en las técnicas de resolución y finalmente "descargue de sentido" al mismo (Sessa, 2005).

Específicamente, surgen las ecuaciones del tipo $an+b=cn+d$, donde n representa el número de ampliaciones y el número inicial de la secuencia corresponde a $n=0$. Este tipo de ecuaciones favorecen la interpretación del signo igual como equivalencia de expresiones: una ecuación de este tipo favorece la interpretación del signo = como comparación de elemento a elemento entre ambas tiras, siendo la tarea encontrar los valores de n que verifican la igualdad.

Dada la variedad de fórmulas, la tarea lleva a analizar y discutir sobre la cantidad de soluciones que poseen las ecuaciones que se pueden establecer, así como hallar él o los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad. Para responder esta última cuestión, los estudiantes pueden apoyarse en la lectura y comparación de información que dan las tiras de números y sus expresiones. Se evita el "pasaje de términos" o las leyes de monotonía, sino que se van elaborando nuevas estrategias para la resolución de las ecuaciones.

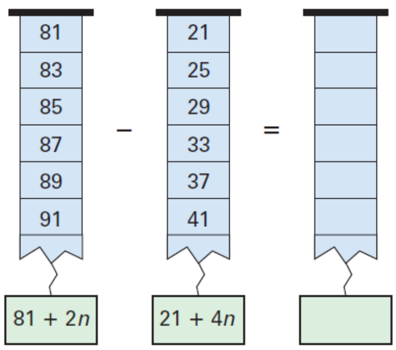
Los alumnos compararán de a pares los números correspondientes y empezarán a construir estrategias con sentido a partir de la generalización de conocimientos y relaciones. Por ejemplo,

- Dos letras que tienen igual incremento de cuadraditos en cada ampliación pero distinta cantidad inicial de cuadraditos, nunca tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de ampliaciones.
- Cuando una letra tiene mayor incremento de cuadraditos en cada ampliación y mayor cantidad inicial de cuadraditos que otra letra, nunca tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de ampliaciones.
- Dos letras que tienen igual incremento de cuadraditos en cada ampliación e igual cantidad inicial de cuadraditos, siempre tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de ampliaciones.
- Dos letras que tienen una diferencia de uno en el incremento de cuadraditos en cada ampliación y una diferencia de uno (en el otro sentido) en la cantidad inicial de cuadraditos, tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos en la primera ampliación.

Poner en cuestión la noción de conjunto solución y estudiar la cantidad y la existencia o no de soluciones, permite profundizar la noción de ecuación como función proposicional. Si bien esta tarea permite iniciar a los estudiantes en la elaboración de sus propias técnicas, también pueden escribir las tiras de las letras en cuestión hasta que en pocos pasos encuentren números iguales. Por ello, la siguiente tarea apunta a hacer avanzar el modelo de la tira numérica como modelo para resolver ecuaciones desde las operaciones con expresiones: se introduce el método de la "diferencia igual a *0*" como un método para resolver ecuaciones.

Tarea 5. Resolver ecuaciones

Aquí ves una resta de dos tiras de números:



a. Completa los números y la expresión que faltan en la tira de las diferencias.

b. ¿Después de cuántos pasos aparecerá el 0 en la última tira?

c. ¿Para qué valor de n es $81 + 2n$ igual a $21 + 4n$?

Reflexiones finales

Esta propuesta pone en evidencia cómo los contextos y los modelos pueden usarse didácticamente para iniciar a los estudiantes en el trabajo con ecuaciones. La perspectiva longitudinal demuestra que el modelo que surge en este caso (la tira numérica) se desarrolla progresivamente y de distintas formas en puntos diferentes a lo largo de la trayectoria. Entendemos que la evolución ulterior del modelo permitirá lograr un conocimiento más acabado y profundo de las ecuaciones al trabajar sobre el sentido del objeto en cuestión y las técnicas de resolución de manera simultánea.

Sostenemos que un trabajo inicial mediante el uso de este modelo aporta sentido al objeto matemático ecuación y a uno de los posibles métodos de resolución. Además, serviría de sustento para etapas sucesivas en la algebrización progresiva de las producciones de los estudiantes.

La próxima etapa de la investigación es la experimentación en contextos de clase de la propuesta.

Referencias bibliográficas

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh, y J. Y. Baek, (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching (*pp. 68-95). Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ministerio de Educación (2009). *Las letras, las ecuaciones y las funciones*. Buenos Aires, Argentina: DINIECE. Recuperado de http://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2016/04/Las-letras-las-ecuaciones-y-las-funciones.pdf

Kindt, M., Roodhardt, A., Dekker, T., Wijers, M., Spence, M. S., Simon, A. N., Pligge, M. A. y Burrill, G. (2006). Patrones y figuras. EWisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Las matemáticas en contexto*. Chicago, EEUU: Encyclopædia Britannica, Inc.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1997). *Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito*. Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires.

Rabino, A., Cuello, P. y De Munno, M. (2004). Aprehender álgebra utilizando contextos significativos. *Revista Premisa*, (22), 36-42.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, (20), 147-164.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in he Teachin and Learning of Mathematics*. Londres, Reino Unido: Cassell.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, (54), 9–35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: Un recorrido guiado. *Correo del maestro*, (149), 23-54. Recuperado de: https://www.correodelmaestro.com/anteriores/2008/octubre/incert149%20.htm

Warren, E. y Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, (21), 76–95.

Zolkower, B. y Bressan, A. (2012). Educación Matemática Realista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.175-200). Villa María, Argentina: Universidad de Villa María y UNGS.

Modelización de funciones mediante una experiencia con recipientes

NATALIA JONTOR

MARÍA ANGÉLICA ZURBRIGGEN

ISABEL ZURBRIGGEN

mazurbriggen@gmail.com

Instituto Superior del Profesorado N ° 6

Escuela de Enseñanza Técnico Profesional N ° 631

Resumen

Actualmente la modelización matemática es considerada una de las actividades centrales para la enseñanza de la matemática, aportando a los estudiantes un mayor acercamiento a la disciplina y a la construcción de sentido de los contenidos. Este trabajo presenta una propuesta y su análisis para abordar funciones en quinto año del nivel secundario, basada en una experiencia con recipientes de distintas formas e igual capacidad. Se pretende que los alumnos experimenten un fenómeno de la realidad y modelicen determinando la función que mejor se ajusta a la situación. De este modo, se espera que (re)signifiquen conceptos y se acerquen al quehacer matemático. Además, se les brinda la posibilidad de utilizar el GeoGebra como apoyo para la actividad.

Fundamentación

Es común escuchar a los estudiantes y a la comunidad en general, referirse a la matemática, como algo ajeno a la vida cotidiana y difícil de comprender. Es entonces que la modelización matemática (MM) surge como una alternativa pedagógica para acercar al alumno al quehacer matemático, es decir que "hagan matemática". En este sentido se entiende al igual que Saiz (1996) que:

> Hacer matemática es buscar soluciones a problemas, pero también ponerse de acuerdo sobre esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, discutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realizan [...]. (Saiz, 1996, p. 116)

Desde esta mirada, la MM constituye una herramienta para la resolución de problemas. Sadovsky (2005) sostiene que modelizar es un proceso que atraviesa distintos momentos, como: recortar una problemática de la realidad, identificar un conjunto de variables pertinentes, generar relaciones entre las variables, elegir una teoría para abordar y producir un conocimiento nuevo. De este modo, se le otorga a la actividad condiciones similares a las que la comunidad científica realiza cuando produce matemática. Pensar la clase de matemática desde esta postura ofrece al alumno que se haga cargo de la toma de decisiones, de recursos, validando y confrontando con sus pares, reflexionando sobre lo realizado, brindando un valor formativo que va más allá de lo disciplinar.

A su vez, Blomhøj (2004) sostiene que:

> Las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuales construir importantes conceptos matemáticos. Además, las competencias para establecer, analizar y criticar procesos de modelización y el posible uso de los modelos es una meta educativa, por derecho propio, de la enseñanza de la matemática en la educación general (p.20).

De esta postura se entiende al proceso de modelización como cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención del uso de éste, conduce a una redefinición de este.

Para alcanzar este tipo de trabajo en el aula, es necesario establecer objetivos y actividades acordes. Rodriguez y Barreiro (2018) sugieren que una clase responde al sentido completo de la MM cuando el docente propone a los estudiantes una situación a modelizar. Esto implica que el alumno estará a cargo de la construcción del modelo, involucrándolo en la resolución de un problema.

Por ello, es fundamental al planificar la clase que la situación resulte factible para llevar al aula. En este sentido Barbosa (citado en Villareal, Esteley y Mina, 2010), plantea que existen diversos tipos de actividades que pueden proponerse para abordar la MM, a saber:

a) El docente presenta la situación-problema con la información necesaria para resolverla. A partir de este, los alumnos la resuelven, lo que podría resultar ser un problema para los estudiantes, pues ellos no saben cómo resolverla. En este caso, la propuesta no respetaría el sentido total de la MM.

b) El profesor propone una situación de la realidad, en la cual los estudiantes deben buscar los datos y elaborar la información necesaria para resolverla. Aquí la situación sería un problema y se respetaría el sentido de la MM.

c) El docente promueve que los estudiantes elijan, formulen y resuelvan el problema vinculándolo con un tema no matemático. En este caso, se genera el sentido completo de la MM.

La elección dependerá del contexto educativo en el que se trabaje, de la experiencia que el docente y los alumnos tengan en modelización; de los objetivos perseguidos en el curso, de los tiempos, entre otros. La propuesta que se presenta en este trabajo se enmarca en la segunda opción.

Por último, debe aclarase que se promueve el uso de *Geogebra*, como un asistente que enriquece y favorece el proceso de modelización, el trabajo matemático, y en particular, la formulación y validación de conjeturas. El software permite graficar y realizar diversos ajustes de funciones, contribuyendo a que el alumno determine la mejor opción en cada situación, como así, también verificar los supuestos realizados. En este sentido, González (2001) plantea que un software de geometría dinámica interpreta lo que realiza el usuario y devuelve una información sobre su producción que puede usarse para avanzar en la construcción de conocimientos. La comunicación con el usuario se basa en la visualización que, además, es dinámica. Para ello, Balacheff (2000) sostiene que este tipo de software no sólo permiten un aprendizaje diferente sino también una enseñanza distinta. Las nuevas tecnologías permiten a los alumnos generar nuevas relaciones con los conceptos matemáticos, pero implica modificar el tipo de matemática a enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas.

Objetivos de la propuesta

La actividad se propone para alumnos de quinto año del nivel secundario con los siguientes objetivos:

- Resignificar y apropiarse del concepto de función y de las funciones involucradas.
- Explorar, formular y validar conjeturas.
- Modelizar funciones mediante un fenómeno, coordinando diferentes registros de representación.
- Generar una reflexión sobre el alcance de cada modelo como una buena oportunidad para la construcción de significados compartidos.

Cabe aclarar que esta actividad podría desarrollarse para introducir los conceptos involucrados como una primera aproximación en años anteriores, pero con otros objetivos y forma de trabajo.

Contenidos mínimos

Para desarrollar las actividades, se espera que los estudiantes cuenten como conocimientos mínimos los siguientes:

- Ubicación de un punto en el plano de sistemas de ejes cartesianos.
- Determinación de la ecuación de una función a partir de diferentes datos.
- Relaciones entre variables: proporcionalidad directa e inversa. Explicitación y análisis de las propiedades.
- Funciones lineales y no lineales.
- En relación con las TICs: Conocimientos básicos en el manejo de *GeoGebra*, documentos de textos.

Propuesta y forma de trabajo

A partir de una experiencia sencilla de realizar relacionada con la realidad y utilizando materiales simples se pretende que los estudiantes se apropien del problema y se involucren en el proceso de modelización.

Previamente se les pide traer a cada grupo vasos de diferentes formas e igual capacidad, como mínimo tres, y botellas de plástico con tapas (en caso de que la escuela no cuente con laboratorio). Para comenzar con la experiencia se presenta lo siguiente:

> Experimentando…
>
> Con los recipientes de diversas formas que cada grupo dispone, se desea averiguar:
>
> La representación del llenado de agua, de cada uno de los recipientes con diferentes formatos, a medida que transcurre el tiempo con respecto a la altura que alcanza el líquido en el envase (se sugiere pensar una estrategia que permita el llenado de cada recipiente con una velocidad lo más constante posible).
>
> Encontrar una posible relación, que permita predecir un modelo matemático de cómo será la gráfica y fórmula si se mantiene el formato del recipiente, aunque varíe el tamaño (ya sea más grande o pequeño).
>
> Analizar: ¿Qué variables intervienen en esta situación? ¿Qué relación y diferencias encuentras en el llenado de los distintos recipientes? ¿Se les ocurre alguna herramienta matemática para poder utilizar y comparar lo que va ocurriendo con el llenado de los distintos envases a medida que transcurre el tiempo? ¿Qué sucede si se mantiene la forma y los recipientes se duplican, triplican o más en su tamaño?
>
> Consigna de trabajo:
>
> En grupos de tres o cuatro alumnos llevar adelante la propuesta y analizarla.
>
> Elaborar un escrito que dé cuenta del camino recorrido, las preguntas que se formularon, las dificultades que surgieron, los errores y aciertos, los modos de proceder, los recursos utilizados y las conclusiones obtenidas.

Cabe aclarar que se promueve y brinda la posibilidad de utilizar *Geogebra* desde celular o netbook, aunque no es obligatorio, ya que también se habilita que utilicen sólo lápiz y papel. En caso de utilizar el software se ofrece ayuda para facilitar el manejo de algunas herramientas de éste (Anexo 1).

Se pretende que al finalizar el trabajo cada grupo realice una puesta en común, comentando dificultades, aciertos, errores, ideas y resultados alcanzados, de modo de fomentar un debate y alcanzar acuerdos de manera colectiva.

Análisis de la propuesta

La secuencia expuesta responde a los lineamientos propuestos por Blomhøj y Højgaard Jensen (2003, citado por Blomhøj, 2004, pp.23-24), quienes destacan las siguientes actividades dentro del proceso de MM:

- Formulación del problema: El mismo se presenta a través de la realización de la experiencia, la cual requiere ser comprendida, y además buscar la estrategia más adecuada que permita llevarla adelante y obtener datos de acuerdo con lo pedido.

- Sistematización: En esta situación se presenta varias variables en las cuales hay que analizar los valores que pueden tomar los mismos. Los alumnos con la guía del docente tendrán que reconocer que variables son relevantes y analizar su dominio de acuerdo con la situación, recopilar los datos necesarios para poder plasmar la situación en una gráfica.
- Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático: Esto se evidencia en la realización de los gráficos que obtienen según la experiencia de cada grupo y en el análisis que se realice de cada una de las funciones obtenidas.
- Uso de métodos matemáticos: Se advierte en la utilización de los distintos conocimientos previos que tienen sobre los diferentes tipos de función.

También responde a lo propuesto por Barbosa (2001, citado en Villareal, Esteley y Mina, 2010), ya que el docente propone un fenómeno de la vida diaria (el llenado de vasos) para analizar y experimentar, pero los alumnos son los que deben hacerse cargo de la situación, tomar decisiones, recaudar datos, y elaborar la información necesaria para resolver la situación. De este modo, la actividad permite realizar el proceso completo de MM, respetando el sentido de ésta, propiciando una apropiación del problema y del quehacer matemático.

Cabe aclarar que de acuerdo con el tipo de recipiente que tenga cada grupo, pueden generarse diversas discusiones y obtener diferentes gráficas y fórmulas. Un factor para considerar es la cantidad de datos que se tome, ya que cuantos más valores se obtengan, se logrará un mejor modelo y permitirá obtener una gráfica más precisa. A su vez, para establecer la relación entre la altura y tiempo, se considera que la velocidad de llenado es constante, pero para ello se tiene que encontrar una estrategia adecuada.

Por lo expuesto, este tipo de trabajo contribuye a representar un mismo objeto matemático de distintas maneras, lo que conforma un conocimiento más acabado del mismo. En particular, respecto de la noción de función, se trata de trabajar su aspecto relacional en distintos registros de representación-tablas, gráficos, fórmulas- resaltando su valor instrumental para la matemática y para otras ciencias y favoreciendo la comprensión del concepto.

Posibles procedimientos e intervenciones

Si bien este tipo de actividades permite generar diversas estrategias y modos de resolución, en este apartado se anticipan algunos procedimientos que podrían realizar los alumnos. En primer lugar, se detallan los procedimientos adecuados y esperados, y luego algunos incorrectos, con las posibles intervenciones para favorecer el avance de estrategias y conocimientos.

Procedimientos adecuados

A continuación, se exponen los procedimientos esperados, "ideales y correctos", a saber:

- Encontrar una manera eficaz de lograr una velocidad de llenado constante en el recipiente.
- Tomar la cantidad de datos suficientes para lograr una conjetura óptima; observando que en algunos casos se necesita mayor cantidad de información y si es necesario, realizar nuevamente o varias veces la experiencia.
- Uso de los instrumentos de medición correcto, tanto de la altura como del tiempo.
- Ser consciente que en la experiencia siempre hay un margen de error en los resultados, que son aproximaciones.
- Representación de la gráfica apropiada, tanto en la relación entre las variables como en la escala elegida.
- Realizar diversos ajustes con *GeoGebra* y determinar el modelo que mejor se aproxime.
- Obtener una modelización conveniente para cada situación, arribando a una fórmula aproximada o estableciendo una descripción adecuada, generalizando para cualquier tamaño del recipiente de acuerdo con su forma.
- Interrogarse, por ejemplo: ¿Qué sucede si en vez de altura – tiempo se establece volumen – tiempo o capacidad – tiempo? O ¿Qué sucede si la velocidad no es constante?

Ejemplo de una situación posible

Si el vaso utilizado tiene forma de cono truncado invertido, los estudiantes podrían proceder de la siguiente manera:

a) Volcar agua en la botella y realizar una perforación en la tapa. Colocar una regla u otro instrumento de medición que permita visualizar la altura que va alcanzando a medida que transcurre el tiempo en el vaso. Al colocar el agua en el recipiente posicionando la botella en forma vertical para que la presión con la que salga sea proporcional. (Ejemplo: colocar agua en una botella de 2 litros y realizar una perforación pequeña, al voltear la botella el llenado en un principio es constante, los primeros minutos, algo que no sucede si queda poca agua en la botella.)

b) Tomar varias mediciones, por ejemplo, cada 0,5 cm.
c) Repetir la experiencia para verificar y/o modificar los valores obtenidos.
d) Realizar una tabla como la siguiente (Tabla 1).

Tiempo (seg)	Altura (cm)
0	0
4	0,5
8	1
11	1,5
14	2
17	2,5
19	3
21	3,5
23	4

Tabla 1. Resultados posibles de las mediciones

e) Construir una lista de puntos, ya sea en papel o en *GeoGebra*, como la que se muestra en la Figura 1.

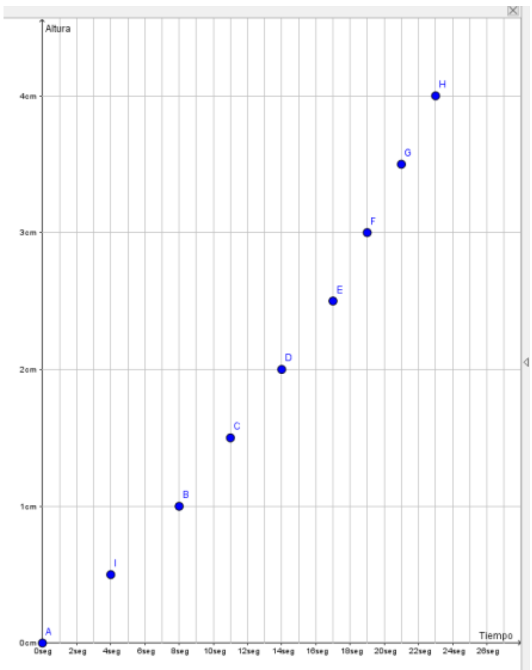


Figura 1. Ejemplo de gráfico de puntos

f) Unir los puntos o realizar diversos ajustes en *GeoGebra* para explorar diversas posibilidades, obtener y conjeturar una aproximación a la gráfica, como se presenta en la Figura 2.

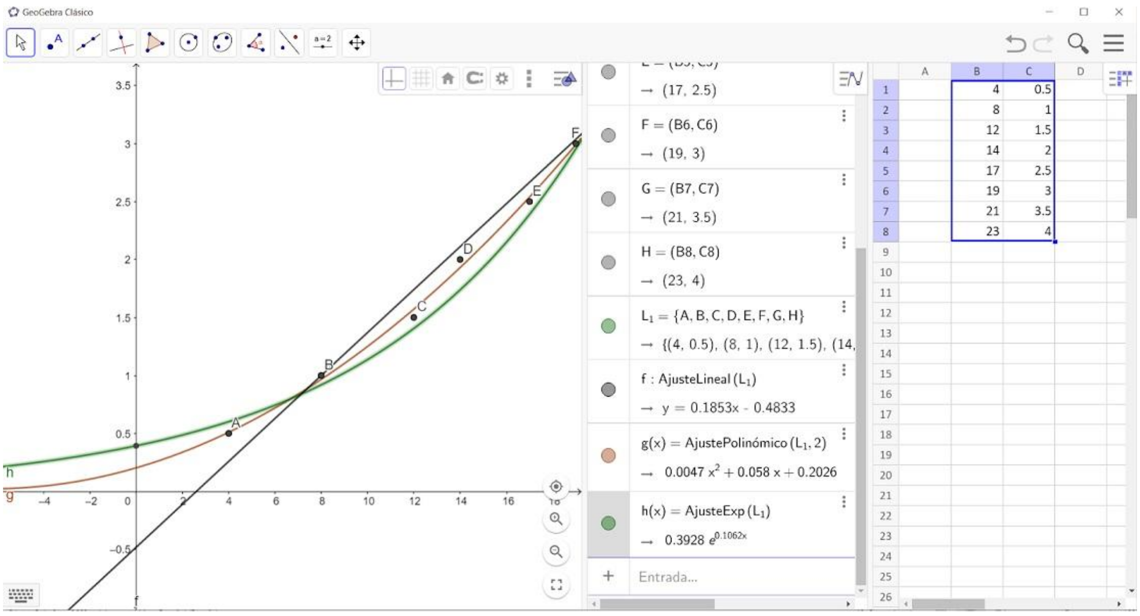


Figura 2. Ejemplo de curvas que aproximan a la gráfica de puntos

A partir del gráfico anterior, los estudiantes pueden determinar que de las diversas funciones y ajustes propuestos por el software, la función cuadrática es la que mejor se aproxima, incluso a pesar de que no se encuentran todos los puntos de la lista en la gráfica. A su vez, teniendo en cuenta la situación dada, deben considerar el dominio correspondiente y por lo tanto sólo tomar la rama positiva de la parábola.

e. De lo conjeturado podrán obtener una fórmula, usando algunos de los puntos, Por ejemplo, se considera el vértice (0,0) y un punto cualquiera, (8,1). Al reemplazar en la fórmula general de la función canónica, se obtiene una aproximación de la parábola trazada; es decir:

Sea $f(x) = a.(x-x_v)^2+y_v$ (se reemplazan los datos obtenidos)

$1=a.(8-0)^2+0$ (se despeja para obtener el valor de a)

$1/64=a$

De esta manera se obtiene la expresión $f(x)=1/64 \, . \, x^2$.

Otra posibilidad es que seleccionen tres puntos cualesquiera y reemplacen en la fórmula, generando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y al resolverlo, determinen la expresión buscada.

f. Verificar con los demás valores para ver si se obtiene un valor aproximado y reformular en caso de ser necesario, para obtener un mejor ajuste.

De esta manera se alcanza un modelo matemático para la situación dada, pero pueden presentarse otras maneras de obtenerlo. Asimismo, pueden generarse diversas fórmulas según los puntos seleccionados, lo cual amerita la discusión sobre la elección de éstos, la toma de decisiones, los errores de medición durante la experiencia y la manera de encontrar el modelo que mejor se aproxima a los datos. En esta situación podrían generarse intervenciones como: ¿Verificaron si los puntos satisfacen la ecuación? ¿Se obtienen la misma fórmula si consideran otros puntos? ¿Por qué? ¿Cómo deciden qué puntos considerar?

Procedimientos no adecuados

En este apartado se mencionan algunas resoluciones que probablemente se presenten que, aunque sean incorrectas, son valiosas para recuperar, generar reflexión y analizar con los estudiantes. De este modo, se permite reformular lo realizado, trabajar sobre los errores y comenzar nuevamente el ciclo de modelización, y así, construir un modelo que mejor se acerque a la situación. Son situaciones que favorecen *otros aprendizajes* que seguramente no aparecerían si todos resuelven correctamente y/o si en lugar de realizar la experiencia, ya se brindan los datos. Algunos procedimientos incorrectos pueden ser:

- La estrategia que utilizan es inadecuada para lograr una velocidad de llenado constante.
- Uso inexacto de los instrumentos de mediciones y mayor error en los resultados.
- No tomar suficientes datos para la construcción de la tabla de valores o no tomar como dato el valor *(0,0)* puede llevar a conclusiones erróneas.
- En la tabla de valores y/o en la representación gráfica establecer la relación de dependencia de manera inadecuada.
- Utilizar una escala de valores inadecuada al representar los valores de la tabla obtenidos y/o no establecer una escala de valores.
- Confundir altura con volumen o capacidad del recipiente.

- Obtener una conjetura incorrecta del modelo funcional, es decir, suponer que una función responde a la situación, y existe otra que se aproxime más.

Ejemplo de experiencia con equivocaciones para la reflexión

Como analizamos anteriormente, si el vaso tiene forma de cono truncado invertido, la conclusión a la que deben llegar es que la función que más se aproxima es una rama de una parábola. Para llegar a ello, pueden surgir varios obstáculos que deberán superar, como, por ejemplo:

- No tomar suficientes datos para la construcción de la tabla de valores o no tomar como dato el valor *(0,0)*. Si el vaso es cilíndrico, dos puntos son suficientes para obtener la fórmula, ya que el modelo es lineal, pero si es un cono truncado o de forma esférica, etc., resultará necesario contar con más información. Si se presenta esta situación, habilita a generar una discusión sobre la cantidad de puntos a tomar. Para ello, pueden realizarse intervenciones con preguntas como: ¿Son suficientes los datos utilizados para poder obtener una gráfica de la experiencia? ¿Cuántos puntos son necesarios para hallar una recta? ¿Yuna parábola? ¿Qué sucede con otras funciones? ¿Consideran el momento inicial? A su vez, se puede indagar en plenario cuántos puntos obtuvieron en cada grupo y reflexionar acerca de qué resulta conveniente.
- Conjetura incorrecta de modelo funcional. Una situación posible que puede presentarse es si los estudiantes recopilan, por ejemplo, datos como los de la Tabla 2, grafican los puntos, y los unen (Figura 3). A partir del gráfico, pueden suponer que la función que mejor se ajuste es lineal, lo que los conduce a buscar la expresión de ésta a partir de dos puntos, obteniendo un modelo incorrecto.

Tiempo	Altura
8	1
11	1,5
14	2
17	2,5
19	3
21	3,5
23	4

Tabla 2. Ejemplo de datos

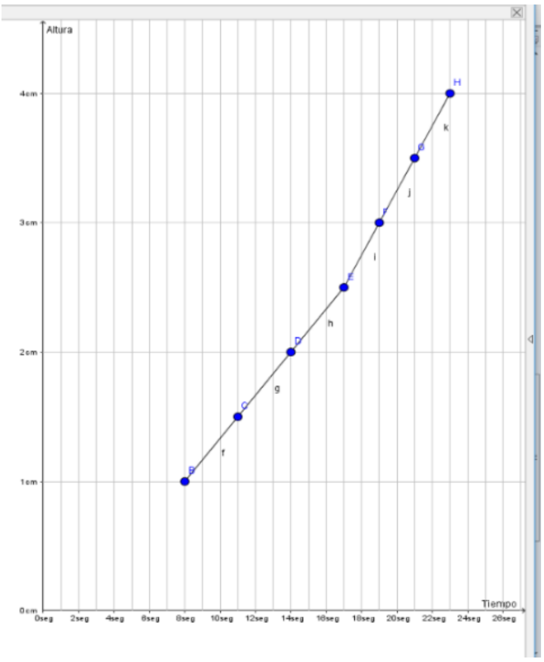


Figura 3. Gráfico con datos de Tabla 2

Esta situación permite reflexionar sobre la necesidad de verificar la fórmula, ya que manifiesta que no siempre lo que “vemos a simple vista” es válido. A su vez, contribuye a buscar y analizar otras funciones posibles, para luego determinar la que se ajuste mejor. Para propiciar la reflexión pueden realizarse preguntas como las siguientes: ¿Es la única función que probaron? ¿Existe otras funciones que se aproximen a los puntos? ¿Consideran que la expresión obtenida responde al fenómeno realizado? ¿Los demás puntos verifican la expresión obtenida? ¿El vaso se llena proporcionalmente? ¿Qué relación observan con los valores que obtuvieron?; ¿Observaron alguna regularidad numérica? ¿Cuántas veces realizaron la experiencia? En caso afirmativo, ¿coinciden los valores obtenidos?

En los ejemplos expuestos, se evidencia la necesidad de revisión y reflexión, ya sea con procedimientos adecuados o con errores, lo que otorga a la actividad una valiosa posibilidad de hacer matemática, donde el error ocupe un lugar significativo, que permita reformular y lograr nuevos aprendizajes.

Conclusiones

La modelización matemática en el aula permite generar una reflexión y un cambio de mirada sobre el trabajo áulico y lo que se espera que los estudiantes manejen respecto del saber y quehacer matemático.

Si bien el tipo de actividad propuesta insume mayor tiempo, favorece una actitud protagónica en el alumno, acercándolo al quehacer matemático. Además, permite generar conexiones con fenómenos reales, como así también entre distintos temas y áreas de la matemática y con otras ciencias.

Tal como plantea Blomhøj (2004):

> la modelización matemática es una tarea difícil. El docente tiene que colocar una situación donde los alumnos puedan trabajar con un fenómeno o situación de la vida diaria que les sean familiares y que les permita poner en juego su conocimiento matemático en un proceso de modelización. (p. 28)

Sadovsky (2005) sostiene que la modelización favorece el trabajo matemático de una manera mucho más integrada en la medida que posibilita ver el funcionamiento de problemas, técnicas, representaciones y demostraciones.

De lo expuesto, se considera que esta propuesta contribuye, mediante la MM a brindar un nuevo sentido de aprender y enseñar matemática ya que:

- Enfrenta a los alumnos a problemas de la realidad, cuestionar y detectar cómo el conocimiento matemático colabora en dar respuesta.
- Brinda a los alumnos y a los docentes el resignificar y profundizar los conocimientos matemáticos.
- Promueve en el alumno una construcción con sentido de los conceptos tratados, acercándose más a la disciplina y relacionándola con la realidad al quehacer matemático.
- Permite al docente desarrollar la propuesta desde otro lugar y al alumno en un rol protagónico, en donde experimenta, indaga, plantea conjetura, debate y suscita el trabajo colaborativo.
- Despliega el trabajo con los conocimientos previos, revisar y replantear las actividades que van forjando.
- Ofrece la posibilidad de exponer los trabajos de cada equipo, observando distintos planteos, revisar errores y destacar su importancia para la construcción de saberes, reformular ideas, obtener conclusiones y afianzar el conocimiento constructivo.
- Establece un vínculo que promueve la empatía entre sus pares y con el docente.
- Genera discusiones en torno al saber y a los resultados obtenidos, sean estos correctos o no.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad de Los Andes.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, G., B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby, K. (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Gotenburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education.

González López. M. J. (2001). Gestión de la Clase de Geometría. Utilizando Sistemas de Geometría Dinámica en P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 277-290). Granada, España: Editorial Universidad de Granada. Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/Gonzalez-LopezM01-2595.PDF

Rodríguez, M. y Barreiro, P. (2018). Modelización y Resolución de problemas. En M. Pochulu (Ed.), *La modelización en Matemática. Marco de referencia y aplicaciones* (pp. 17- 25). Villa María, Argentina: GIDED.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática Hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Saiz, I. (1996). *Resolución de problemas. Fuentes para la transformación curricular. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Villarreal, M., Esteley, C. y Mina, M. (2010). Interplay between modeling and information and communication technologies. *The International Journal of Mathematics Education*, (42), 405-4.

Problemáticas de la enseñanza de la geometría en el nivel secundario

FABIANA MARÍA ELIZABETH FAVIERE
floreramirez76@gmail.com
SHIRLEY FLORENCIA GUILLAZA
FLAVIA RAMÍREZ
Escuela Secundaria N°1 "Pancho Ramírez"

Resumen

"La enseñanza tradicional de esta disciplina se ha enfatizado en la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas" (Gamboa Araya y Ballestero Alfaro, 2015, p.127). En este trabajo se parte del análisis de una actividad de quinto año de ciclo orientado, cuyo tema es el número PI y se propone una serie de nuevas tareas donde el estudiante es el protagonista y descubridor, partiendo de la manipulación de material concreto y culminando con la visualización de una geometría dinámica.

Introducción

La propuesta fue diseñada para ser implementada a comienzos del ciclo lectivo en el quinto año de la escuela secundaria N° 1 "Pancho Ramírez", sin embargo, ante la emergencia sanitaria declarada por el gobierno nacional de la República Argentina por el COVID-19 decidimos postergar la experiencia.

La geometría se presenta a los estudiantes según Gamboa Araya y Ballestero Alfaro (2010) como:

> un conjunto de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejado de su realidad y donde los ejemplos y ejercicios no poseen ninguna relación con su contexto, consecuentemente, la geometría se percibe como poco importante, ya que no es aplicable a la vida cotidiana, cuando la realidad es otra (p.3).

Dentro de las aulas es conocida la supremacía del estudio de otros campos, como la aritmética, por ejemplo, sobre los conceptos geométricos. Sin embargo, incorporar geometría en el trabajo áulico es esencial para el desarrollo de diversas habilidades, como son:

> contribuir al desarrollo de la visión espacial, a la posibilidad de transferir conocimientos del espacio bidimensional al tridimensional y viceversa, al progreso en la comunicación lingüística, a la integración del conocimiento matemático a otros conocimientos, a la interacción con distintos tipos de lenguajes (coloquial, geométrico, gráfico, numérico, algebraico), al análisis de producciones artísticas, etcétera (DCJ 2011, Tomo I. p. 39).

Es por ello que se considera importante su presencia en cualquier plan de enseñanza aplicable a muchas situaciones reales, aunque el mismo proceso en el que se encuentra inmerso no permite ver esa importancia, haciendo que carezca de sentido.

Desarrollo

Dentro de las aulas de nivel secundario es frecuente la creencia de que los estudiantes ya conocen los procedimientos o propiedades que tienen los objetos geométricos enseñados en el nivel anterior (Barrantes, Balletbo y Fernández, 2014).

Una ejemplificación de ello es el siguiente enunciado que se encuentra en algunos libros de texto del nivel*: "Encuentre una recta r paralela a la recta t"*, aquí el mecanismo del estudiante podría ser el siguiente: coloca el cateto mayor de la escuadra sobre la recta *t*, sobre el cateto menor apoya la regla, desliza la escuadra hacia arriba o abajo y traza una nueva recta llamada *r*.

Figura 1. Construcción de rectas paralelas

Sin embargo, el concepto que subyace en este mecanismo propio de la geometría sintética es el de la propiedad que expresa "Si dos rectas son perpendiculares a una tercera, entonces son paralelas entre sí". Esto queda invisibilizado por parte del estudiante, el trabajo con propiedades y demostraciones ha quedado totalmente excluido.

> Existen dos grandes objetivos de la enseñanza de la geometría. El primero, introducir a nuestros estudiantes en el mundo de la teoría a partir del mundo de la percepción. Debemos procurar que ellos se convenzan de que la teoría permite resolver problemas de manera eficiente. El segundo objetivo es lograr el equilibrio entre los polos empírico y teórico de la actividad geométrica buscando que no haya predominio de uno de los dos en la actividad geométrica de los estudiantes. Es normal que en un comienzo el polo empírico de la intuición y la percepción sea predominante, pero en la medida en que se cumpla el primer objetivo, esa dominancia debe ser reemplazada por un equilibrio. (Camargo y Acosta, 2012, p.7)

¿Cómo lograr el equilibrio entre lo teórico y práctico? Camargo y Acosta (2012) proponen que "cuando trabajen de manera perceptiva con las figuras, recurran a la teoría para guiar y controlar la percepción, y cuando trabajen de manera deductiva en los enunciados teóricos, recurran a la percepción para representar y comprender la teoría". (p.7)

Enfatizar la importancia de comprender que la figura geométrica es una idea y no un objeto concreto, permite a los estudiantes entender que los dibujos representan ideas, y tienen un rol clave en su aprendizaje porque implica que se tomen decisiones acerca de una construcción, por ejemplo, y no sea una simple observación y medición de un dibujo en cuestión: lleva a replantearse conceptos y formularse preguntas acerca de las propiedades del objeto observado.

Desde el Diseño Curricular Jurisdiccional (DCJ) se trata de generar en el aula las condiciones para que se construyan los conocimientos geométricos. Desde esta perspectiva, la tarea docente no solo abarca la enseñanza de los objetos, sino también las prácticas geométricas. Dichas prácticas no se basan únicamente en mirar y descubrir, sino en establecer relaciones, en argumentar y en producir conocimientos geométricos.

Pérez de Paz expresa que:

> Carece de sentido decir que un alumno cuenta con un conocimiento y que tiene la capacidad para su construcción, si la intervención del docente sigue siendo tradicional, el alumno se convierte en un receptor, asumiendo un papel pasivo, el docente es quien controla y decide qué y cómo aprender, desarrollando procesos homogéneos de enseñanza aprendizaje. (2019, p.4)

En realidad, lo que se pretende es que los estudiantes dejen de ser los receptores de razonamientos producidos por otros y sean ellos mismos los protagonistas en la producción de sus propios argumentos demostrativos, apoyándose en los conocimientos que poseen. Para que esto ocurra, la gestión de la clase que lleva adelante el docente debe ser otra, de manera que permita a los estudiantes aprender geometría haciendo geometría y la formulación de las actividades es una parte fundamental en este tipo de trabajo. Una situación problemática que necesite de las propiedades de la figura, es una buena estrategia para poner en juego los conocimientos geométricos.

Para que se produzca un aprendizaje el enunciado dado al estudiante debe constituir un problema geométrico definido por Altman, Comparatore y Kurzrok (2009) como aquel:

> en el cual se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos en su resolución, pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras dibujos. Estos dibujos no cumplen, en la resolución del problema, la función de permitir llegar a la respuesta por simple constatación sensorial. La decisión autónoma de los alumnos acerca de la verdad o falsedad de sus respuestas se apoya en las propiedades de las figuras y los

cuerpos. Sus argumentaciones producen nuevos conocimientos sobre estos objetos geométricos (p.4).

Para evidenciar lo que se plantea, se transcriben dos actividades que fueron dadas y desarrolladas en el quinto año de ciclo orientado de una escuela secundaria cuyo contenido teórico es el número Pi mediante un enfoque geométrico que en el DCJ de la provincia se encuentra en el eje "Contribución del conocimiento de los números a la formación de un pensamiento acorde a los desafíos de esta época" para el cuarto año de ciclo orientado:

Parte I

a) Trazamos cuatro circunferencias congruentes, una en cada hoja de papel.

b) Inscribimos en cada una de ellas un triángulo, un hexágono, un dodecágono y un icoságono, respectivamente.

c) Ubicamos la hoja correspondiente al triángulo sobre la plancha de telgopor, madera o corcho atravesamos un alfiler por cada vértice del polígono.

d) Rodeamos los alfileres con el hilo para determinar el perímetro de la figura.

e) Medimos la longitud de hilo que representa el perímetro.

f) Medimos el diámetro de la circunferencia circunscrita al polígono.

g) Determinamos el cociente entre ambas longitudes.

h) Repetimos el proceso para cada uno de los polígonos restantes y completamos el siguiente cuadro.

N	**Pn (perímetro)**	**D (diámetro)**	Pn/D
3			
6			
12			
20			

Tabla 1. Cuadro de cociente entre perímetro y diámetro

Parte II

a) Trazamos cuatro circunferencias congruentes, una en cada hoja de papel.

b) Circunscribimos en cada una de ellas un triángulo, un hexágono, un dodecágono, un icoságono, respectivamente (todos ellos iguales)

A partir de aquí la metodología de trabajo es la misma a la parte I.

c) Organizar un cuadro como el de la parte I y completar.

d) Resumir los datos de ambos cuadros en el siguiente:

	Pn/D	Pn/D
N	Polígono inscripto	Polígono circunscrito
3		
6		
12		
20		

Tabla 2. Cuadro de cociente entre perímetro y diámetro

Algunas preguntas pueden surgir al realizar el análisis de esta actividad, tales como: ¿los estudiantes conocen los conceptos teóricos para realizar por sí mismos las construcciones? ¿Resultan significativos para ellos? Las actividades propuestas para llegar a encontrar relaciones y llegar al número Pi necesitan de conocimientos previos por parte de los estudiantes, conocimientos que si no están, el docente necesariamente debe explicar, y dicha explicación deja de lado la exploración por parte de ellos. Termina siendo, como se mencionó antes, una mera transmisión de conocimientos.

Lo que se presenta en este trabajo es una variante de la actividad propuesta anteriormente, así como también el planteo de interrogantes que permitan repensarlas como medios para llegar al conocimiento que se pretende utilizando manipulación de material concreto y un software matemático. Aun así, es importante la formulación de buenos problemas, y es adonde apunta este trabajo.

Villarroel y Sgreccia (2011) mencionan la importancia de la utilización de material concreto como una primera instancia para el desarrollo de los contenidos geométricos:

> el sentido del espacio, y por ende el geométrico, se inicia en las personas mediante la experiencia directa con los objetos del mundo/entorno circundante para enriquecerse a través de actividades de construcción, dibujo, medida, visualización, comparación,

transformación, discusión de ideas, conjetura y comprobación de hipótesis, facilitando así el acceso a la estructura lógica y modos de demostración de esta disciplina. (p. 78)

Por ello se les da a los estudiantes un geoplano circular y dos lanas, cordones o piolas de distinto color y se proponen las consignas que se presentan a continuación.

Parte I. Ata un extremo de una de las piolas (para que no se mueva) en uno de los clavos y dibuja con ella una circunferencia. Con la otra piola dibuja un triángulo equilátero cuyos vértices estén en la circunferencia y uno de ellos coincida con el comienzo de la circunferencia.
Luego toma la piola que se encuentra atada en uno de los vértices del triángulo, ténsala y mide su longitud con una regla.
Después para medir el diámetro de la circunferencia toma como referencia el extremo de la piola que ataste. Desde allí, pasando por el centro del geoplano mide la longitud hasta el extremo opuesto.
Con esos dos valores numéricos, el perímetro de triángulo (longitud) y el valor del diámetro realiza la siguiente operación: P/D
¿Qué número obtuviste?
Intenta realizar la misma construcción con un hexágono, dodecágono e icoságono (todos regulares y con la misma circunferencia que la anterior).
¿Qué sucede con el valor numérico cuando el número de lados del polígono va aumentando?

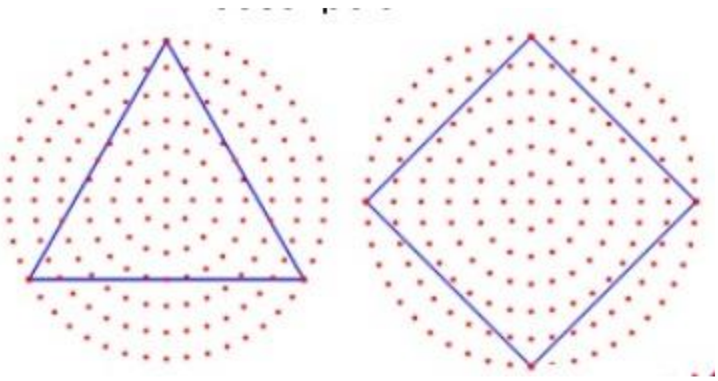


Figura 3. Polígonos regulares en un geoplano circular

Parte II. En el siguiente applet se muestra un procedimiento similar al que realizaste con el geoplano circular. Utiliza el deslizador para aumentar el número de lados del polígono.

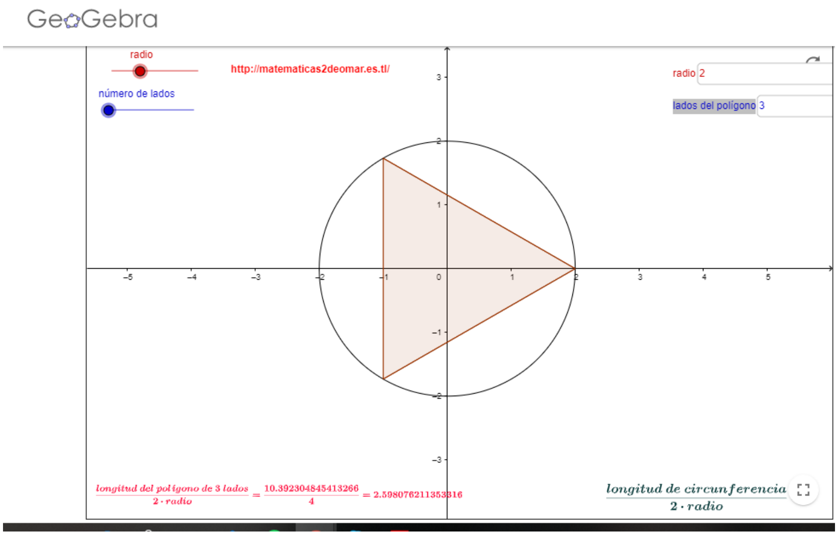


Figura 4. Imagen del applet

¿El perímetro de estos polígonos es mayor o menor que la longitud de la circunferencia?
A medida que aumenta el número de lados, ¿los perímetros se aproximan más o menos a la longitud de la circunferencia?
¿En algún momento el perímetro de un polígono llega a ser mayor que la longitud de la circunferencia?
Fíjate entre los cocientes de perímetro y diámetro. ¿A qué número se acerca este cociente a medida que aumenta el número de lados?

La enseñanza de la geometría se ha caracterizado a lo largo de la historia por la algebrización de los contenidos. Como mencionan Gamboa Araya y Ballestero Alfaro (2010, p.127):

> Aunque se ha reconocido la importancia de la capacidad aritmética y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial han sido desplazados a un segundo plano en importancia, pues prácticamente desapareció de los planes de estudio durante la época de los años sesenta y setenta, como consecuencia del posicionamiento de las llamadas “Matemáticas modernas”, caracterizadas por su formalismo y la algebrización de la geometría.

Conclusión

Dar lugar a la argumentación, a la explicitación de procedimientos, a estrategias puestas en práctica por los estudiantes, son posibles a través del planteo de buenas consignas matemáticas, aquellas donde las actividades sean realmente un problema a resolver y se desafíe la capacidad cognitiva. Las mismas, al estar acompañados de material que puedan manipular o con el uso de software tienen un impacto aún mayor ya que cada paso en la construcción lleva a que se plantee y replantee el por qué se tomó ese camino y no otro, dejando de lado la memorización de conceptos para lograr un aprendizaje significativo para el estudiante.

El constructivismo ha planteado el nuevo rol que ocupa el docente dentro del aula, que necesita de profesores que acompañen el aprendizaje de sus estudiantes, donde las actividades faciliten y contribuyan a dicho proceso. Como mencionan Barrantes, Balletbó y Fernández (2014, p.4), esto supone partir de:

> [...] una concepción constructivista del aprendizaje basada en aquellos conocimientos construidos por los propios alumnos son realmente operativos, duraderos y generalizables a diferentes contextos. Por el contrario, los conocimientos que simplemente se transfieren a los alumnos, no construidos por ellos, no quedan integrados en sus estructuras lógicas y sólo pueden aplicarlos en situaciones similares a las del aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Altman, S., Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2009). Geometría en el primer ciclo. *12(ntes) DIGITAL*, *3*(1), 4-7. Recuperado de http://www.agmeruruguay.com.ar/geometriaclase1texto12ntes.pdf

Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernandez, M. (2014). *Enseñar Geometría en Secundaria.* Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Recuperado de: https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/54.pdf

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Rev. Fac. Cienc. Tecnol.,* (32), 4-8. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&nrm=iso

Ministerio de Gobierno, Justicia y Educación (2011). *Diseño Curricular. Tomo II.* Paraná, Argentina: Consejo General de Educación.

Gamboa Araya, R. y Ballestero Alfaro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare. XIV*(2), 125-142. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194115606010

Pérez de Paz, A. (2019). *Revista Acta Educativa*, (19). Recuperado de https://revista.universidadabierta.edu.mx/2019/06/03/conocimientos-previos-e-intervencion-docente/

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales Didácticos concretos en primer año de Secundario. *Números. Revista de Didáctica de la matemática, (*78), 73- 94. Recuperado de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/03/DOC1-didactica-geometria.pdf

Taller itinerante: Geometría, manipular para aprender

NATALIA DALLIA

CARINA MAUMARY

MARÍA EUGENIA MAUMARY

MARÍA ALEJANDRA SANTARRONE

carimaumary@gmail.com

Escuela Industrial Superior. Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En esta ponencia comunicamos un trabajo realizado en el marco de una práctica de extensión de educación experiencial, llevado a cabo en el año 2019. El propósito general de dicha práctica fue mejorar las competencias matemáticas -en particular en conceptos de perímetro, área y volumen- de los estudiantes de segundo año que tenían Matemática de primer año previa, los cuales fueron actores del proyecto y también para futuros ingresantes a la institución dado que veníamos evidenciando falencias en ellos, y éstas persistían en los años siguientes.

Nuestro trabajo apuntó a establecer vínculos entre cuatro vértices: A) Docentes de la institución, B) Docentes de nivel primario, C) Estudiantes de segundo año y tutores de nuestra institución y D) Estudiantes de nivel primario; para juntos explorar, analizar y reflexionar sobre los conceptos mencionados junto con las nociones de medida, unidad de medida, medidas no convencionales y convencionales. La modalidad de trabajo entre los vértices fue taller, donde las actividades apuntaban a la observación, manipulación y reflexión.

Como producto final se llevó a cabo un taller itinerante para estudiantes de séptimo grado de dos instituciones de nivel primario de la ciudad; para el cual se confeccionó una maqueta, dividida en seis secciones que conformó el parque de diversiones Medirmanía, y fichas de registro de actividades. Durante el trayecto de esta práctica, nuestros estudiantes tuvieron la oportunidad de resignificar los conceptos ya que se posicionaron desde otro rol, el de coordinadores del taller.

Introducción

Desde hace varios años el Departamento de Matemática viene observando en el examen de ingreso a la Escuela Industrial Superior, y luego en el primer año, las dificultades que tienen los estudiantes en los contenidos de geometría – específicamente perímetro, área y volumen – que debieron desarrollarse en el nivel primario. La mayoría de ellos aduce no haber manipulado material concreto para el aprendizaje de mencionados contenidos (el 20% de ellos no desarrolló el concepto de volumen, según encuesta a ingresantes 2018). Si bien se aborda la problemática en el primer año, un grupo significativo de ellos aún acarrea dificultades en el cursado de Matemática II, lo que conlleva a un problema en el aprendizaje de otros conceptos.

En la formación de un técnico, los diversos sistemas de representación que estudia la geometría descriptiva son el medio esencial de comunicación. Ellos conforman un lenguaje muy particular que educan para ver y pensar de modo sistemático y ordenado. El saber ver no es una destreza innata; puede y debe ser aprendida. Al igual que los conceptos matemáticos, los geométricos deben ser trabajados en forma espiralada en los distintos niveles de enseñanza, con focos y complejidades diferentes.

Desde lo disciplinar, como sostiene Área, Parceriza y Rodríguez (2010), el material manipulativo facilita los procesos de enseñanza y aprendizaje de los alumnos, pues éstos experimentan situaciones de aprendizaje de forma manipulativa, que les permite conocer, comprender e interiorizar las nociones estudiadas, por medio de sensaciones. Los sentidos son el medio natural por el cual adquirimos conocimiento.

La vista, el oído y el tacto permiten conocer el mundo e interpretarlo de manera personal y única. Fouz (2005) menciona, sobre lo que sostiene Van Hiele, que el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no van asociados a la edad y que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. Es más, se señala que cualquier persona, ante un nuevo contenido geométrico a aprender, pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la Geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente. En la base del aprendizaje de esta área, hay dos elementos importantes “el lenguaje utilizado” y “la significatividad de los contenidos”. Lo primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento. Si no es así se debe esperar a que lo alcancen para enseñarles un contenido matemático nuevo. Finalmente Van Hiele (1986, citado por Fouz, 2005, p.68) señala que “no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo, pero mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición”.

Práctica de Extensión en Educación Experiencial

Abordar la problemática mencionada desde una Práctica de Extensión en Educación Experiencial (P.E.E.E.) implicó una intervención en los territorios específicos vinculados con la problemática. En este sentido la intervención social es entendida como una actividad que se realizó de manera formal y que respondió a necesidades sociales explicitadas por los propios actores, ya que las instituciones de nivel primario involucradas compartieron la problemática planteada y esperaban que esta participación, por parte de nuestra institución, propicie nuevas miradas para el abordaje de la enseñanza de la geometría en el nivel.

En la educación experiencial, la enseñanza de los contenidos de las diferentes asignaturas se propone en diálogo constante con la comunidad a través de prácticas situadas que enfatizan el valor educativo y atienden a la complejidad de lo social. La educación experiencial desalienta la concepción de enseñanza como recopilación de saberes cerrados, absolutos e inertes, sino que promueve la creación de verdades contingentes y provisorias mediante la problematización, la duda y la reflexión y el intercambio entre sujetos y sobre todo, la relación entre saberes de distintas disciplinas. Es por esto que su importancia radica en que es una evaluación racional de la experiencia con el fin de crear conocimiento (Sordo, 2018).

Kolb (1984) describe el aprendizaje experiencial como el proceso en el que una persona aprende a través del descubrimiento y la experiencia, e implica una relación biunívoca entre acción y reflexión, concreción y abstracción. Este tipo de aprendizaje supone entonces participar progresivamente en las prácticas de una comunidad, presentándose como un proceso de construcción de conocimiento situado y con actores reales (alumnos y docentes en nuestro caso). Basado en estos principios, Kolb desarrolló el ciclo de aprendizaje experiencial, que es una teoría para describir cómo procesamos la información y en última instancia, aplicamos el conocimiento. El ciclo comienza cuando un individuo se involucra en una actividad, reflexiona sobre su propia experiencia, entonces se presenta el significado de la reflexión y finalmente pone en acción la percepción recién adquirida.

Vínculo entre vértices A y B

Inicialmente, a través de la presentación informal del proyecto para conocer el interés de participar, todas las escuelas primarias visitadas (escogidas por el porcentaje de aspirantes a ingresar a la Escuela Industrial Superior) coincidieron en la preocupación de cómo se abordan los contenidos de geometría en ese nivel y demostraron mucho interés en que el proyecto se lleve a cabo, dado que potenciaría tanto el trabajo articulado entre instituciones como así también aprendizajes colaborativo entre los actores.

En la presentación formal del proyecto se vincularon 6 escuelas primarias públicas de la ciudad de Santa Fe. A través de cuestionarios online se fueron conociendo algunas realidades institucionales, de sus docentes de séptimo grado y en qué momento y cómo desarrollan los contenidos geométricos involucrados.

Se realizaron dos encuentros presenciales, con la modalidad de taller, con las docentes y algunos directivos de las instituciones de nivel primario vinculadas. Los objetivos de primer taller "Encuentro entre pares" fueron, por un lado, conocer las realidades institucionales y ver la necesidad de entablar lazos colaborativos de trabajo entre docentes y, por otro lado, reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el nivel primario y secundario.

Como posibilitador de los objetivos anteriores se trabajó con el concepto de Área de superficies planas explorando la definición que tenían del mismo las docentes del nivel primario, exponiendo el análisis sobre la definición de área que habíamos indagado en nuestros estudiantes de 1ero, 2do y 3er año (división A) y comparando con las que ellas habían dado. También se presentó, por parte de nuestro equipo, un marco teórico para abordar la enseñanza del concepto y a modo de ejemplo una propuesta lúdica: "Tetris The Cover" (Figura 1) como para trabajarlo en distintos niveles de la primaria.

Figura 1. Taller "Encuentro entre pares"

En todo momento las docentes se mostraron abiertas, receptivas, manifestando en varias oportunidades la importancia de poder articular entre ambos niveles y también dentro de su propia institución; así también como las escasas posibilidades y espacios para poder hacerlo. Esto último afloró con más fuerza al presentarles la actividad para el segundo taller: una propuesta de trabajo situada, ya que ésta implicaba la articulación entre las docentes de dos o más grados y por ende predisposición y tiempo de los participantes que veían dificultoso poder conseguir.

No obstante, frente a sus planteos acordamos, en la medida sus posibilidades, la articulación solicitada dado que es uno de los pilares sobre los cuales se cimienta esta Práctica.

A pesar de brindar varias oportunidades para entregar sus propuestas, solo dos instituciones cumplieron lo solicitado y expusieron sus trabajos; los cuales demostraron gran potencial para seguir ampliando y de realizar trabajo interdisciplinario. Finalmente, con estas dos escuelas avanzamos con la Práctica.

El material manipulativo utilizado en este taller fue diseñado por el equipo docente que forma parte del proyecto y en el área de Taller de la escuela se cortaron las piezas del mismo (Figura 2 y 3).

Figura 2. Elaboración del Tetris The Cove

Figura 3. Piezas del Tetris x The Cover

Vínculo entre vértices A y C

La propuesta tuvo como propósito general que nuestros estudiantes, específicamente los que cursaban segundo año y tenían previa Matemática I, resignifiquen los contenidos que les fueran enseñados al plantearles la intervención activa en el diseño de actividades en el contexto de un aula taller, para que sean trabajadas con estudiantes de nivel primario. De esta forma se esperaba posibilitar el aprendizaje de conceptos geométricos en sus diferentes niveles, apelando a la resolución de situaciones problemáticas y lúdicas siempre mediante materiales manipulativos, sosteniendo la idea que enseñando también se aprende.

Apuntamos a que los estudiantes logren, a partir de intervenir en el diseño y dictado del taller:

● La disposición para pensar geométricamente a partir de explorar situaciones problemáticas y lúdicas con material manipulativo.

● Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos, propiedades y relaciones para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.

● El placer y la seguridad en sí mismo en el desarrollo de actividades intelectuales que implican el razonamiento geométrico.

● La facultad de discutir con otros y comunicar el pensamiento geométrico, empleando tanto el lenguaje escrito como el oral.

● Resignificar los conceptos geométricos aprendidos en niveles anteriores y alcanzar niveles más altos de comprensión.

● Emociones positivas, al colocarse en el rol de educador en situaciones problemáticas y lúdicas de conceptos geométricos a estudiantes de nivel primario.

En un primer encuentro, diseñado por los tutores, los estudiantes de segundo año junto con el equipo docente analizaron la problemática y reflexionaron acerca de cómo les hubiese gustado aprender dichos conceptos.

A partir de ese primer encuentro se embarcaron en investigar la aplicación de los contenidos en situaciones concretas y en el segundo encuentro se acordó que lo más indicado era la elaboración de una maqueta que represente un parque temático ya que potencializa todas las ideas que habían compartido. Desde ahí se dividieron en grupos para diseñar las distintas atracciones que conforman el Parque Medirmanía, a pensar en el diseño de situaciones didácticas que involucran actividades lúdicas y situaciones problemáticas para trabajar conceptos geométricos con materiales manipulativos y finalmente dictar un taller itinerante destinado a alumnos de escuelas primarias públicas. Antes de realizar el mismo, se realizó un simulacro entre los actores de nuestra institución donde se ajustaron detalles de las consignas asociadas a cada atracción y las intervenciones que haría cada coordinador.

El estar involucrados en la elaboración del material concreto les implicó a nuestros estudiantes un trabajo previo a la confección del mismo sobre los conceptos de medida, unidad de medida, medidas convencionales y no convencionales, perímetro, área, y volumen, desde distintas actividades propuestas por parte de las docentes, que abordan definiciones, implicancias, errores frecuentes (como por ejemplo las relaciones equívocas que establecen entre perímetro y área) y construcciones. En el proceso de construcción de la maqueta consultamos a docentes de la especialidad Construcciones de la escuela para definir la escala a utilizar en la misma.

Cabe destacar que en el trayecto de esta dimensión se hallan dos enfoques importantes de considerar: la cognición distribuida y las aulas heterogéneas.

El primero de ellos es relevante ya que propone que tanto la cognición como el conocimiento no se limitan al individuo, sino que se distribuye a través de objetos, personas y herramientas en el entorno. Más aún, al considerar la cognición distribuida como parte importante del proceso de enseñanza y aprendizaje, compartimos lo establecido por Perkins (2001, p.128) acerca de que “el entorno (los recursos físicos y sociales inmediatos fuera de la persona) participa en la cognición, no sólo como fuente de entrada de información y como receptor de productos finales, sino como vehículo de pensamiento”; y que “el residuo dejado por el pensamiento (lo que se aprende) subsiste no sólo en la mente del que aprende, sino en el ordenamiento del entorno, y es genuino aprendizaje pese a eso”.

El segundo debido a que considerar la noción de aula heterogénea es considerar un espacio en el que “todos los alumnos, ya sea que presenten dificultades o que se destaquen, pueden progresar y obtener resultados a la medida de su potencial real, tanto a nivel cognitivo como personal y social” (Anijovich, Malbergier y Sigal, 2004); motivándonos a pensar y diseñar tareas desafiantes, estimulantes que los motiven a desarrollar al máximo su capacidad individual y construir su identidad como miembros plenos de una comunidad.

Vínculos entre vértices A, C y D - Taller itinerante

En el taller itinerante, con el cual recorrimos dos instituciones primarias de la ciudad, se presentó la maqueta de la Figura 4; la cual se subdivide en seis partes que representan atracciones diferentes del mismo. Cada una de ellas permitió plantear distintas problemáticas en las cuales se exploró los conceptos de perímetro, área y volumen, relaciones entre ellos y a través de la manipulación, los de unidad de medida y medidas no convencionales y las convencionales, hasta finalmente arribar a la noción de lo que significa medir.

Figura 4. Maqueta parque “Medirmanía”

El taller dio inicio con una presentación, realizada por nuestro equipo docente, donde se les explicó a los estudiantes de primaria cómo se iba llevar a cabo dicha experiencia (observando, explorando, manipulando, compartiendo conocimiento y reflexionando), se les informó la escala de la misma y que para las actividades que iban a realizar con cada atracción debían completar por escrito y/o con audios distintas actividades. Luego cada curso de estudiantes de primaria se dividió en seis grupos como previamente se había acordado con sus docentes.

Una vez comprendido todo lo explicado, se separó cada atracción y la misma fue coordinada por dos miembros de nuestra institución, mientras otro organizaba la circulación entre maquetas.

Al finalizar el taller se volvía a reunir el curso para hacer una puesta en común.

A modo de ejemplo se explican brevemente tres de las seis atracciones.

Con el acuario (Figura 5) se exploró el concepto de volumen, a través de la elección de la elección de la unidad de medida adecuada (se les dio a elegir entre esferas y cubos), y área lateral.

En la vuelta al mundo (figura 6) los estudiantes tuvieron que analizar con cuál de los soportes brindados (se les brindó tres varillas de distintas medidas y un soporte curvo) se realizaba una mejor aproximación a la longitud de un cable de neón que estaba asociado a la longitud de la circunferencia.

En la pista de autitos chocadores (Figura 7) se trabajó con distintas unidades de medida para obtener el perímetro de la pista y pudieron evaluar que al duplicar el área de la pista no necesariamente se duplica el perímetro de la misma.

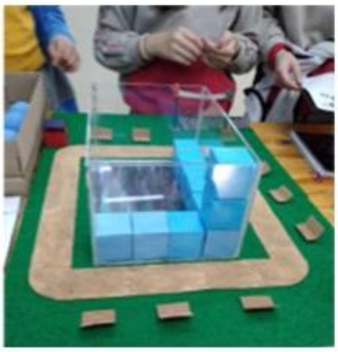


Figura 5. Maqueta acuario

Figura 6. Maqueta vuelta al mundo

Figura 7. Maqueta autos chocadores

Evaluación de la Práctica y de los vínculos establecidos

Con respecto al vínculo con las docentes de nivel primario, al finalizar la P.E.E.E. se les envió un cuestionario online para que evalúen la misma. A continuación, se citan algunas respuestas:

> "Los estudiantes manifestaron agrado por la propuesta, les resultó muy interesante y rescataron de manera positiva el trabajo realizado por sus pares de la escuela secundaria."
>
> "Interesante propuesta. De aprendizaje continuo y colectivo. Dinámica y bien desarrollada. Al alcance de sus expectativas. Motivadoras."
>
> "Hemos retomado de manera más simple la actividad realizada para introducir el concepto de volumen. El taller nos sirvió para pensar en un producto final para nuestro proyecto de geometría, propuesta que realizamos para el resto de la escuela."
>
> "Se retomaron actividades de manipulación de tangram, uso de elementos de medición, cálculos de perímetros, áreas con el objetivo de llegar al conocimiento de capacidades y volúmenes, magnitudes."
>
> "Consideramos que la propuesta de extensión en nuestra institución fue positiva, nos sirvió para poder reflexionar sobre nuestras prácticas y poner en marcha diferentes dispositivos de mejoramiento."
>
> "La PEEE constituyó una novedosa propuesta para generar dinámicas de articulación intra e internivel. Fomentó el trabajo en equipo, colaborativo y en red. Los y las estudiantes tuvieron la posibilidad de interacción en torno a la construcción del conocimiento y pensamiento matemático desde la multidisciplinariedad, la cotidianeidad y la autonomía, a partir de su aspecto lúdico-recreativo, aproximando al alumno y la alumna al hacer matemática desde sus propias vivencias, inclinándose en la institucionalización del saber (ser-hacer-conocer) a partir del encuentro con otros y otras."

Para nosotras fue significativo compartir un espacio de reflexión con docentes del nivel primario donde intercambiamos estrategias acerca de la enseñanza de ciertos conceptos geométricos, compartimos conocimiento y revisamos nuestras prácticas docentes. Confluimos en la importancia de la articulación entre niveles como así también potenciar la articulación entre docentes de distintos turnos de una misma institución primaria.

Nuestros estudiantes también evaluaron la P.E.E.E por medio de un cuestionario, y nosotras a ellos, por medio de rúbricas.

Los tutores evaluaron su desempeño y desarrollo personal como bueno o muy bueno. Enunciaron como fortalezas la diferencia de edades, experiencia y formación de los participantes de la práctica, el buen clima de trabajo, la revisión de conceptos y el explicárselos a otros estudiantes. Con respecto a las debilidades de la experiencia, marcaron las diferencias de nivel de las instituciones visitadas, la carga horaria de la práctica y lo complejo de mantener sus responsabilidades con las asignaturas del año lectivo.

Entre los comentarios se destaca que se sintieron cómodos y satisfechos con la experiencia. Aprendieron a valorar el aprendizaje y trabajo en grupos heterogéneos, redactar textos de carácter científico y realizar un póster para presentar en el 2° Encuentro de Jóvenes Secundarios Preuniversitarios de la U.N.L., revisar sus conocimientos y expresar ideas en público.

Se puede concluir que los tres tutores armaron un buen grupo de trabajo, demostraron potencial para construir y reconstruir en base de conocimientos previos. En todo momento se evidenció compromiso y pudieron organizar sus tiempos con las demás responsabilidades que le implica la escuela. Fueron muy amenos con los estudiantes de segundo año y con los de las escuelas primarias; desarrollaron la capacidad de escuchar, observar y dialogar en grupos heterogéneos.

Por su parte, los estudiantes de 2do año evaluaron su desempeño y su desarrollo personal, en su mayoría, también como bueno o muy bueno. En cuanto a las fortalezas, destacan el trabajo en grupo y el compañerismo, y la organización del proyecto; como debilidades, mencionaron el tiempo y también se hizo una referencia a la paciencia.

Al responder cómo se sintieron, todos hicieron referencia a la comodidad con el grupo de trabajo, mencionaron que fue divertido y que se sintieron bienvenidos en las instituciones que visitamos.

En cuanto a qué aprendieron, se hizo referencia a repaso de contenidos anteriores y a aprender a explicarlos. Uno de los estudiantes menciona que notó el progreso que hizo al explicar, y hacer que se entendiera, una consigna. A lo largo de la práctica los estudiantes fueron dimensionando la magnitud de la propuesta y pudieron entender la responsabilidad que se requiere para formar un grupo de trabajo tan heterogéneo (con compañeros de otros años y docentes) y compartir lo realizado con otras instituciones, comprendieron que respetar horarios y cumplir con las tareas asignadas es fundamental para que un trabajo en equipo pueda realizarse sin inconvenientes.

En cuanto al desarrollo de los talleres, si bien estaban a gusto, lidiaron con cuestiones propias de una clase y volvieron a recurrir a la palabra paciencia. Tuvieron que aprender a captar la atención de los estudiantes de primaria y mantenerla para que puedan entender y responder a las consignas; para ellos fue un desafío que todos pudieron superar.

Se puede concluir que los estudiantes de segundo año lograron superar sus expectativas. Al transcurrir los talleres se los vio más seguros y confiados, incluso más participativos y críticos en cuanto a las decisiones que se iban tomando.

Cabe destacar que aquellos que debían Matemática I a fin de año pudieron aprobar y creemos que esto se debe a su crecimiento personal y al vínculo que establecieron con las docentes de dicha disciplina.

Referencias bibliográficas

Anijovich, R., Malbergier, M. y Sigal. C. (2004). *Una introducción a la enseñanza para la diversidad. El trabajo en aulas heterogéneas*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Fondo de Cultura Económica de Argentina S.A. Recuperado de: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/27/27SIGAL-Cecilia-y-otros-El-aprendizaje-en-la-diversidad-autonomia.pdf

Área, M., Parcerisa, A. y Rodriguez, J. (Coords) (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Buenos Aires, Argentina: Graó.

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. En R. Ibalez y M. Macho (Ed.), *Un paseo por la Geometría* (pp. 67-82). Bilbao, España: UPV-EHU. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf

Kolb, D.A. (1984). *Experiential Learning: Experiencie k the Source of Learning and Development*. Englewood Cliffs, EEUU: Prentice Hall.

Perkins, D.N. (2001). La persona-más. Una visión distribuida del pensamiento y el aprendizaje. En G. Salomon (Comp.), *Cogniciones distribuidas. Consideraciones psicológicas y educativas* (pp. 126-152). Buenos Aires, Argentina: Amorrortu.

Sordo, S. (2018). *Sentidos posibles de la evaluación de los aprendizajes en las Prácticas de Extensión de Educación Experiencia* (Trabajo para acceder al título de Especialista en Docencia Universitaria). Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Eje 3
El uso de tecnologías en el aula de matemática

El celular como recurso para el planteo de problemas en el aula de matemática

MARÍA FLORENCIA CRUZ
ma.florenciacruz@gmail.com
ANA MARÍA MÁNTICA
ana.mantica@gmail.com
LUJÁN ÁLVAREZ
lujanalvarez35@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este trabajo presentamos el análisis previo de respuestas a un problema que se formula a partir de una situación presentada por el uso del teléfono celular. El objetivo es estudiar el uso que hacen estudiantes de profesorado en matemática, en instancias de trabajo matemático, de las tecnologías que utilizan en su vida cotidiana. Realizamos el análisis a partir del aporte de referentes que estudian la producción de conocimientos mediada por tecnologías digitales en el aula de matemática considerando especialmente aquellos que lo hacen particularizando el trabajo geométrico. Sintéticamente mencionamos 4 posibles resoluciones: una muestra de modo experimental el trabajo empírico que se puede realizar para comprender la situación, otra pone el foco en el análisis de la variación que se presenta entre dos situaciones y sus respectivas resoluciones y otras dos muestran un modo de comprender lo sucedido entre lo que se visualiza en la pantalla del celular y la realidad. Por último, se presentan reflexiones que surgen de las posibles resoluciones presentadas y los referentes considerados.

Introducción

En la actualidad las tecnologías digitales atraviesan los contextos educativos, esta cuestión inspira el deseo de plantear problemas que inviten a los estudiantes a emplearlas como mediadoras de su trabajo matemático. Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que persigue por objetivo estudiar el uso que hacen estudiantes de profesorado en matemática en instancias de trabajo matemático, de las tecnologías que utilizan en su vida cotidiana al resolver un problema que se formula a partir de una situación presentada por el uso del teléfono celular. Particularmente aquí hacemos evidente el análisis previo que se enmarca y forma parte de dicha investigación.

Respecto al empleo de las tecnologías digitales en el aula, Maggio, Lion y Perosi (2014) sostienen que desde una perspectiva educativa, las tecnologías se entraman en las diversas formas del pensamiento disciplinar y su inclusión en las prácticas de enseñanza potencia formas especializadas de construcción del conocimiento.

A su vez, interesa señalar que las tecnologías digitales de uso frecuente no siempre están presentes en el aula de matemática de manera natural. Al respecto, Kaplan, Robalo, Tedesco, Nicodemo y Novembre (2016) afirman que la incorporación de las tecnologías digitales en la sociedad se acepta sin discusiones, pero no ocurre lo mismo en las instituciones educativas donde es un desafío determinar cuál es el lugar que deben ocupar. Se refieren tanto a computadoras como calculadoras científicas o básicas, teléfonos o cualquier instrumento que admita un trabajo tecnológico y sostienen que, como cualquier recurso para la enseñanza, su incorporación al aula "supone un trabajo previo de reflexión por parte del docente respecto de qué lugar ocuparán en la planificación de los contenidos" (p.1). Los autores manifiestan que su incorporación debe realizarse intentando "promover el desarrollo de prácticas tales como la anticipación, la elaboración de conjeturas, la exploración, el cuestionamiento de conocimientos anteriores, la explicación, la confirmación o modificación como resultado de un proceso que invitó a resolver un problema" (p. 1-2).

A partir de las consideraciones realizadas pensamos que este trabajo puede redundar en aporte para el campo de la Educación Matemática, puesto que exponemos un problema que: invita a la utilización de diversas tecnologías digitales, requiere para su resolución de la puesta en juego de diversas actividades que caracterizan al quehacer matemático, posibilita la construcción de conocimientos tecnológicos y matemáticos a los futuros profesores, entre otros. Cabe mencionar que particularmente en el problema en juego consideramos emergen nociones geométricas donde se potencia la producción de conocimientos por parte de los futuros profesores con el empleo del software de geometría dinámica.

En los apartados siguientes presentamos el marco teórico al que apelamos para fundamentar el diseño del problema y que utilizaremos para analizar las producciones de los futuros profesores en matemática, una caracterización metodológica de la investigación en la que se enmarca este trabajo, el análisis previo y conclusiones.

Referentes teóricos

Consideramos aportes teóricos de autores que discuten la utilización de las tecnologías digitales en el aula de matemática. Tomamos posición respecto a la producción de conocimientos mediada por tecnologías digitales en el aula de matemática retomando a Villarreal (2004) y Borba y Villarreal (2005). Ampliamos las perspectivas mencionadas, particularizando para el trabajo geométrico a partir de Villarreal (2012) y Arcavi y Hadas (2000). Finalmente describimos algunas actividades que caracterizan al quehacer matemático apelando a Itzcovich (2007), puesto que consideramos se pondrán en juego por los futuros profesores al implementar la propuesta.

Villareal (2004) asegura que la llegada de nuevos actores tecnológicos al ámbito educacional, necesita de una mirada que sin trivializar aspectos pedagógicos, los trascienda para poder contextualizar la problemática de las tecnologías digitales en el contexto educacional desde una perspectiva que contemple también el aspecto social. Considera que los estudiantes deben poder acceder a una “alfabetización tecnológica” y así evitar un nuevo tipo de exclusión social, el “analfabetismo informático”. Además, la autora manifiesta que las nuevas tecnologías no tienen un papel de suplementación sino de reorganización, la actividad intelectual humana es modificada por el uso de la computadora, su mediación reorganiza los procesos de creación, búsqueda y almacenamiento de información y el establecimiento de relaciones humanas.

Tomamos como visión epistemológica la noción de humanos-con-medios como unidad epistémica de Borba y Villarrreal (2005). Estos autores reconocen el papel central de los medios en la producción del conocimiento, tales medios transforman las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. Esta noción (humanos-con-medios) trae dos ideas centrales: por un lado, que la cognición no es una empresa individual, sino social (por eso humanos) y, por otro lado, que la cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce el conocimiento y esta componente del sujeto epistémico no es auxiliar o suplementario, sino esencial. Esto último hace evidente que el medio es constitutivo del conocimiento, incluso, si estuviera ausente el conocimiento construido sería otro. Esta posición epistemológica que coloca a los medios en una situación de coautor en la producción del conocimiento brinda una perspectiva que nos permite comprender el papel de la tecnología en la escuela con un carácter potenciador y reorganizador en lugar de supresor del raciocinio.

A su vez, Borba y Villarreal (2005) sostienen que:

> [...] un abordaje experimental en educación matemática implica: el uso de procedimientos tentativos y ensayos educados para apoyar la generación de conjeturas matemáticas; el descubrimiento de resultados matemáticos previamente desconocidos para el experimentador; la posibilidad de testar modos alternativos de obtener un resultado; la oportunidad de proponer nuevos experimentos; un modo diferente de aprender matemática (p.75).

En la línea mencionada, Villarreal (2012) discute el vínculo entre tecnologías y producción del conocimiento matemático, y la relación entre tecnologías y educación matemática. La autora sostiene que una de las transformaciones que trae esta incorporación es la creación de ambientes donde la matemática puede ser vivenciada como una ciencia experimental, a través de herramientas que permiten la generación y validación de conjeturas; un laboratorio matemático donde un «ensayo y error educado» fuese permitido y la visualización fuese un aliado para la comprensión matemática. En este sentido, los estudiantes deben tener la oportunidad de aprender matemática con la computadora. La autora, en la investigación muestra que la inclusión de la computadora en ciertos escenarios puede resultar esencial para generar conjeturas, refutarlas o validarlas, mostrando la posibilidad de un trabajo matemático con énfasis en la visualización y en experimentación, actividades características del quehacer matemático.

Con respecto a esto último, Arcavi y Hadas (2000) presentan características del trabajo con ambientes dinámicos, tales como, la visualización, la experimentación, la sorpresa, la retroalimentación, la necesidad de pruebas y demostraciones y la reflexión.

En relación a la visualización plantean que es una tarea esencial para el aprendizaje de la geometría, dado que crea una sensación de auto-evidencia e inmediatez. Explican que los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también otorgan la posibilidad de transformar construcciones en tiempo real. De esta forma, facilitan las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas (Arcavi y Hadas, 2000).

A su vez, Arcavi y Hadas (2000) afirman que los ambientes dinámicos permiten a los estudiantes experimentar, ya que se pueden obtener con facilidad muchos ejemplos, casos extremos y de carácter no estereotipado, se puede medir, comparar, cambiar, etc. La información obtenida puede ser un paso a la generalización y enunciación de conjeturas. Estas plataformas, permiten también, constatar predicciones sobre un resultado con lo devuelto por el software. Esto último produce sorpresa en el estudiante cuando el resultado es inesperado y presenta diferencia con la predicción. Esta diferencia entre lo conjeturado y lo devuelto por el ambiente dinámico crea una retroalimentación que es proporcionada por el ambiente mismo, el cual reacciona a medida que es requerido. Esto último puede involucrar motivación para modificar, revisar la predicción y buscar la necesidad de una demostración.

Itzcovich (2007) sostiene que la matemática para los alumnos se caracteriza por las experiencias que viven en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Es decir, las experiencias impactan de manera determinante en lo que el estudiante entiende sobre "cultura matemática". Por lo mencionado se considera fundamental que lleven adelante actividades características de la ciencia matemática. Este autor reconoce, entre otras, las siguientes: resolución de problemas, representación y exploración, formulación de conjeturas, validación y generalización.

Itzcovich (2007) determina que el corazón de la actividad matemática se encuentra en la resolución de problemas, en la medida en que los estudiantes al resolverlos elaboren conceptos, los relacionan con otros, modifiquen ideas e inventan procedimientos. Sostiene además, que los problemas, deben producir al destinatario a un desafío u obstáculo para vencer, y a la toma de decisiones en donde los conocimientos de que se dispone no son suficientes pero tampoco tan escasos.

En el marco de un problema, el autor señala que es importante que se incentive a los alumnos a representar el problema de modo óptimo para su tratamiento. Encontrar este modo de representación requiere de un trabajo exploratorio, involucra el uso de ejemplos, la observación, entre otras. A su vez, señala que se establecen conjeturas cuando se produce una sospecha que es producto de la experimentación, de la exploración a partir de datos y la puesta en juego los saberes disponibles que permitan establecer una afirmación con algún grado de certeza. El siguiente paso, es encontrar esas razones que permiten explicar y comprender, es decir, validar la conjetura, hacerse cargo mediante argumentos matemáticos de los resultados que se obtienen.

Itzcovich (2007) además, afirma que analizar y establecer cuáles son las condiciones para que se verifique una propiedad también forma parte de la actividad matemática en el aula. A esto lo llama la búsqueda de generalizaciones, un trabajo que involucra la posibilidad de construir relaciones que se cumplen cuando se verifican ciertas condiciones.

Metodología

Este trabajo forma parte, como se menciona anteriormente, de una investigación más amplia. La misma es de naturaleza cualitativa. Realizamos un trabajo intensivo en el que pretendemos mostrar cuestiones sobre el contexto al que pertenecen los sujetos, con el fin último de que los resultados, posiblemente se pueden ampliar a contextos similares (Kornblit, 2007). Apelamos, particularmente, a un estudio de casos (Yin, 2018).

Para producir los datos que analizaremos, proponemos poner en juego un problema con futuros profesores en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Lo implementamos en la asignatura Geometría Euclídea Espacial que corresponde al tercer año del plan de estudios de la carrera Profesorado en Matemática. Los estudiantes han cursado previamente asignaturas de geometría, análisis, álgebra, educación general, etcétera, por lo que consideramos han tenido oportunidades de trabajar con las diversas actividades que caracterizan al quehacer matemático (mencionadas en el marco teórico) y con tecnologías digitales.

Atendiendo a lo mencionado en Villarreal (2004) y Borba y Villarreal (2005) invitamos a los futuros profesores a trabajar en grupos de 3 o 4 integrantes empleando una computadora con acceso a internet y que posee el software de geometría dinámica *GeoGebra* y presentamos el siguiente problema diseñado específicamente en el marco de esta investigación.

> Juana y Pedro viajaban en auto por una ruta peligrosa y tuvieron un accidente.
>
> Pedro no tenía carnet de conducir y el conductor del otro auto afirma que Pedro manejaba en el momento del impacto. Pedro y Juana afirman que manejaba Juana.
>
> El seguro automovilístico necesita pruebas. La mamá de Juana muestra una foto de los jóvenes dentro del auto abriendo el chat con Juana en la aplicación *WhatsApp*. Esa foto no coin-

cide con la foto que Juana tiene guardada en el celular y mostró a vialidad inmediatamente después del accidente.

Por lo tanto, del seguro automovilístico, afirman que las pruebas no son compatibles.

a. ¿Podrías ayudar en la resolución del caso?
b. ¿Cómo lo justificarías desde tus conocimientos matemáticos esta situación?

Tabla 1. Problema formulado para presentar a los futuros profesores.

Cabe mencionar que en caso que los futuros profesores que participen de la propuesta estén de acuerdo, en la puesta en juego se registrará la información a través de grabaciones en audio del trabajo de cada grupo, artefactos escritos, archivos del software de geometría dinámica *GeoGebra* y filmaciones en audio y video de las instancias de debate colectivo.

Análisis previo

En este apartado presentamos cuatro posibles resoluciones del problema que muestran diferentes empleos que se pueden realizar de las tecnologías digitales, diversos conocimientos matemáticos y tecnológicos que se pueden producir, entre otros. Cabe mencionar que el análisis que aquí se realiza se contrastará posteriormente con las producciones que realicen los futuros profesores que participen de la experiencia.

Sintéticamente mencionamos que en la resolución 1 mostramos de modo experimental el trabajo empírico que se puede realizar para comprender la situación, en la resolución 2 ponemos el foco en el análisis de la variación que se presenta entre las dos fotos y en las resoluciones 3 y 4 mencionamos un modo de comprender lo sucedido entre la foto que se toma la persona y la realidad.

Resolución 1

Para dar respuesta al problema se experimenta empleando el teléfono celular. Se puede tomar una foto para conjeturar posibles ubicaciones de las dos personas en el auto, apelando a distintas técnicas:

1. Emplear la cámara secundaria del teléfono (frontal), guardar la foto, enviarla vía *WhatsApp* y observar cómo se recibe la foto en otro teléfono. Estas fotos no presentan diferencias, por lo que se afirma que la foto de Juana y su madre serán iguales. En este caso deberán modificar la estrategia, puesto que se contradice con las hipótesis del problema.

2. Utilizar la cámara secundaria del teléfono (frontal) en un chat de la aplicación *WhatsApp,* enviar la foto y observar cómo se recibe la foto en otro teléfono. En este caso se verifica que las personas se encuentran en distintas posiciones en el auto en cada una de las fotos. Esto lleva a analizar y responder que a través de *WhatsApp* las personas en la imagen se encuentran en una determinada posición que se cambia automáticamente por el teléfono del que se toma la imagen al ser guardado en la galería.

Para justificar lo sucedido a partir de conocimientos matemáticos se puede apelar a internet, indagar el motivo por el cual la aplicación y el celular no modifican o modifican las imágenes. Probablemente, se encuentre que *WhatsApp* toma la foto en modo de "espejo". Para dar una respuesta en lenguaje matemático se puede apelar a la noción de sentido en el espacio tridimensional.

Resolución 2

En esta resolución se supone que se conoce el modo de proceder del teléfono y de la aplicación *WhatsApp* respecto a las fotos, o se apela en primera instancia a un trabajo experimental como se muestra en la *Resolución 1*. Posteriormente, se emplea el software de geometría dinámica para dar una justificación matemática que explique la situación. Por ejemplo, se construye en *GeoGebra,* apelando a la noción de simetría axial en el plano, una representación de la variación que se presenta entre la foto que se guarda en el chat de la aplicación y la que se guarda en la galería del celular. Se contrasta y fundamenta a partir de inversión de sentido la diferencia establecida entre las imágenes.

Para construir lo anterior, se puede utilizar el comando simetría axial, que transforma una foto en la otra foto invirtiendo el sentido (Figura 1).

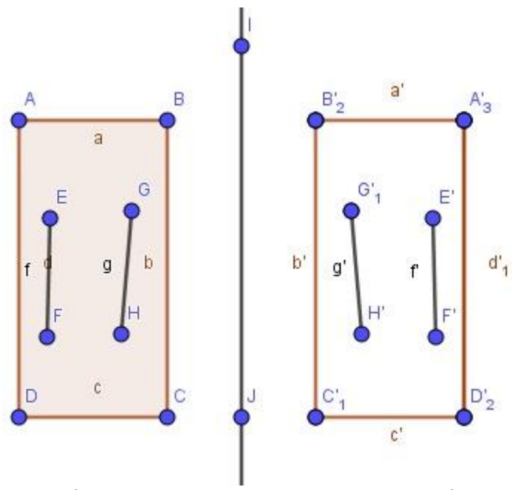


Figura 1. Representación en *GeoGebra* apelando a la noción de simetría axial

Resolución 3

En esta resolución consideramos nuevamente que se conoce el modo de proceder del celular o que se experimenta en primera instancia.

La argumentación matemática que se propone es emplear las nociones de traslación y simetría axial, representando, nuevamente la situación en *GeoGebra*. Por ejemplo, en la vista grafica 3D se grafican dos planos, uno identificando a la realidad y otro a la pantalla del celular. Luego, se puede aplicar una simetría axial y concluir que se puede transformar la realidad en una foto en la que se invierte el sentido.

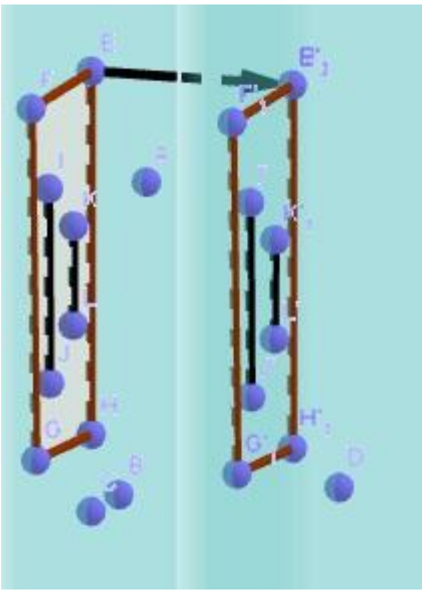


Figura 2. Representación en *GeoGebra* apelando a la noción de traslación.

Resolución 4

Nuevamente consideramos que se conoce el modo de proceder del celular o se experimenta en primera instancia. En este caso, se representa en *GeoGebra*. Se supone que existe un movimiento que transforma la realidad en la foto, se experimenta con el software en la vista grafica 3D hasta conjeturar que la simetría especular resulta útil para entender la inversión de sentido que se produce entre la foto del celular y la persona, como se muestra en la Figura 3.

Teniendo en cuenta que los futuros profesores que participarán de esta experiencia no han cursado previamente Geometría Euclídea Espacial (geometría tridimensional), es posible que la noción de simetría especular sea producida por ellos al trabajar matemática y tecnológicamente.

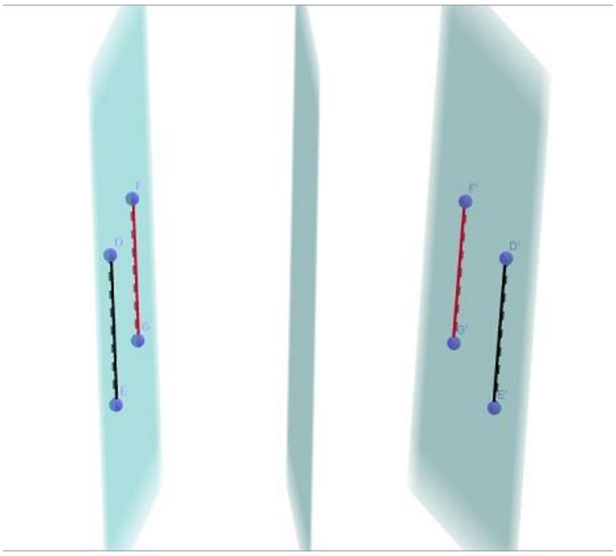


Figura 3. Representación en *GeoGebra* apelando a la noción de simetría especular

Reflexiones finales

En este trabajo mostramos los primeros avances de una investigación que se encuentra actualmente en curso. Consideramos que llevar adelante esta propuesta con futuros profesores permitirá, tal como plantean Borba y Villarreal (2005) que trabajen como una comunidad matemática en la que produzcan conocimientos tecnológicos y matemáticos a partir de un trabajo en interacción, donde las tecnologías digitales median los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

A su vez, consideramos que en la propuesta los estudiantes llevarán adelante las actividades características del quehacer matemático (Itzcovich, 2007) mediadas y apoyadas por las actividades características de los software de geometría dinámica, experimentarán, visualizarán, se sorprenderán y retroalimentarán (Arcavi y Hadas, 2000), además generarán y validarán conjeturas empleando el ensayo y error administrado de modo que pueda conducir en forma organizada al encuentro de la solución (Villarreal, 2012).

A partir del uso de *GeoGebra* se puede construir la definición de simetría especular no conocida por los estudiantes, dado que es una transformación no válida en el plano espacio en el que trabajaron hasta el momento los estudiantes que participan de la propuesta.

Finalmente consideramos que con la puesta en juego de la propuesta generaremos datos que nos permitan responder el objetivo de investigación propuesto para analizar los datos y contrastar el análisis que aquí presentamos con las actuaciones de los futuros profesores.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, (5)*, 25-45.

Borba M y Villarreal M. (*2005). Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Nueva York, EEUU: Springer.

Itzcovich, H. (2007). *La matemática escolar*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Kornblit, A. (2007). *Metodologías cualitativas en ciencias sociales*. Buenos Aires, Argentina: Biblos.

Maggio, M., Lion, C. y Perosi, M. (2014). Las prácticas de la enseñanza recreadas en los escenarios de alta disposición tecnológica. *Polifonías - Revista de Educación, 3*(5), 101-127.

Kaplan, G., Robalo, G., Tedesco, G., Nicodemo, M. y Novembre, A. (Coord.). (2016). *Aportes para pensar la enseñanza de la matemática con TIC*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Villarreal, M. (2004). Transformaciones que las Tecnologías de la Información y la Comunicación traen para la Educación Matemática. *Yupana,* (1), 41-55.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia, 3*(5), 73-94.

Yin, R.K. (2018). *Case Study Research and Applications*. Londres, Reino Unido: SAGE.

GeoGebra como mediador en la construcción de aspectos relevantes de la definición conceptual de simetría axial

PATRICIA CAVATORTA

patricia.cavatorta@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Instituto Superior del Profesorado Nº 6

MARÍA ANGÉLICA ZURBRIGGEN

mazurbriggen@gmail.com

Instituto Superior del Profesorado Nº 6

Resumen

En este trabajo se expone un avance de investigación. La misma tiene por objetivo analizar las posibilidades ofrecidas por el software *GeoGebra* en el reconocimiento de atributos relevantes e irrelevantes en el proceso de construcción o reconstrucción de las definiciones de las transformaciones en el plano, a partir de una actividad implementada con estudiantes del profesorado en matemática.

La consigna de la actividad se diseña especialmente para un grupo de estudiantes de la materia Tópicos de Geometría de tercer año del Profesorado en Matemática de un Instituto Superior de la provincia de Santa Fe.

Se reporta sólo lo relativo a la transformación simetría axial. El análisis de la implementación de la actividad arroja resultados que permiten reflexionar respecto del tratamiento de las definiciones de las transformaciones en el plano en la formación de profesores y del papel que cumple *GeoGebra* particularmente en la construcción de la definición de simetría axial a partir de la propuesta. Para el análisis se consideran datos obtenidos de los registros de los estudiantes en un cuadro (presente en la consigna) y de las grabaciones audiovisuales de los grupos mientras resuelven la consigna.

Introducción

Una de las acciones importantes en matemática es la de definir un concepto. Es importante el rol que juega en el aprendizaje de los estudiantes el tener incorporada la definición de un concepto, así como sus propiedades, y al mismo tiempo las representaciones que se tienen presentes cuando se lo menciona. Cuando se evoca un concepto lo primero que aparece son representaciones de éste, lo que Vinner (1991) denomina imagen conceptual, pero para poder hacer uso adecuado de él, en procesos de formulación y validación de una conjetura, es necesario además tener en claro su definición conceptual.

Por estas razones es importante trabajar seriamente en las propuestas de enseñanza cuando se pretende abordar la definición de conceptos. Se piensa entonces si ¿la definición se enseña o se enseña a definir? (De Villiers, 1998), y en todo caso, ¿cómo se enseña a construir una definición?

En este sentido Winicki (2006) sostiene que definir es un proceso propio del quehacer matemático y debe enseñarse. No debe presentarse una definición como producto acabado. Señala que en este proceso de construcción de definiciones es fundamental el reconocimiento de atributos relevantes, es decir, necesarios y suficientes.

En la investigación llevada a cabo se tiene por objetivo analizar las posibilidades ofrecidas por el software *GeoGebra* en el reconocimiento de atributos relevantes e irrelevantes en el proceso de construcción o reconstrucción de las definiciones de las transformaciones en el plano, a partir de una actividad implementada con estudiantes del profesorado en matemática. Se reporta un avance de la misma donde se presenta lo relativo a la simetría axial.

Marco teórico

> En general, definir es el acto o proceso por el cual se establece de modo conciso el preciso significado o acepción de un concepto. Es el establecimiento de las propiedades esenciales (la *intención*) que caracterizan a todos y solamente a los elementos de la *extensión* del concepto. (Winicki, 2006, p. 530)

Según Winicki (2006), en el proceso de definir influyen criterios que no siempre se visibilizan cuando las definiciones son presentadas. Estos criterios establecen que la definición debe: ser precisa, basarse sólo en conceptos previamente definidos, ser consistente con definiciones en la que se apoya, ser arbitraria, dar condiciones necesarias y suficientes, no contener partes que pueden deducirse lógicamente de otras partes de la definición y ser elegante.

Para Vinner (1991) las definiciones crean un serio problema en el aprendizaje de las matemáticas. Estas representan, más que otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas según la conciben los matemáticos profesionales y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos. Sostiene que el profesor y el autor del libro de texto pueden pensar que su tarea termina con la introducción de la definición formal de un concepto, pero que eso no permite asegurar el poder que pueda tener esta definición en el pensamiento matemático del estudiante.

Los sujetos siempre tienen imágenes asociadas a un concepto, que las ponen en juego a la hora de resolver una situación problemática, es lo primero que se recuerda cuando se menciona al concepto. Vinner (1991) sostiene que cuando escuchamos el nombre de un concepto evocamos un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias, lo que denomina imagen conceptual y que pocas veces viene a nuestra mente la definición del concepto. Considera que la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está formada por las diversas representaciones que recuerdan como ejemplo del concepto y por el conjunto de propiedades que asocian al mismo. La imagen de un concepto es correcta cuando permite discriminar todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes. En la formación de la imagen de un concepto juegan un papel importante la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado. La actividad de los estudiantes está basada en la imagen del concepto y que la definición es inactiva o no existe. En este sentido, un concepto matemático está formado por tres componentes: la definición, su representación y las propiedades asociadas al mismo. Según este enfoque:

> […] adquirir un concepto significa, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y como éste está concebido por la comunidad matemática. En todo ejemplo de concepto podemos encontrar atributos relevantes, que son las propiedades que lo definen como tal concepto, y atributos irrelevantes, que son propiedades no necesarias a ese concepto y que permiten diferenciar unos ejemplos de otros. Las primeras son útiles para dar la definición del concepto; las segundas las utilizamos, generalmente, para realizar clasificaciones. (Turégano, 2006, p. 38)

Es necesario que los estudiantes logren construir a partir de diferentes experiencias los atributos relevantes de un concepto que permiten definirlo, ya que, como sostiene Vinner (1991), siempre se tiene presente la imagen conceptual asociada a un concepto, pero lo importante a la hora de resolver problemas es poner en juego la definición conceptual del mismo para poder dar argumentos válidos.

El dilema está en cómo un estudiante se apropia de la definición, ¿la definición se enseña? o ¿la definición se construye? (De Villiers, 1998), y en todo caso ¿cómo se construye?

Winicki (2006) sostiene que pocas veces los futuros profesores de matemática reflexionan sobre el proceso de definir un concepto, cuestión que resulta fundamental para generar su concepción de enseñanza y aprendizaje.

Para Winicki (2006) existe una diferencia entre la idea de definición como producto y el definir como uno de los procesos del quehacer matemático. La secuencia tradicional en la enseñanza de la matemática basada en definición-teoremas-problemas refleja el producto final de la actividad matemática, cuando en realidad parte de la creación matemática surge en el sentido opuesto, de secuencias como uso-descubrimiento-exploración-desarrollo-definición. Afirma que es importante convocar a los estudiantes de profesorados a construir definiciones de conceptos matemáticos y que en este tipo de actividades desempeñan un rol importante los ejemplos visuales en la creación de la imagen conceptual de un concepto geométrico, de la que habla Vinner (1991). Así, se pueden distinguir los atributos relevantes de un concepto de las propiedades irrelevantes. Esto, además de constituir una alternativa a la secuencia clásica y promover la reflexión acerca del proceso de formación de la imagen conceptual, permite plantear "la diferencia entre la *definición formal* del concepto -que es la definición matemática que la comunidad de profesionales ha aceptado- y la *definición personal* que utilizan las personas, como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal." (Winicki, 2006, p. 530)

Si los estudiantes construyen la definición personal de un concepto probablemente tengan una imagen conceptual más completa del mismo, reconozcan los atributos relevantes que lo definen y comprendan la definición formal. Así pueden reconstruir la definición cuando la necesiten como herramienta para resolver un problema.

Con relación al uso de entornos dinámicos en la resolución de problemas matemáticos, González-López (2001) plantea que un software de geometría dinámica (SGD) interpreta lo que realiza el usuario y devuelve una información sobre su producción que puede ser utilizada para progresar en la construcción de conocimientos. La comunicación con el usuario se basa en la visualización. De este modo, se debe relacionar información geométrica con lo que se observa en un dibujo que se mueve, obteniendo nuevos dibujos con las mismas propiedades que el inicial. Este aspecto incide en la generalización y en la abstracción, en el hallazgo de propiedades invariantes y en la formulación de conjeturas.

En el mismo sentido, Balacheff (2000) sostiene que “el conocimiento no puede leerse simplemente de una pantalla, es el resultado de una construcción de un proceso de interacción con la máquina.” (p. 94). No se trabaja con un dibujo sino con una categoría de dibujos, cada uno de las cuales es un caso de una figura geométrica. El entorno dinámico brinda herramientas para la validación de propiedades o la construcción de contraejemplos. Una propiedad es válida si se cumple al mover los puntos libres. “Una propiedad geométrica es un invariante perceptual” (Balacheff, 2000, p.95).

Arcavi y Hadas (2000) plantean que los ambientes dinámicos computarizados tienen características que potencian la actividad matemática de los estudiantes en la resolución de un problema. Estas son: la experimentación, la visualización, la sorpresa, la retroalimentación y la necesidad de pruebas o demostraciones. Al realizar construcciones de determinadas figuras pueden observar, medir, comparar, distorsionar la figura, hacer construcciones auxiliares. Esta experimentación favorece el establecimiento de conjeturas y generalizaciones. Por otro lado, al visualizar la construcción y poder transformarla en tiempo real crean bases intuitivas para justificar sus conjeturas. En ocasiones se genera cierta “sorpresa”, que es el desconcierto entre lo conjeturan previo al uso del SGD y lo que éste ofrece o les permite ver. De este modo se produce una retroalimentación entre el ambiente dinámico y los estudiantes, provocando que los mismos tengan que revisar sus conocimientos, sus saberes y sus predicciones. Esta retroalimentación es diferente a la que se puede dar con el docente, ya que carece de juicio de valor, y puede motivar a necesidad de demostrar. Se da así un ciclo que los autores llaman experimentación-retroalimentación-reflexión que permite la construcción de argumentos de aquello que conjeturan.

Metodología

La investigación es de tipo cualitativa, pues se realiza un análisis interpretativo de los datos obtenidos sobre lo realizado por los estudiantes durante una actividad de construcción de definiciones de transformaciones en el plano mediada con GeoGebra y se presentan los resultados (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Se evalúa el desarrollo natural de los sucesos. Se utiliza la observación participante, la cual permite recoger datos de las participaciones informales, propias de la dinámica áulica.

La actividad implementada se diseña especialmente para un grupo de estudiantes de la materia Tópicos de Geometría de tercer año del Profesorado en Matemática de un Instituto Superior de la provincia de Santa Fe. Los estudiantes tienen regularizada o aprobada la materia Geometría Euclidiana, en la que realizaron sólo construcciones con lápiz y papel considerando las definiciones formales de transformaciones rígidas en el plano, sin profundizar en el tema.

En la materia se quieren recuperar esos conceptos y trabajar además homotecia y semejanza desde la geometría sintética y luego, todas las transformaciones en el plano desde la geometría analítica. No se aborda la inversión a pesar de que se solicita en la consigna la exploración con relación a ella, sólo se pretende que reconozcan una transformación que no conserva alineación de los puntos, ángulos, longitudes, etc.

La actividad se desarrolla en una clase de 4 horas cátedra, los estudiantes trabajan en grupos de dos o tres integrantes cada uno. Cada grupo posee uno o dos dispositivos con el software *GeoGebra* instalado. Se anticipa que finalizado el momento de trabajo grupal tendrá lugar una puesta en común con el objetivo de elaborar y/o reconstruir las definiciones de las transformaciones exploradas.

La consigna diseñada e implementada se presenta a continuación.

ACTIVIDAD (Exploración, visualización y conjeturas)

1. Construir la representación de un polígono (y otros objetos geométricos) en la vista gráfica del software GeoGebra y aplicar a ese objeto los movimientos que aparecen en el noveno botón.

2. Para cada una de las transformaciones completar el cuadro.

	Simetría axial	Simetría central	Traslación	Rotación	Homotecia	Inversión
¿Qué punto/s se mantienen invariantes en el movimiento?						
¿Qué objetos se mantienen invariantes?						
¿Conserva la orientación del plano? ¿Por qué?						
¿Conserva las dimensiones y ángulos? ¿Por qué?						
¿Qué sucede con la alineación y orden de los puntos?						
¿Qué condiciones darían para definirlo?						

Para el análisis se consideran datos obtenidos de los registros de los estudiantes en el cuadro y de las grabaciones audiovisuales de los grupos mientras desarrollan la actividad. En este trabajo se presenta sólo el análisis correspondiente a simetría sxial. Se enfatiza en dos cuestiones: los atributos relevantes e irrelevantes de la definición identificados por los estudiantes y el papel que juega el *GeoGebra* en el proceso de identificación de los mismos a partir de esta actividad.

Para el análisis de los datos se establecen los **atributos relevantes** de la definición formal de simetría axial, recuperada de la bibliografía obligatoria de la materia (Garguichevich, 2007). Los mismos son:

- Es necesario contar con un objeto auxiliar, una recta, que funciona como eje de simetría.
- Invarianza puntual de cada punto del eje de simetría.
- Todo punto *P*, que no pertenece al eje se transforma en otro *P´*, que se encuentra en la recta perpendicular al eje que pase por *P*.
- *P* y *P´* equidistan del eje de simetría.

Los demás aspectos o propiedades que puedan deducirse a partir de los anteriores, se consideran **atributos irrelevantes**.

Resultados

Se analiza lo realizado por tres grupos de estudiantes en relación con la transformación simetría axial, durante el proceso de resolución de la actividad (mencionados como grupos 1, 2 y 3). De los grupos 1 y 2 se toman fragmentos de diálogos que mantienen con el docente durante algunas de sus intervenciones y de los grupos 2 y 3 se recupera lo registrado en el cuadro de la consigna. En los diálogos transcriptos se usan las letras A y D que corresponden a intervenciones de alumno y docente respectivamente.

Grupo 1. Se analizan cuatro diálogos.

Diálogo 1

A1: Si en la simetría axial yo estoy aplicando simetría al punto *C*, ¿qué pasa si ese punto *C* se encuentra sobre el eje sobre el cual estoy aplicando la simetría?
D: O sea, a medida que acercás el punto C al eje, el punto *C´* también se acerca.
A1: Y hasta que el punto se encuentra contenido en la recta del eje podemos ver que el punto coincide con su transformación con *C´*, *C* y *C´* son iguales.
D: Son el mismo punto, y entonces, respecto a las preguntitas que tienen...

> A1: ¿Cuándo un punto en simetría axial es invariante? Sería invariante cuando el punto se encuentra contenido sobre la recta que es el eje. Y en el caso de que es un triángulo, podemos pensar en un triángulo, aplicamos la simetría axial a un triángulo cuyo lado está contenido en la recta del eje, todos los puntos del lado del triángulo seguirán transformándose a sí mismos. ¿Es así o no?
> D: ¡No sé!, ¿Vos qué decís A2?
> A2 Llegamos a esa conclusión. Claro, contenido dentro de la recta.
> […]
> D: Estaría bueno ahora que se pongan a pensar en esa última pregunta del cuadro. ¿Qué condiciones darían para definir o cómo definirían simetría axial?
> A1: Tiene que haber un eje de simetría, algo que actúe como eje sobre el cual estaríamos aplicando la transformación.

En este diálogo se aprecia la visualización de muchos ejemplos a partir de la exploración, lo que permite analizar invarianzas y alcanzar conjeturas. Los estudiantes logran identificar dos aspectos relevantes de la definición de la simetría axial. Refieren a la necesidad de contar con una recta, que actúe como eje de simetría, para poder efectuar la transformación. Por otro lado, logran conjeturar a partir de la exploración (cuando refieren a lo sucedido con el punto libre *C*) que: un punto que no pertenece al eje se transforma en otro punto del plano y uno que pertenece al eje se transforma en sí mismo. De esta manera se identifica la invarianza del eje de simetría, y de cada punto de éste.

En el caso de la identificación de contar con el objeto matemático “recta” para definir, el software juega un papel importante. Cuando se posicionan en el botón de simetría axial aparece la leyenda: “Objeto a reflejar; luego eje de simetría”, lo que manifiesta la necesidad de construir una recta que opere como eje, previo a realizar la transformación.

La comunicación entre los estudiantes y el software se basa en la visualización dinámica (González-López, 2001). Los estudiantes utilizan la información devuelta por *GeoGebra*, varianza del punto *C* en algunos casos e invarianza en otros, para progresar en sus conjeturas respecto de la transformación de los puntos. Esta comunicación incide en el hallazgo y formulación del segundo atributo relevante mencionado: los puntos del eje se transforman en sí mismos.

Se observa la aparición en un atributo irrelevante cuando refieren a lo que sucede con la transformación de los puntos de un triángulo que tiene uno de sus lados contenido en el eje, no se necesita de él para construir la definición. De todos modos, esto puede dar origen a la identificación de propiedades de la transformación.

Dialogo 2

D: [...] el eje de simetría ¿cómo tiene que ser?, ¿puede ser un segmento por ejemplo?
A1: No, porque si tenemos un segmento (dibuja en *GeoGebra*)... Ahí sí hizo la transformación.
D: ¿Y qué tocaste para que la haga?
A1: De segmento a objeto.
D: Mmmm no sé si tocaste eso, y pero ¿por qué la habrá hecho? [...] Cuando vos seleccionás en el botón Simetría Axial, posiciónate ahí, ¿qué te pide?
A1: Objeto a reflejar, luego el eje de simetría.
D: Hay que pensar si el eje de simetría puede ser un segmento, por ejemplo, vamos a agrandar un poquito este triángulo [ver Figura 1]. ¿Cómo habrá hecho *GeoGebra* para reflejar el *C* en *C1*?
A1: Y... debe estar correcta.
A2: Debe estar buscando la recta que tenga ese segmento...

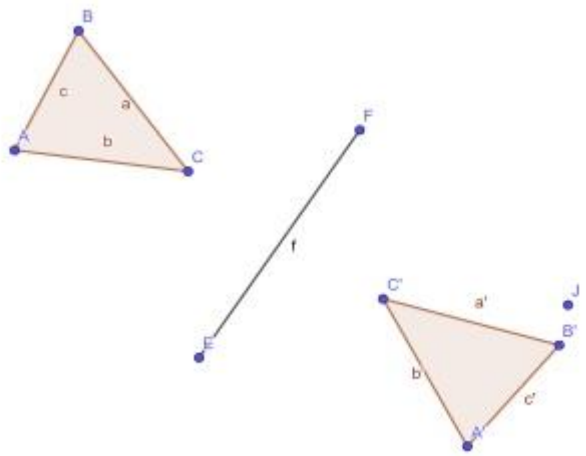


Figura 1. Construcción correspondiente al Diálogo 2

El software realiza la simetría axial cuando lo que se construye como objeto auxiliar (que funciona como eje) es un segmento. Esto genera una sorpresa (Arcavi y Hadas, 2000) en los estudiantes, sucede algo inesperado (e incorrecto). En esta oportunidad, el SGD realiza la simetría contemplando la recta que contiene al segmento, cuestión que no es explícita y debe ser deducida por los estudiantes. Esto es posible debido a que cuentan con saberes previos y habilita a reflexionar sobre por qué es necesario contar con una recta y no con un segmento. En este sentido, el trabajo en el ambiente dinámico favorece un ciclo de visualización, experimentación, sorpresa y retroalimentación, que permite pensar sobre un **aspecto relevante** de la definición: la necesidad de contar con una recta como objeto auxiliar.

El grupo continúa explorando, realizan transformaciones con otros objetos, construyen una circunferencia, realizan una simetría axial cuyo eje contenga un diámetro y surge lo siguiente.

Diálogo 3

A2: Hay puntos que sí permanecen… en la circunferencia que permanecen invariantes. Son los que se encuentran sobre el eje, podemos ver que, en el objeto, la transformación del punto *D*, se transforma en *D'*, es decir que los dos puntos son iguales.
A1: O sea los dos puntos…
D: ¿En esos únicos observan invarianza…?
A2: Son los puntos que se encuentran sobre el diámetro, sobre el eje que contiene a ese diámetro.

Verifican una vez más, lo que conjeturan previamente, la invarianza de los puntos que pertenecen al eje de simetría, **aspecto relevante** que reafirman a partir de la retroalimentación generada con el software.

Explicitan también un atributo **irrelevante**, la invarianza global de toda circunferencia con diámetro en el eje, como se ve en el diálogo siguiente.

Diálogo 4

A2: Si tomamos una circunferencia y el eje de simetría estaría sobre el diámetro de esa circunferencia, ¿qué pasaría con esa transformación? Lo que podemos ver es que la circunferencia se transformó a sí misma, es decir cada punto permaneció invariante. Pero… cada punto C en la transformación, C' no se está transformando en el mismo punto. C se está transformando en C', no permanece invariante el punto, pero la circunferencia en sí, se transforma en sí misma, ¿no es cierto?
D: O sea que ahí hay una invarianza del objeto circunferencia.
A2: ¡Claro! y no de los puntos…
D: ¡No hay una invarianza puntual!
A2: Hay puntos que sí permanecen, de la circunferencia que permanecen invariantes. Son los que se encuentran sobre el eje […]

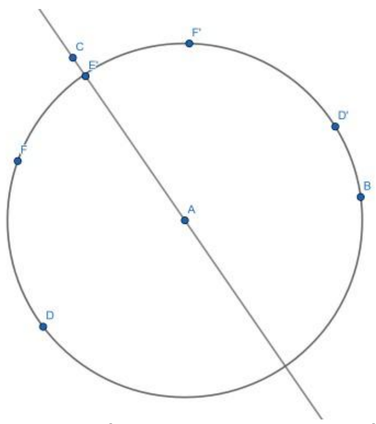


Figura 2. Construcción correspondiente al Diálogo 4

Si bien expresan un atributo irrelevante (pues puede deducirse de la definición), éste puede colaborar en la construcción del concepto, ya que permite generar imágenes conceptuales (Vinner, 1991) sobre el mismo.

Grupo 2. Se analiza el siguiente diálogo.

Diálogo 5

A1: Estuvimos analizando que no conserva el sentido del plano, porque como nos había enseñado la profe del año pasado o sea trazamos así una… no sé qué sería… bueno de *ABC* va en sentido hacia *A*. Y si hacemos lo mismo considerando estos puntos va a ir así (muestra en la pantalla) o sea que el sentido sería contrario. Porque este sería así y este al revés.
D: O sea, si vos recorrés el triángulo, caminando de *A* a *B*, de *B* a *C*, ¿el interior del triángulo dónde te queda? ¿Te queda a la derecha? Vos pensá que vas caminando… Pero y… ¿qué significa que la flechita va para allá y para allá?
A1: Por ejemplo, si lo calculamos así, este termina en un ángulo distinto que en este. Porque este sería el que corresponde.
D: Vos me dijiste, si voy de *A* a *B*, de *B* a *C*, ¿qué pasa? me dijiste que la flechita…
A1: En sentido contrario.
D: En sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario a las agujas del reloj.
Alumno 1: Uno sí y el otro no.
D: Piensen de qué manera lo podría decir más formalmente.
A1: Eso es lo que no nos acordamos, la formalidad.
[…]
A1: Nosotros construimos la figura en el *GeoGebra*, entonces cuando hacemos la simetría axial, esta figura no conserva el sentido, sino que va a estar de forma contraria a las agujas del reloj.
D: ¿Por qué vos decís que esta figura tiene un sentido?, es decir… ¿vos le estás dando un sentido a esta figura?
[…]
A2: Es decir, la primera figura sí va en sentido del reloj, pero cuando se le aplica la transformación a esa figura de la Simetría Axial la figura que se obtiene, el sentido es antihorario. Porque se refleja, con el eje de simetría. No es una transformación directa.

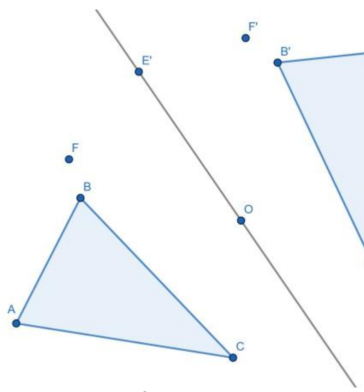


Figura 3. Construcción correspondiente al Diálogo 5

Se visibiliza la discusión sobre una característica importante de la simetría axial, que **representa un atributo irrelevante** para su definición, pero la diferencia de otras transformaciones rígidas, la no conservación de la orientación del plano.

Si bien estos estudiantes ya habían abordado parcialmente el tema, se presentan dificultades para expresar por qué se invierte la orientación del plano en una simetría axial. Ellos saben que es la única transformación rígida en la que esto sucede y lo ven en la construcción, pero no pueden fundamentar adecuadamente. Esto da indicio de que, si bien poseen imágenes conceptuales (Vinner, 1991) de la simetría axial, aún no han incorporado la definición conceptual. Quedan embebidos en la discusión sobre la orientación del plano. Esto da la pauta de que, a pesar de haber contado con la definición formal previamente y señalado propiedades de la simetría axial, no han logrado incorporar qué se entiende por orientación del plano.

Grupos 2 y 3. Se muestra una transcripción textual de las respuestas expresadas en el cuadro por dos de los grupos respecto a simetría axial.

	Simetría Axial (Grupo 3)	**Simetría Axial (Grupo 2)**
1) ¿Qué punto/s se mantienen invariantes en el movimiento?	Los puntos invariantes son los que pertenecen al eje de simetría.	Ninguno.
2) ¿Qué objetos se mantienen invariantes?	Cualquier objeto que pertenece al eje de simetría.	El eje de simetría (recta).
3) ¿Conserva la orientación del plano? ¿Por qué?	No lo conserva, porque cambia de sentido.	No lo conserva, porque es un movimiento inverso.
4) ¿Conserva las dimensiones y ángulos? ¿Por qué?	Conserva dimensiones porque es una transformación rígida.	Sí, ya que la figura obtenida es reflejo de la recta.
5) ¿Qué sucede con la alineación y orden de los puntos?	Se mantiene la alineación y el orden.	Se conservan ambos.
6) ¿Qué condiciones darían para definirlo?	Tiene que haber una recta (eje de simetría) y un objeto.	Se traza un polígono y una recta (e) cualquiera. Se trazan rectas perpendiculares a e que pasan los vértices del polígono. Se trazan arcos de circunferencias desde los pies de las perpendiculares y amplitudes desde el pie al vértice. Se traslada esa amplitud en la semirrecta opuesta y se obtienen los puntos homólogos.

Se observan diferencias en lo que percibe cada grupo. En relación con la primera pregunta, referida a la invarianza de los puntos, el grupo 2 parece no notar que los puntos del eje de simetría permanecen invariantes, lo que manifiesta una dificultad para detectar un **aspecto relevante** para la construcción de la definición. Sin embargo, ante la pregunta 2, logran establecer como objeto invariante al eje de simetría. Esto hace suponer que durante la experimentación visualizan sólo la invarianza global del eje, pero no logran determinar otros objetos invariantes, aspectos que podrían contribuir a la imagen conceptual y así a la formación del concepto. Todo aquello que permanece invariante perceptualmente al mover los puntos en la pantalla, es una propiedad geométrica, pero esto requiere ser leído/interpretado por los estudiantes (Balacheff, 2000).

Por otro lado, el grupo 3 reconoce la invarianza puntual de los puntos del eje de simetría y la global del mismo, pero no logra determinar otros objetos que mantienen invarianza global en el movimiento. Si bien, a partir de la exploración analizaron diversos casos, en la última fila del cuadro sólo mencionan una condición necesaria (**aspecto relevante**) para definirlo, la necesidad de contar con una recta. Además, no tienen claro que cuando se aplica una Simetría Axial se transforman todos los puntos del plano, esto se deduce ya que manifiestan la necesidad de tener un objeto para reflejar en la pregunta 6.

Con respecto a las preguntas 3, 4 y 5, referidas a la conservación de la orientación del plano, de longitudes, ángulos, alineación y orden de los puntos ambos grupos dieron respuestas correctas, pero dieron fundamentos débiles. Durante la experimentación generaron diversos ejemplos, representaciones e imágenes que podrían contribuir a la formación del concepto y sus propiedades, pero para justificar recurren a lo que conocían del tema y no a la reflexión generada en torno a lo experimentado. Un ejemplo de esto es cuando expresan que no conserva la orientación de plano por ser un movimiento inverso.

El grupo 2 hace una interpretación errónea de la pregunta 6 y mencionan los pasos de una construcción como las “condiciones para definir” la transformación. Sin embargo, en esos pasos mencionan algunos **aspectos relevantes** de la definición que no aparecen en el resto del análisis, la perpendicularidad entre el eje y la recta que contiene un punto y su transformado, y que un punto y su homólogo equidistan del eje.

Reflexión

La actividad propuesta resulta una alternativa que difiere de un posicionamiento tradicional. Como sugiere Winicki (2006), se pretende romper con la secuencia clásica: definición, ejemplos, no ejemplos, presentando una secuencia ligada al quehacer matemático del tipo uso-descubrimiento-exploración-desarrollo-definición.

A la luz del análisis se aprecia que entre todos los grupos logran mencionar (explícita o implícitamente) los atributos relevantes de la definición de Simetría Axial y también algunos irrelevantes. Esto fue, en parte, favorecido por el uso de *GeoGebra*, la exploración con el SGD favoreció la visualización de un bagaje de imágenes asociadas al concepto de simetría axial, lo cual colabora en la construcción del concepto en tanto enriquece la imagen conceptual de cada estudiante y, al mismo tiempo, permite la identificación de aspectos que deben ser considerados a la hora de definir Simetría Axial y reconocer sus propiedades.

Los estudiantes a partir del proceso experimentación-visualización-sorpresa-retroalimentación del que hablan Arcavi y Hadas (2000) logran construir herramientas que tendrán disponibles para la elaboración de una definición personal en el momento de puesta en común. Esto favorece la comprensión, pero al mismo tiempo la apropiación de la definición formal que se trabaje luego.

Este grupo de alumnos, a pesar de haber contado con la definición formal de Simetría Axial previamente (en otra materia) no se había apropiado de ella, recordaban más que nada algunos aspectos irrelevantes y procedimientos; pues la definición fue enseñada desde una secuencia tradicional, se toma la definición como producto a presentar y no se enseña a definir. Esto reafirma lo señalado por Winicki (2006): si se presenta la definición formal y luego se propone la exploración, es probable que prevalezca en cada estudiante la imagen conceptual por sobre la definición conceptual. En cambio, si se enseña a definir, se favorece a que prevalezcan atributos relevantes de la definición por sobre la imagen conceptual y también propiedades (atributos no relevantes) de lo que se define.

Esta actividad, posible de realizar por el uso de *GeoGebra*, permitió generar una reflexión sobre la definición personal de cada uno, revisar sus interpretaciones, para reformular, (re)construir, explorar, desarrollar y acercarse a la definición formal.

Este resultado parcial de la investigación presenta aportes para justificar la necesidad de repensar la formación matemática de los futuros profesores, particularmente el tratamiento de las definiciones de conceptos, "... ya que el nuevo papel que, como profesores, deben asumir consiste en diseñar situaciones didácticas y utilizar programas de ordenador, materiales didácticos, etc., que reflejen el proceso de construcción del concepto, y no sólo del concepto” (Turégano, 2006, p.36).

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (5), 25-45. Recuperado de http://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-dereferencia.pdf

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad de Los Andes y Una empresa docente.

De Villiers, M.D. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch.

Garguichevich, G. (2007). *Geometría del plano y del espacio*. Rosario, Argentina: UNR.

González-López. M.J. (2001). Gestión de la Clase de Geometría. Utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp.277-290). Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de : http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/Gonzalez-LopezM01-2595.PDF.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M.P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México, México: McGraw Hill.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematic*s, *12*(2), 151-169.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, (21), 35-48.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Winicki, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 528-537). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Propiedades empleadas, deducidas y reconocidas en una construcción. El caso del rombo

MAGALÍ FREYRE
magali.freyre@gmail.com
ANA MARÍA MÁNTICA
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este trabajo se expone lo realizado por estudiantes de cuarto año del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral en la resolución de un problema de geometría utilizando *GeoGebra*. Para la recolección de datos relacionados al trabajo continuo de los estudiantes se utilizan un grabador de pantalla y grabaciones de audio y video. El problema se resuelve de manera grupal y luego se socializan los resultados y procedimientos al grupo clase en una puesta en común. Posteriormente a la resolución del problema los estudiantes son entrevistados con el objetivo de indagar en los procedimientos realizados. El grupo analizado recurre a un caso particular de un concepto geométrico y esto les genera dificultades para distinguir propiedades empleadas en las construcciones y deducibles de las mismas, ya que las propiedades que deducen provienen de ese caso particular. Durante la entrevista se genera un intercambio acerca de las propiedades que se pueden explicitar desde esa construcción, reflexionando sobre la imposibilidad de generalizar desde un caso particular. El reconocimiento visual de la imagen devuelta por el software no garantiza el reconocimiento de propiedades geométricas asociadas a esa imagen, por lo que éste debería ser objeto de enseñanza.

Introducción

Se analiza la resolución de un problema de geometría con el uso de GeoGebra por parte de estudiantes de cuarto año del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, quienes tienen aprobada la asignatura Geometría Euclídea Plana, propuesta para el segundo año de la carrera. El objetivo del problema es identificar las propiedades geométricas empleadas al realizar una construcción con este software de geometría dinámica y las que pueden deducirse de la misma. El modo de proponer la tarea apunta a generar interacciones entre pares que contribuyan a enriquecer las estrategias de resolución, desmitificando la creencia que afirma que el trabajo con dispositivos móviles es aburrido, antisocial, y obstaculiza el debate (González Fernández, 2016). Así, los estudiantes no trabajan individualmente en las pantallas de sus notebooks.

Se estudia el trabajo realizado por un grupo de dos estudiantes que resuelven la actividad. Para esto se toma lo reflejado en el video generado por un grabador de pantalla, las grabaciones de audio y video de la puesta en común en la que los estudiantes socializan sus procedimientos, el audio de una entrevista realizada a los mismos, el archivo de *GeoGebra* que producen, y el archivo de *Word* en el que registran la resolución del problema. Todos estos insumos dan cuenta de los procedimientos llevados a cabo por estos estudiantes.

Encuadre conceptual

La función protocolo de construcción del software de geometría dinámica *GeoGebra* permite recuperar los procedimientos de construcción realizados. Esto posibilita a los estudiantes determinar qué propiedades geométricas se emplean en función de las herramientas seleccionadas en dicha construcción. Identificar las propiedades que se utilizan en la realización de una construcción, contribuye a la producción de demostraciones de propiedades deducidas de la misma.

Para el análisis se tienen en cuenta especialmente los tipos de construcciones con software de geometría dinámica de acuerdo a cómo soportan el desplazamiento. Interesa también examinar la relevancia en la producción de demostraciones, al estudiar de qué manera los estudiantes identifican las propiedades utilizadas para elaborar construcciones y las deducidas de las mismas (Healy, 2000; Arcavi y Hadas, 2000).

Las construcciones blandas no tienen en cuenta todas las propiedades geométricas esperadas, pero a partir del desplazamiento se logra que, en alguna posición de la figura, éstas se verifiquen "a ojo". Por el contrario, las construcciones robustas cumplen con todas las propiedades geométricas esperadas, por lo que al hacer uso del desplazamiento éstas se verifican en todas las posiciones (Healy, 2000).

Respecto a las construcciones, se considera pertinente también el planteo de Sánchez y Prieto (2019) quienes consideran dos tipos de elementos como intervinientes en una construcción: la tarea de construcción, que es el problema al que se enfrentan los alumnos y la técnica de construcción asociada, que refiere al procedimiento empleado para producir el dibujo dinámico como respuesta a la tarea de construcción. Sostienen que “la técnica de construcción de un dibujo dinámico puede entenderse como la instanciación concreta de una forma culturalmente codificada de pensar en un objeto geométrico (aquel modelado por el dibujo), en atención a su construcción con la ayuda de un SGD (Cabri, GeoGebra, etc.)" (p.59).

Se considera, además, la incidencia de la definición de conceptos geométricos por inclusión jerárquica o por partición y las ventajas y las desventajas de las mismas en la elaboración de pruebas (De Villiers, 1994). Carreño y Climent (2019) también investigan sobre esta problemática y particularmente trabajan con futuros docentes de matemática a partir de la definición de cuadriláteros. Encuentran que algunos emplean definiciones teniendo en cuenta características convencionales (paralelismo e igualdad de lados o ángulos) y otros además de estas características consideran algunas no convencionales, como diagonales o alturas. Analizan qué tipos de definiciones utilizan: inclusivas, descriptivas o excluyentes. También estudian el conocimiento de propiedades, si su imagen conceptual es rica o si reconocen primordialmente representaciones prototípicas.

Encuadre metodológico

Este estudio se enmarca en una investigación cualitativa interactiva, ya que como señalan McMillan y Schumacher (2005), se emplean técnicas cara a cara para obtener datos destinados a estudios en profundidad en escenarios naturales.

La recolección de datos se realiza a partir de un grabador de pantalla que permite registrar el trabajo continuo de los estudiantes en la computadora (*GeoGebra* y *Word*). Se propone un trabajo en grupos y el audio de las interacciones al resolver la actividad queda plasmado a través del grabador de pantalla. Este recurso genera un video en el que se puede visualizar el trabajo de los estudiantes, lo que representa uno de los principales insumos para el análisis. Se realizan además una puesta al grupo clase para socializar resultados que es grabada en audio y video y una entrevista a los estudiantes en una instancia posterior a la resolución del problema, que es grabada en audio. En la entrevista, grupal y semiestructurada, (Cohen, Manion y Morrison, 2007) se indaga sobre los procedimientos llevados a cabo por los estudiantes.

El problema que los estudiantes resuelven es el siguiente:

a) Construye con GeoGebra un rombo de al menos dos maneras distintas.
b) En cada caso completa una tabla de dos columnas. En la de la izquierda expresa las propiedades empleadas en la *construcción* y en la de la derecha las propiedades deducidas de la misma.
c) Elige una de las propiedades de cada columna de la derecha y realiza una prueba de la misma para cada construcción.

En el presente trabajo, se detalla el análisis de lo realizado por un grupo de tres estudiantes durante la resolución del problema, socialización de sus procedimientos y conclusiones en la puesta en común. También se considera lo recogido a través de la entrevista grupal y semiestructurada. El análisis se centra en la primera construcción realizada por estos estudiantes.

Discusión y resultados

Los estudiantes abordan el problema realizando tres construcciones. (Figura 1)

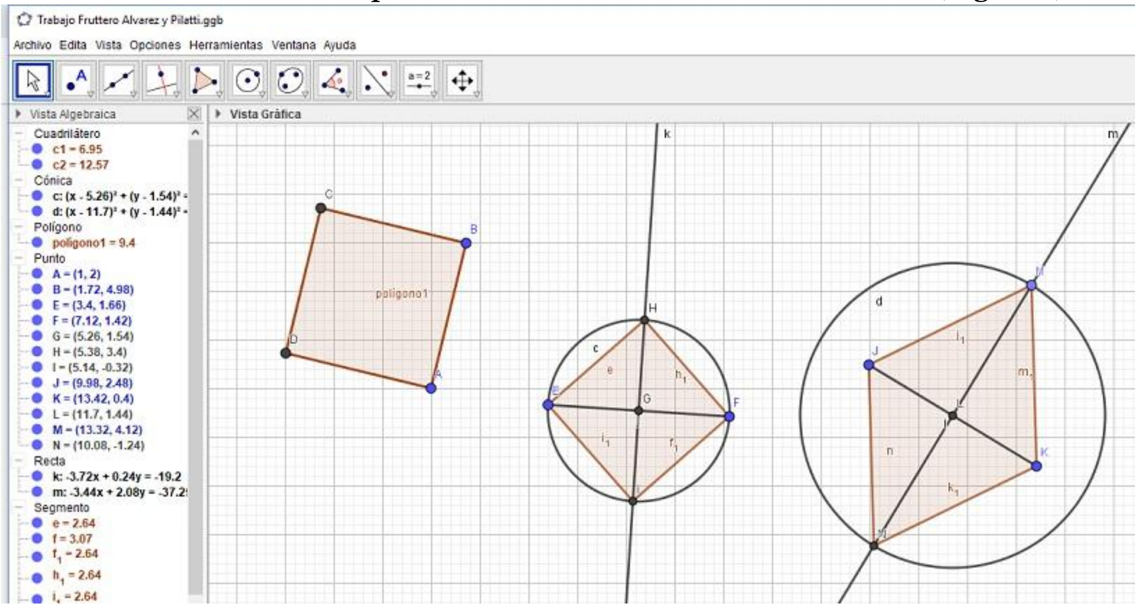


Figura 1. Construcciones

A partir del análisis del protocolo de construcción, puede afirmarse que son robustas puesto que cumplen con todas las propiedades geométricas relacionadas con la figura involucrada (Healy, 2000). Las dos primeras corresponden a un cuadrado, caso particular del rombo. Analizando lo respondido por los estudiantes en la entrevista, éstos justifican haberlas realizado teniendo claro que todo cuadrado es rombo. Afirman que de esta manera al construir cuadrados cumplen con lo solicitado por la consigna.

Como sostienen Sánchez y Prieto (2019), la técnica que se emplea en la construcción posee “contenidos conceptuales particulares referidos a la construcción del objeto geométrico, modelado por el dibujo dinámico” (p.59). Estos autores manifiestan que los estudiantes en general tienen dificultades para reconocer los pasos de la técnica empleada teniendo en cuenta las relaciones existentes entre el dibujo construido y el referente teórico. Así, comienzan a resolver el problema a partir de estas dos construcciones, pero a la hora de completar las tablas con las propiedades de cada una manifiestan encontrarse con algunas dificultades.

Se toma para el análisis la primera de las tres construcciones realizadas. En esta utilizan la herramienta polígono regular (Figura 2).

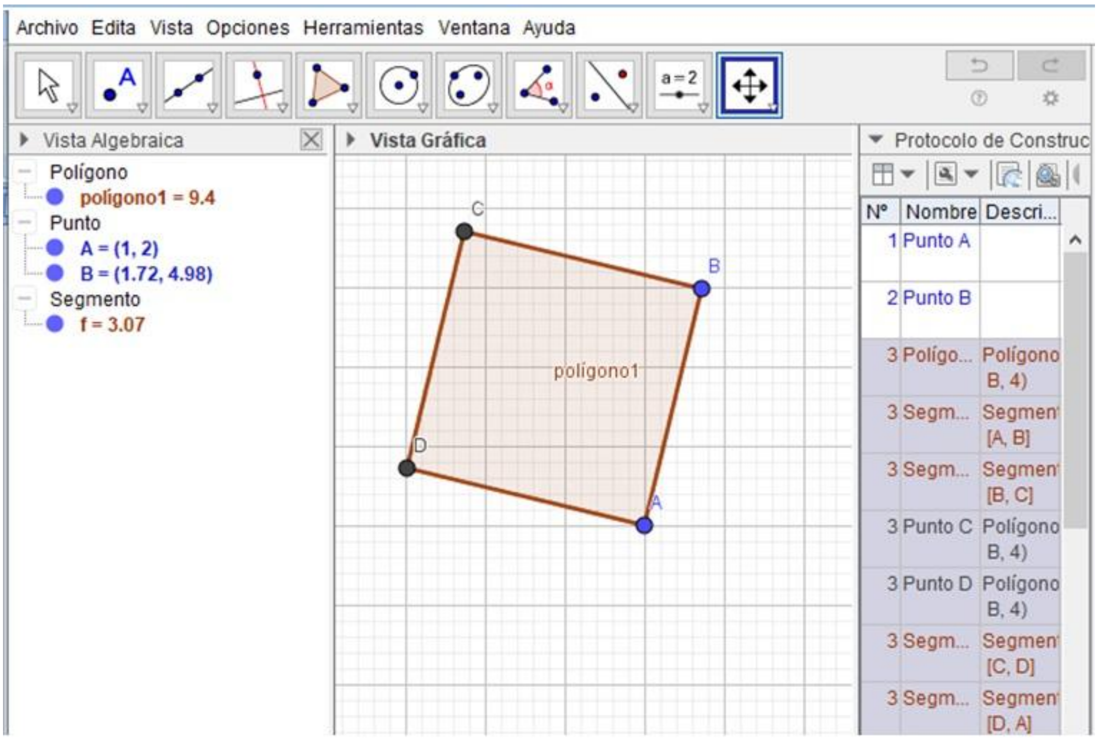


Figura 2. Protocolo de la primera construcción

Dentro de las propiedades empleadas enuncian:

Todo cuadrado es un rombo.

Durante la entrevista los estudiantes logran reconocer que la propiedad empleada en la construcción es que el polígono regular de cuatro lados es el cuadrado. Sánchez y Prieto (2019) manifiestan que los estudiantes en general tienen dificultades para reconocer los pasos de la técnica empleada teniendo en cuenta las relaciones existentes entre el dibujo construido y el referente teórico.

Cabe destacar que en ningún momento durante el trabajo en grupo los estudiantes evocan una definición adecuada de rombo y en sus interacciones puede observarse que dudan acerca de si son propiedades empleadas en la construcción o "consecuencias de la definición". En el debate con los pares y con el docente los estudiantes manifiestan que no tienen disponible la definición de rombo y en el análisis del diálogo esto queda reflejado. Si bien pueden recurrir a material bibliográfico disponible en internet o en la biblioteca de la facultad, no lo hacen.

Con respecto a las propiedades deducidas de la construcción enuncian:

Todos los cuadrados cumplen las mismas propiedades que los rombos, y
Los rombos tienen los cuatro lados iguales.

La primera de estas propiedades refleja la incidencia de estar trabajando con un caso particular de rombo. La segunda, no puede deducirse de la construcción realizada, aunque es una propiedad del rombo. En la entrevista se genera un diálogo entre los estudiantes (*E1* y *E2*) en el que reflexionan sobre su trabajo anterior:

E1: Claro, porque acá estamos generalizando de todo tipo de rombo, no estamos justificando del cuadrado, ahí estamos diciendo mal, porque si diríamos el rombo cuadrado, todo rombo que es un cuadrado tiene los cuatro lados iguales estaría bien.
E2: Pasa que el cuadrado tiene los cuatro lados iguales, es un caso particular, podría ser un caso particular del rombo.
E1: Pero el rombo que no tiene los cuatro ángulos iguales, tiene los cuatro lados iguales.
E2: Pero no se deduce de eso.
E1: Es verdad, no se deduce.
E2: Estamos tomando cuadrado y rombo como si fuesen lo mismo.

Si bien los estudiantes realizan una construcción robusta de cuadrado (Healy, 2000), el hecho de cumplir todas las propiedades esperadas de esa figura no les permite identificar las propiedades empleadas en la construcción de cuadrado. La elección de trabajar con un caso particular no les permite identificar las propiedades deducidas para el rombo, Con respecto al desplazamiento de puntos libres, se puede decir que no se realiza por los estudiantes en ningún momento durante el trabajo en grupos. Tampoco recurren al protocolo de construcción que les ofrece el software, lo que podría brindarles ayuda para identificar las propiedades empleadas. Las construcciones realizadas son observadas de esta manera como un dibujo, lo que no garantiza la identificación de propiedades, ya que, como afirma Itzcovich (2005, p.18): "lo que el ojo observa depende de los conocimientos que pone en funcionamiento el observador".

Por otra parte, si bien los estudiantes consideran la clasificación jerárquica de cuadriláteros, en la que el cuadrado es un caso particular de rombo, el hecho de haber elegido trabajar con este caso particular no les permite realizar deducciones de propiedades del rombo. De Villiers (1994) nombra como ventaja de las clasificaciones jerárquicas el hecho de que si se clasifica un concepto A como un subconjunto de otro concepto B, resulta innecesario repetir las pruebas de las propiedades para A, considerando que los procesos de clasificación y definición están relacionados. Los estudiantes no definen explícitamente, en este caso, ni rombo ni cuadrado, aunque reconocen la clasificación jerárquica y sus ventajas. Como mencionan Carreño y Climent (2019) utilizan una definición en la que emplean características convencionales y son descriptivas e inclusivas. El hecho de considerar un caso particular genera dificultades a la hora de identificar propiedades que sean del rombo y no solamente del cuadrado. Los estudiantes reconocen esta imposibilidad en algunos momentos mientras realizan el problema, sin embargo se evidencian generalizaciones incorrectas en las propiedades enunciadas.

Reflexiones

Se evidencian dificultades en los estudiantes del grupo analizado respecto a la vinculación de sus acciones y el saber geométrico, que se relaciona con las herramientas que se emplean para la construcción. Como afirman Sánchez y Prieto (2019): "Para que el saber geométrico que subyace en el uso de GeoGebra se revele a la conciencia, es necesario que los contenidos conceptuales incrustados en las herramientas, aparezcan durante la reflexión conjunta en torno a la técnica de construcción asociada" (p.61). Así, los estudiantes encuentran dificultades en determinar de manera adecuada las propiedades empleadas en las construcciones y las que se deducen de las mismas, no logrando el aspecto deductivo que lleva implícita la geometría euclídea, aún cuando se trata de estudiantes avanzados de profesorado de matemática.

Por otra parte, los estudiantes no recurren a definir la figura con la que van a trabajar, aún cuando se les solicita en varias oportunidades. Según Carreño y Climent (2019), el hecho de que profesores y futuros profesores analicen definiciones permite que se reflexione tanto sobre las características matemáticas de la definición como sobre la importancia de estas características en un contexto escolar. "En general, el abordaje de la definición como práctica matemática, supone una oportunidad para identificar aspectos conceptuales y didácticos que requieren atención y, en consecuencia, reorientar los planes de estudio de asignaturas específicas o incluso de la estructura formativa" (p.51). Los estudiantes dejan en claro en la entrevista que están habituados a definir los conceptos geométricos por inclusión jerárquica y a emplear las ventajas que ella otorga en la determinación de propiedades (De Villiers, 1994), en el caso particular del rombo. El hecho de no considerar la definición explícitamente conduce a que si bien las construcciones realizadas son del tipo robusto (Healy, 2000), se presenten dificultades a la hora de identificar propiedades, proceso que resulta valioso para la producción de demostraciones según Arcavi y Hadas (2000).

En la puesta en común y en la entrevista se reflexiona sobre el hecho de considerar un caso particular y sus consecuencias en torno al trabajo solicitado, como identificar propiedades que son exclusivas del cuadrado y no de todos los rombos. El hecho de trabajar sobre la imagen estereotipada de rombo hace que el reconocimiento visual de la imagen devuelta por el software los lleve a considerar las propiedades que pueden determinar a partir de ellas. Esto conduce a reflexionar acerca de la importancia del reconocimiento de propiedades geométricas como objeto de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* (*5*), 25 -45.

Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática, 14*(1), 23-53.

Cohen, L.; Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* Nueva York, EEUU: Routledge

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11-18.

González Fernández, A. (2016) *Implicaciones de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*. Tesis de maestría. Facultad de Formación del Profesorado, Universidad de Extremadura, Cáceres, España.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 1 (pp.103-117). Hiroshima, Japón: PME

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5° edición). Madrid, España: Pearson Addison Wesley

Sánchez, I. y Prieto, J. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática, 14(1)*, 55-83.

Resultados sobre el desarrollo de habilidades matemáticas sobre el concepto de derivada

BETINA WILLINER
bwilliner@unlam.edu.ar
ADRIANA FAVIERI
SCORZO ROXANA
Universidad Nacional de La Matanza

Resumen

En el presente artículo reportamos algunos resultados de una investigación sobre el desarrollo de habilidades matemáticas vinculadas al concepto de derivada a través de un recurso didáctico con la App *GeoGebra* para dispositivos móviles. El objetivo general fue desarrollar un recurso didáctico usando dicha aplicación destinado a mejorar los niveles de desempeño de la habilidad matemática *Aplicar el concepto de derivada.* Consideramos que ésta implica identificar dominio e imagen en funciones y en contexto, identificar y calcular la razón de cambio media e instantánea, relacionar la razón de cambio media con la pendiente de la recta secante y la instantánea con la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto y utilizar el concepto en la resolución de problemas.

El contexto de trabajo fue la cátedra de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). Tomamos un test para conocer los niveles de desempeño de la habilidad estudiada en un grupo de alumnos que transitaron una enseñanza tradicional del concepto de derivada. Luego de diseñar el recurso didáctico, ponerlo a prueba y ajustarlo, lo implementamos en seis cursos de la asignatura. Aplicamos un test idéntico al primero en las comisiones en las que usamos el recurso.

Mostramos el test tomado y los resultados obtenidos en las dos instancias. La evidencia empírica nos permite afirmar que el recurso diseñado es adecuado para mejorar los niveles de desempeño de la habilidad. En particular ayudó a los alumnos a interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y a relacionar la derivada con la razón de cambio instantánea en contextos no geométricos.

Introducción

Los docentes de todos los niveles nos enfrentamos a desafíos cotidianos: ¿cuál es la metodología más adecuada para enseñar determinado tema?, ¿cómo lograr aprendizajes que perduren en el tiempo?, ¿qué tipo de habilidades deben desarrollar los alumnos para enfrentar con éxito el nivel educativo siguiente o para su vida profesional?, ¿qué procedimientos son adecuados para realizar con tecnología en el aula?

Somos docentes de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería y estamos en continua búsqueda de cómo dar respuesta a alguno de los interrogantes planteados desde la experiencia y la investigación.

En esta oportunidad nos dedicamos al estudio de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada a través del desarrollo de habilidades matemáticas. En carreras de ingeniería la comprensión de este concepto se hace indispensable. Es la herramienta matemática que permite estudiar funciones, resolver problemas de optimización, realizar aproximaciones, entre otros. Gran parte de la comunidad de educadores matemáticos pone su atención en la falta de comprensión por parte de los alumnos de dicho concepto, entre ellos elegimos a Cantoral y Mirón (2000) que expresan:

> [...] la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación (p. 269-270).

Por otro lado, nuestros alumnos, futuros ingenieros, deben aplicar el conocimiento a la resolución de problemas, deben saber "hacer". Tienen que adquirir habilidades que los ayuden a no proceder en forma mecánica, que los auxilien a razonar, evaluar, deducir en matemática para, de esta forma, lograr adaptarse a distintas situaciones. Las habilidades matemáticas definidas como las acciones o tareas orientadas al logro de un objetivo donde la matemática está involucrada, permiten desplegar estrategias para resolver en forma autónoma diversos problemas, desde los más simples en la vida como estudiante, hasta los más complejos como profesional.

En estos años de estudio propio y de resultados de otras investigaciones en Educación Matemática (Ariza y Llinares, 2009; Dolores, 1998; Duval, 1998; Engler y Camacho, 2012; García, 2011; Sánchez, García y Llinares, 2008; Vrancken, 2011; Vrancken, Engler, Giampieri y Müller, 2015, entre otras) pudimos realizar algunos avances al respecto. Por ejemplo, logramos elaborar una propuesta de enseñanza basada en las tres nociones fundamentales que brinda Dolores (2000) asociadas al concepto de derivada que son la variación, la rapidez o razón media de variación y la rapidez o razón instantánea de variación. En la secuencia de actividades diseñada al efecto incluimos diversos registros de representación y contextos de variación como el geométrico y el físico.

Si bien obtuvimos algunos resultados alentadores (Williner, Scorzo y Favieri, 2018) los alumnos en general continúan teniendo inconvenientes en aspectos como identificar la recta tangente como posición límite de rectas secantes y relacionar la pendiente de una curva con la razón de cambio instantánea. Ante esta evidencia decidimos profundizar el estudio incorporando el uso de tecnología. El Cálculo gira en torno a conceptos que implican gráficos e imágenes visuales: desde las mismas funciones, la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, la integral definida como límite de suma de áreas de rectángulos de aproximación, entre otros. Por este motivo es necesario contar con herramientas tecnológicas que favorezcan una buena práctica visual en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Es tan fundamental el rol del pensamiento visual en el aprendizaje del Cálculo que es difícil concebir un curso exitoso que no destaque los elementos visuales del tema (Servil, 2005, citado en Rojas y Esteban, 2012). La tecnología utilizada con objetivos pedagógicos definidos facilita los procesos visuales que fomentan otros como observar, analizar, relacionar parte gráfica con parte analítica, relacionar objetos matemáticos entre sí, etc.

En la investigación que reportamos en este artículo trabajamos con la aplicación de *GeoGebra* para dispositivos móviles y nos propusimos como objetivo general desarrollar un recurso didáctico usando la App mencionada destinado a mejorar habilidades matemáticas ligadas al concepto de derivada. Posterior al estudio de las características y funcionalidad de la aplicación y teniendo como base diversas tareas y actividades utilizadas en estudios anteriores, diseñamos el recurso didáctico y lo implementamos. Tomamos un test en cursos de la asignatura para establecer los niveles de desempeño de la habilidad en estudio. Presentamos el test tomado y los resultados obtenidos.

Marco de referencia

Habilidades matemáticas

Respecto a la definición de habilidad, varios autores (Hernández, 1998; Delgado, 1998, Sánchez, 2009 y Zavala, 2007) hablan de procedimientos o habilidades como los modos de actuación, de un saber hacer o de contenidos procedimentales. Nosotros definimos procedimiento a la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación con el logro del objetivo planteado.

En el año de 1956, Benjamín Bloom, desarrolló su taxonomía de Objetivos Educativos, que sostiene que el proceso de aprendizaje está relacionado con tres dominios psicológicos: el cognitivo, el afectivo y el psicomotor. Lorin Anderson revisó dicha taxonomía y publicó, en el año 2001, la Taxonomía Revisada de Bloom, que como novedad incorpora el uso de verbos en lugar de sustantivos para cada categoría. Las categorías incluyen las habilidades recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear (Churches, 2009).

Delgado (1998) realiza una clasificación de las habilidades matemáticas, a saber:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular).
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver, analizar, explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (planificar, predecir, verificar, comprobar, controlar).

Enseñanza de la derivada

Con respecto a investigaciones vinculadas con el concepto de derivada, varios autores sostienen que es necesario incorporar a la enseñanza la noción de variación, razón media e instantánea de variación (Dolores, 2000; García, 2011 y Vrancken, 2011). Este enfoque, que los autores llaman variacional, permite acercarse a los significados de la aproximación, local y global, propios del Cálculo, y trascender los enfoques algebraico y formalista que hacen hincapié en la transformación algebraica de expresiones y fórmulas para salvar indeterminaciones, en la resolución algebraica de desigualdades con módulo y en la definición formal de límite. El enfoque variacional, trata de construir el significado de la derivada incorporando también un abordaje numérico y geométrico al analítico.

Contexto

Nuestro contexto es la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la UNLaM. Es una asignatura de régimen cuatrimestral con carga horaria de 8 horas reloj por semana con un programa tradicional de cálculo diferencial e integral en una variable. Los cursos cuentan con un promedio de 80 alumnos y dos docentes por cada uno de ellos. Dentro de la metodología de trabajo hay un espacio bajo modalidad taller en el cual los alumnos resuelven actividades en equipos de dos personas con orientación de los docentes.

Metodología

Con base en esos estudios y teniendo en cuenta que la derivada se basa en las tres nociones fundamentales que brinda Dolores (2000) en su propuesta de enseñanza:

- variación
- rapidez promedio de variación
- rapidez instantánea de variación,

Definimos para nuestra investigación la habilidad matemática *Aplicar el concepto de derivada* si el alumno es capaz de:

- Identificar dominio e imagen en funciones y en contexto

- Identificar y diferenciar las tres nociones fundamentales definidas anteriormente
- Calcular razones de cambio media e instantáneas por medios numéricos y analíticos
- Relacionar la razón de cambio media con la pendiente de la recta secante
- Relacionar la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente de la recta tangente a una curva en un punto
- Utilizar el concepto en la solución de problemas

Se trató de una investigación exploratoria, con diseño cuasiexperimental, en la cual los grupos de estudiantes que intervinieron cursaron la materia en tiempos distintos. El primer grupo (primer cuatrimestre de 2019) que recibió una enseñanza tradicional fue nuestro grupo contraste. El grupo en el cual utilizamos la enseñanza con applets de *GeoGebra* en el segundo cuatrimestre de 2019 fue el grupo experimental. Comparamos la performance de ambos grupos con posterioridad a la enseñanza y con el mismo test. Entonces las actividades realizadas fueron:

1. Administración del test para establecer los niveles de desempeño de la habilidad matemática *Aplicar el concepto de derivada* en los alumnos que cursaron la asignatura Análisis Matemático I en el primer cuatrimestre de 2019 con una metodología de enseñanza tradicional.
2. Diseño de un primer prototipo del recurso didáctico utilizando la aplicación *GeoGebra* enfocado a incrementar el desarrollo de la habilidad matemática mencionada.
3. Testeo y ajuste del primer prototipo del recurso didáctico usando la aplicación *GeoGebra*.
4. Elaboración del recurso didáctico definitivo.
5. Experiencia con el recurso didáctico en seis comisiones de Análisis Matemático I para la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, durante el segundo cuatrimestre de 2019.
6. Administración del mismo test aplicado al grupo de estudiantes que recibieron una enseñanza tradicional para establecer los niveles de desempeño de la habilidad matemática.
7. Comparación de los resultados obtenidos en los tests.

En el presente artículo mostramos el test y los resultados obtenidos.

Test sobre el concepto de derivada

El test tomado en las dos oportunidades se basó en las nociones fundamentales de razón de cambio media e instantánea y en tres contextos concretos:

1. *El contexto geométrico*
2. *El contexto físico, velocidad de un móvil*
3. *El contexto físico, volumen de un gas*

Planteamos tres tareas (una por contexto), con dos preguntas cada una. Todas están presentadas en formato de respuesta de selección múltiple, siendo una sola de ellas la correcta.

Tarea 1. Contexto geométrico

Esta tarea está relacionada con los conceptos de recta secante y de recta tangente; es decir, la interpretación geométrica de la derivada. Pretendemos evaluar si el alumno distingue la razón de cambio media usando la pendiente de la recta secante y la razón de cambio instantánea a través de la pendiente de la recta tangente. La consigna fue la siguiente:

Sea la función: $f: R \to R \,/\, f(x) = (x-1)^2$

Pregunta A: Sean los puntos P (2,1) y Q (3,4) de la función f. Siendo "ms" el valor de la pendiente de la recta secante que une P con Q, el mismo representa:

a) La razón de cambio instantánea en el intervalo [2,3]

b) La razón de cambio instantánea en el intervalo [1,4]

c) La razón de cambio media en el intervalo [2,3] (respuesta correcta)

d) La razón de cambio media en el intervalo [1,4]

Pregunta B: ¿En qué punto la función f tiene como tangente a la recta y = -6x+6?

a) En P (-2,9)	b) En P (-2, 18)
c) En P (1,0) y Q (-5,36)	d) En ningún punto *(respuesta correcta)*

Tarea 2. Contexto físico, velocidad de un móvil

La tarea de este contexto es un problema de caída libre de una piedra con velocidad inicial distinta de cero. Esta selección se debe a que cuestiones sobre velocidad de objetos o móviles están presentes en varios libros de texto y tienen vinculación con la asignatura Física. Aquí es preciso ser riguroso con las unidades de las variables independiente y dependiente. Evaluamos la obtención de la ecuación de la velocidad a través de la derivación de la ecuación de la posición de acuerdo con el sistema de referencia presentado. También el cálculo de la velocidad con la cual la piedra llega al piso y el tiempo empleado para hacerlo. La consigna fue:

Se arroja hacia abajo una piedra desde 1600 metros de altura con una velocidad inicial de $20m/s$ Considerando $g=10m/s^2$ y un sistema de referencia con origen a los 1600 metros y con sentido positivo hacia abajo, la ecuación de la posición es $s(t)=5t^2+20t$.

Pregunta A: La ecuación de la velocidad de acuerdo con el sistema de referencia es:

a) v(t) = 10 t + 20 (*respuesta correcta)* b) v(t) = 10 t – 20

c) v(t) = -10 t + 20 d) v(t) = -10 t – 20

Pregunta B: La piedra llega al piso aproximadamente:

a. A los 16 segundos y con una velocidad de 180 m/s
b. A los 16 segundos y con una velocidad de -180 m/s
c. A los 17 segundos y con una velocidad de 180 m/s
d. A los 17 segundos y con una velocidad de -180 m/s

Tarea 3. Contexto físico, volumen de un gas

Esta tarea se refiere a la relación entre el volumen de un gas con respecto a la presión bajo temperatura constante. La razón de su inclusión es que la relación entre las variables es inversamente proporcional. Aquí también es preciso ser riguroso con las unidades de las variables independiente y dependiente. Evaluamos si el alumno distingue y calcula las razones de cambio media e instantánea a partir de ciertos datos numéricos. Presentamos la consigna:

La siguiente tabla corresponde a los valores de la variación del volumen de un gas (medido en litros) respecto a la presión (medida en Pascales) en el intervalo [1,10]:

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	10	5	10/3	5/2	2	5/3	10/7	5/4	10/9	1

Pregunta A: ¿Cuál de las siguientes fórmulas representa la tasa de variación instantánea en un punto?

a) $V'(P)=\frac{10}{P^2}$ b) $V'(P)=-\frac{10}{P^2}$ (respuesta correcta)

c) $V'(P)=-\frac{1}{P^2}$ d) $V'(P)=\frac{1}{P^2}$

Pregunta B: ¿Cuál es la variación media del gas si la presión aumenta de 2 a 6 Pascales?

a) $\dfrac{\Delta V}{\Delta P}=\dfrac{10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{4}\dfrac{l}{P}$	b) $\dfrac{\Delta V}{\Delta P}=\dfrac{10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}{4}\dfrac{P}{l}$
c) $\dfrac{\Delta V}{\Delta P}=\dfrac{10\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{4}\dfrac{l}{P}$ (respuesta correcta)	d) $\dfrac{\Delta V}{\Delta P}=\dfrac{10\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}{4}\dfrac{P}{l}$

Breve descripción del recurso didáctico en términos del uso de la App

El recurso didáctico con la App *GeoGebra* consistió en un conjunto de tres tareas cada una en los mismos contextos planteados anteriormente.

En el contexto de interpretación geométrica el uso de tecnología facilitó la gráfica de varias rectas secantes y la definición de un deslizador propició la visualización de la posición límite de dichas rectas.

En el contexto de velocidad de un móvil el uso de la App permitió el cálculo de varias velocidades medias y la definición de un deslizador posibilitó observar la tendencia de estas velocidades a un valor límite.

Por último, en el contexto del volumen de un gas conociendo la presión de éste a temperatura constante, trabajamos con la obtención gráfica de una recta tangente a la función en un punto que tenía que ser paralela a una recta secante dada, anticipando el teorema del valor medio. La App brindó la posibilidad de ir moviendo la recta tangente hasta “llegar a ser” paralela a la recta secante dada, favoreciendo la visualización de la situación planteada.

Administración de los tests

Aplicamos el test a los cuatro cursos de Análisis Matemático I que las integrantes del equipo de investigación teníamos a cargo en el primer cuatrimestre de 2019. Se realizó a través de los servicios en la nube de Google Drive. Los alumnos trabajaron en grupos de dos estudiantes y obtuvimos 128 respuestas. Estos alumnos recibieron una enseñanza tradicional del concepto de derivada.

En el segundo cuatrimestre de 2019, luego de finalizar la experiencia con el recurso diseñado, aplicamos el mismo test a otro grupo de alumnos de Análisis Matemático I. En esta oportunidad contestaron 244 equipos (formados por dos alumnos) pertenecientes a seis comisiones de la materia mencionada. También se realizó a través de *Google Drive*.

Resultados obtenidos

Damos los resultados por tarea. La columna izquierda corresponde a los resultados del test tomado a los alumnos del grupo que recibieron enseñanza tradicional sobre el concepto de derivada. A este test lo llamamos Test 1 para poder explicar los gráficos. Los de la columna derecha son los resultados del test administrado a los alumnos que utilizaron el recurso didáctico. A este test lo llamamos Test 2. Indicamos con azul las respuestas correctas que muestran un buen desempeño de la habilidad estudiada y con verde las respuestas incorrectas que evidencian que la habilidad todavía no está desarrollada en los estudiantes.

Tarea 1

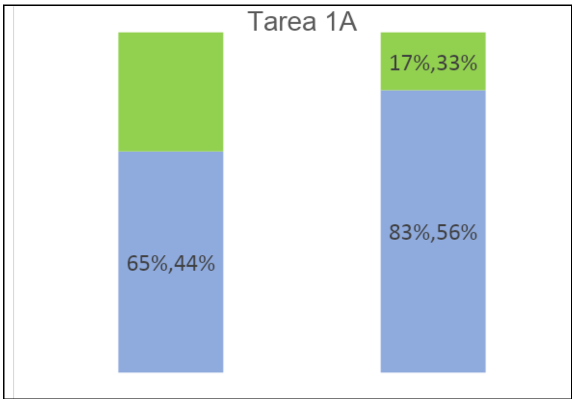
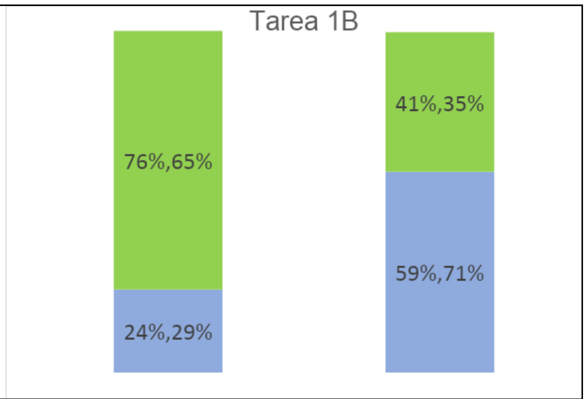
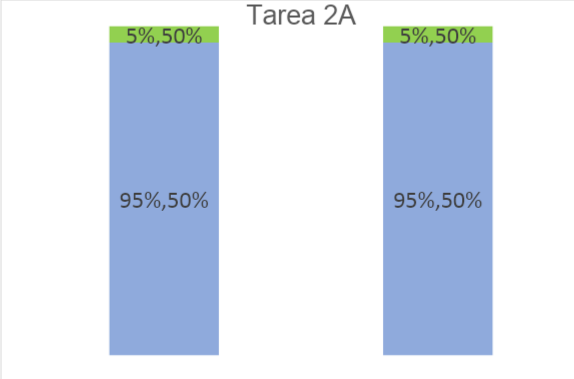
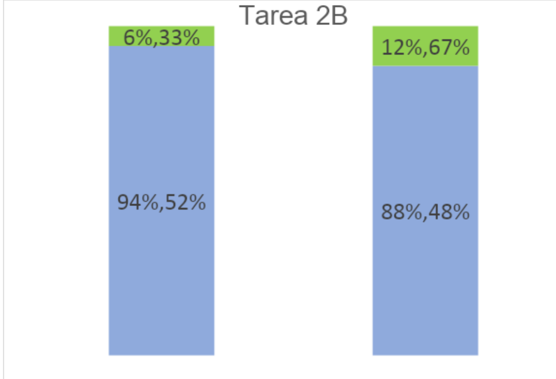
	
Valoramos la habilidad a través de la relación entre la pendiente de la recta secante y la razón de cambio media en el intervalo correspondiente. En el Test 1 el 65% de los equipos reconoció la pendiente de la recta secante como la razón de cambio media. Ese porcentaje fue del 83% en el Test 2.	Valoramos la habilidad a través de la relación entre la pendiente de la recta tangente y la derivada de la función en el punto y la pertenencia del punto a la curva y a la recta. En el Test 1 el 24% de los equipos pudo identificar que la recta dada no es tangente a la curva en ninguno de sus puntos. Este porcentaje ascendió a 59% en el Test 2.

Figura 1. Resultados de los dos tests en la tarea 1. Fuente propia

Tarea 2

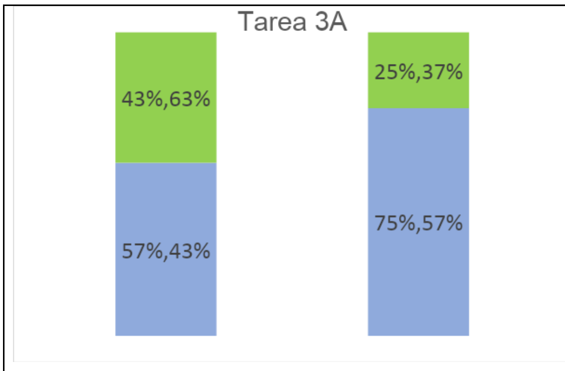


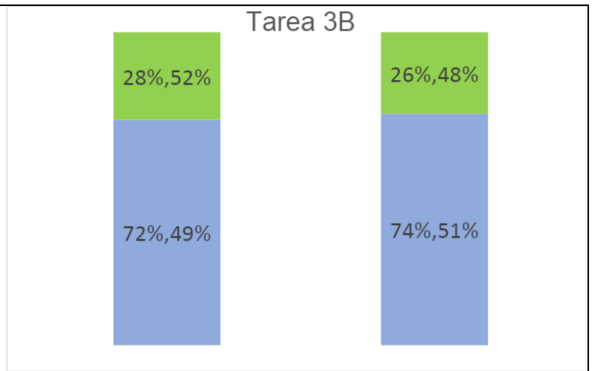


Valoramos la habilidad mediante la relación entre la velocidad y la derivada de la función posición. Tanto en el Test 1 como en el Test 2 el 95% de los equipos identificaron la función derivada como la velocidad de la piedra que cae.	Valoramos la habilidad mediante la identificación del dominio de la función en contexto. En el Test 1 el 94% de los equipos determinó correctamente en qué tiempo la piedra choca con el piso. Este porcentaje fue del 88% en el Test 2.

Figura 2. Resultados de los dos tests en la tarea 2. Fuente propia

Tarea 3





Valoramos la habilidad mediante la relación entre la derivada y la razón de cambio instantánea. En el Test 1 el 57% de los equipos reconoció a la derivada como la razón de cambio instantánea de una función en un punto. Ese porcentaje ascendió a 75% en el Test 2.	Valoramos la habilidad con la identificación de la razón de cambio media en un intervalo, en contexto. En el Test 1 el 72% de los equipos identificó la razón de cambio media en un intervalo dado. El 74% de los equipos lo logró en el Test 2.

Figura 3. Resultados de los dos tests en la tarea 3. Fuente propia

Conclusiones

Al comparar los resultados de los dos tests podemos decir que:

- En el *contexto geométrico* hubo un aumento de nivel de buen desempeño de la habilidad estudiada en las dos preguntas. En la primera, en la que los alumnos tenían que relacionar la pendiente de la recta secante con la razón de cambio media en el intervalo dado, el aumento de respuestas correctas fue de un 18%. El aumento más considerable se dio en la segunda pregunta (un 35% de diferencia) en la que los alumnos debían extraer como datos la pendiente de la recta tangente y la imagen del punto. Esto nos alienta a pensar que el recurso didáctico diseñado dio sus frutos. Pensamos que al trabajar con el concepto de recta secante y pendiente y luego pasar a la recta tangente usando un deslizador produjo una visualización (entiendo ésta como la comprensión a través de imágenes) de la interpretación geométrica de la derivada.

- En el *contexto físico de movimiento*, interpretando la velocidad como la derivada de la función en un punto, el nivel de buen desempeño en las dos pruebas fue similar y muy alto en las dos preguntas. Podemos entonces sugerir que éste es un contexto adecuado como para introducir el concepto, tal como lo establece Dolores (2000) en su secuencia didáctica.
- En el *contexto físico del volumen de un gas* conociendo su presión el buen desempeño de la habilidad cuando preguntamos sobre la razón de cambio instantánea en cualquier punto tuvo un aumento de aproximadamente 20%. En la segunda pregunta se mantienen similares los niveles de desempeño en los dos tests. En el recurso didáctico hacemos hincapié en los cocientes de incrementos, las razones de cambio media e instantánea con sus unidades, razón por la que pensamos que influyó positivamente en la mejora del desempeño de la habilidad.

Los resultados obtenidos nos permiten decir que el recurso didáctico diseñado resultó efectivo ya que mejoraron ostensiblemente los niveles de desempeño de la habilidad *Aplicar el concepto de derivada*. Esto nos impulsa a seguir indagando sobre el diseño de actividades y/o recursos didácticos con uso de la App *GeoGebra* que favorezcan la participación del alumno y la comprensión de conceptos principales del Cálculo.

Referencias bibliográficas

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *27* (1), 121-136.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265-292.

Churches, A. (2009). *Taxonomía de Bloom para la era digital*. Recuperado de: http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomDigital.php

Delgado, J.R. (1998). Los procedimientos generales matemáticos. En H. Hernández Fernández, J. R. Delgado Rubí, B. Fernández de Alaíza, L. Valverde Ramírez, y T. Rodríguez Hung (Eds). *Cuestiones de didáctica de la Matemática* (pp. 69-87). Rosario, Argentina: Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones.

Dolores, C. (1998). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 11,* (pp.6-10). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8* (pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Engler, A. y Camacho, A. (2012). Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. *Premisa, 14*(54), 18-36.

García, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Hernández, H. (1998). Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. En H. Hernández Fernández, J. R. Delgado Rubí, B. Fernández de Alaíza, L. Valverde Ramírez, y T. Rodríguez Hung (Eds.), *Cuestiones de didáctica de la Matemática* (pp. 35-53). Rosario, Argentina: Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones.

Rojas, L. y Esteban, V. (2012). Geogebra y Applets Aplicados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. *Simposio Ibero americano de aplicaciones y tecnologías de la información y comunicación*. Recuperado de: https://www.iiis.org/CDs2012/CD2012ADII/ATIC_2012/PapersPdf/AT095NK.pdf

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez, M. (2009). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *4*(1).

Vrancken, S. (2011). *La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Vrancken, S., Engler, A., Giampieri, M. y Müller, D. (2015). Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de implementación de una secuencia de actividades. *Matemática, Educación e Internet, 1* (1).

Williner, Scorzo, R y Favieri, A. (2018). Habilidades Matemáticas en Torno al Concepto de Derivada: Resultados de una Investigación. *XXI Encuentro Nacional y XIII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/338234103_Habilidades_matematicas_en_torno_al_concepto_de_derivada_resultados_de_una_investigacion

Zabala, A. (2007). Los enfoques didácticos. En C, Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé, I. y A. Zabala (Eds.), *El constructivismo en el aula* (pp.125-161). Barcelona, España: GRAÓ.

Algunas experiencias de inclusión de tecnologías digitales para la enseñanza de la matemática en la formación de docentes de primaria

VALERIA LOURDES GARCÍA

valerialourdesgarcia@gmail.com

CLAUDIA MALIK DE TCHARA

NATACHA GLADYS MARTÍNEZ

Unidad Académica San Julián. Universidad Nacional de la Patagonia Austral

Resumen

En este trabajo se comparten algunas experiencias de inclusión de tecnologías digitales que se viene desarrollando en el interior del cursado de Didáctica de la Matemática, espacio curricular correspondiente al tercer año del plan de estudios del Profesorado para la Educación Primaria, de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral, en particular la Unidad Académica San Julián, que se encuentra en la zona centro de la Provincia de Santa Cruz de la República Argentina. Estas experiencias buscan crear y analizar secuencias didácticas que posibiliten el abordaje de diversos contenidos escolares matemáticos con inclusión genuina de las Tecnologías de la Información y Comunicación[1]. El cursado de Didáctica de la Matemática tiene por finalidad aportar herramientas para que los futuros docentes de primaria tengan la oportunidad de analizar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con inclusión de tecnologías digitales desde la formación inicial, guiar la mejora de estos procesos e iniciar un trabajo reflexivo acerca de las prácticas matemáticas que desarrollan, propiciar un posicionamiento ante los saberes a enseñar, para resignificar la mirada actual sobre la matemática escolar con la inclusión genuina de las tecnologías.

1 Maggio (2012)

Introducción

Los recursos didácticos son herramientas fundamentales para desarrollar y enriquecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En ese sentido, se desarrolla durante el cursado de Didáctica de la Matemática (espacio curricular correspondiente al tercer año del plan de estudios del Profesorado para la Educación Primaria, en la Unidad Académica San Julián) una propuesta a los estudiantes que requiere diseñar, implementar en un contexto no formal y analizar didácticamente una actividad, tendiente a propiciar una inclusión genuina de las Tecnologías de la información y Comunicación (TIC) para el abordaje de un contenido escolar matemático.

Los recursos no pretenden sustituir la conceptualización ni los procesos que conllevan la enseñanza de la matemática, sino más bien sirven de soporte para un mejor entendimiento de éstos, favoreciendo la construcción de propuestas didácticas enriquecidas que nos acerquen significativamente a las intencionalidades didácticas. Con el fin de avanzar hacia la conceptualización del contenido matemático escolar resulta necesario, en el trabajo con recursos, el pasaje gradual por tres fases: manipulativa, representativa y abstracta.

A continuación, se detallan algunos recursos digitales escogidos por los estudiantes y el contenido escolar matemático seleccionado por ellos del Diseño Curricular de Primaria para el área Matemática de la Provincia de Santa Cruz.

En la primera experiencia se seleccionó la aplicación "Ábaco Vertical" para trabajar el contenido: *Resolución de problemas que involucran el análisis del valor de la cifra según la posición que ocupa*.

La segunda experiencia recupera la aplicación "Tablas de multiplicar" con la finalidad de abordar el contenido: *Resolución de cálculos mentales de multiplicaciones que implican poner en juego propiedades de las operaciones*.

En la tercera experiencia se seleccionó el recurso "La Longitud" para el contenido: *Resolución de problemas que implican medir y comparar la relación entre magnitudes con el uso de unidades convencionales y no convencionales*.

La cuarta experiencia recupera la plataforma "Matematicón" con el fin de abordar el contenido: *Exploración, reconocimiento y uso de las características de figuras geométricas para distinguir unas de otra*.

Una vez implementadas y analizadas las actividades los estudiantes comparten su experiencia, en relación a la enseñanza del contenido seleccionado, a partir de la escritura de un artículo con formato póster o comunicación breve, que se presenta en el Congreso Interno de Didáctica de la Matemática (CIDiMat), organizado y desarrollado bajo la modalidad virtual, mediante una página de Facebook denominada "Congreso Interno de Didáctica de la Matemática (@CIDIMATUNPA)", siendo cada estudiante responsable de moderar el intercambio que se procura realizar a partir de la difusión de la experiencia. Además de presentar su trabajo y moderar las intervenciones del mismo, cada estudiante debe realizar por lo menos tres comentarios, donde se plasmen inquietudes y/o consultas, en las producciones de sus compañeros, con el objetivo de garantizar los intercambios necesarios para compartir opiniones con sus docentes y compañeros, siempre sustentadas desde el marco teórico de referencia de la cátedra.

Desarrollo

En la actualidad las tecnologías de la información y la comunicación entramadas con la cultura y el conocimiento, generan ricas y diversas posibilidades para favorecer una "Enseñanza Poderosa" que garantice comprensiones profundas y perdurables. Reconocer a los estudiantes como sujetos culturales nos permite diseñar e implementar de un modo más consistente las propuestas pedagógicas. En palabras de Maggio (2012) la enseñanza poderosa crea una propuesta original que nos transforma como sujetos y cuyas huellas permanecen.

Desde esta concepción presentamos una propuesta de formación innovadora, que consiste en que los estudiantes avanzados del Profesorado para la Educación Primaria, diseñen, implementen y analicen didácticamente una actividad que involucre, por lo menos, un contenido matemático, con inclusión genuina de las TIC, contando para ello con la guía y acompañamiento /orientación de los docentes involucrados en la propuesta.

Por otra parte, la formación de futuros docentes de Educación Primaria debería tener presente el aporte de Carrillo Yánez, Contreras González, Climent Rodríguez, Montes Navarro, Escudero Ávila y Flores Medrano (2016), quienes sostienen que:

> el conocimiento matemático está integrado por una red de entes u objetos matemáticos donde las relaciones entre ellos son especialmente relevantes. Conocer matemática es conocer esos objetos, las relaciones entre ellos y los procedimientos de trabajo en matemática, es decir las reglas del juego matemático. Sin embargo, el futuro docente no debe únicamente adquirir conocimiento matemático sino diseñar actividades y tareas que supongan buenas oportunidades de aprendizaje para sus alumnos. Para ello el futuro docente debe conocer las teorías de aprendizaje y de enseñanza de la matemática,

> sus fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de cada contenido matemático, los intereses y expectativas de los alumnos, las formas de interacción de los alumnos con ese contenido, las características matemáticas de los recursos didácticos, las estrategias didácticas, secuenciación de los temas, entre otros. (p.1)

En este marco se propone a los futuros docentes de Primaria, durante el cursado de Didáctica de la Matemática, desarrollar una actividad que garantice una inclusión genuina de las TIC para el abordaje de un contenido matemático, donde la participación está pensada para desarrollarse en pequeños grupos de dos o tres integrantes. La actividad se implementa en contextos no formales, de acuerdo a los intereses y posibilidades de los involucrados. Las experiencias que se detallan se implementaron en diversas localidades de la Provincia de Santa Cruz, en dependencias de Centros Integradores Comunitarios, Instituciones Religiosas, Centros Educativos donde se desarrollan actividades de apoyo escolar y en el ámbito Laboratorio de Informática de la Unidad Académica San Julián.

La actividad propuesta toma como base la construcción colaborativa de un Glosario de Recursos Didácticos iniciado en la cursada 2018, complementado y ampliado por los estudiantes 2019, donde se comentan algunas características básicas de cada recurso didáctico digital y enuncian posibles contenidos matemáticos factibles de trabajar con el mismo, delimitando posibles variables didácticas.

De acuerdo con Borba y Penteado (2001) reconocer la condición mediadora de las tecnologías plantea el desafío de diseñar propuestas educativas que promuevan pensar y aprender con las TIC, creando ambientes de aprendizaje que constituyan un escenario de investigación y exploración y evitando caer en una domesticación de la tecnología; en ese sentido se proponen las experiencias que se comparten a continuación, basando su fundamentación desde el uso de recursos didácticos digitales para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

La primera experiencia se denominó “Jugamos a representar”, fue llevada a cabo por un grupo de tres estudiantes y se desarrolló en el Centro Integrador Comunitario de la localidad de Puerto Deseado, participaron 13 niños de entre 5 y 12 años, organizados en tres grupos, un grupo con niños de 5 y 6 años, otro de 7 a 9 y otro de 10 a 12 años de edad. Se seleccionó el recurso didáctico digital “Ábaco Vertical” (Figura 1) para el abordaje del contenido: *Resolución de problemas que involucran el análisis del valor de la cifra según la posición que ocupa.*

Figura 1. Aplicación Ábaco Vertical

El recurso es una aplicación que se encuentra disponible en Android, gratuito, se puede descargar y no requiere necesariamente de conexión a Internet, su idioma es español, posee sonido y guía de uso. Es una aplicación dinámica, permite trabajar nociones de Sistema de numeración decimal; tipos de agrupamiento, unidades, decenas, centenas, unidades de mil, decenas de mil; operaciones: adición y sustracción con y sin dificultad. Con la limitación de sustracciones cuyos resultados no pertenecen al conjunto de los números naturales. Didácticamente posibilita desarrollar contenidos relacionados con tipos de agrupamiento.

El objetivo de la actividad fue “lograr que los alumnos comprendan cómo se forman las unidades de orden superior en los sistemas de numeración, los procedimientos para representar números naturales, el valor relativo de las cifras en función de las posiciones que ocupan y el razonamiento para la aplicación de los procedimientos de cálculo”. La aplicación permite validar el resultado, mediante la opción “comprobar” el resultado.

Algunas conclusiones a las que se arribaron a partir de la realización de la actividad en función del uso de la aplicación fueron las siguientes:

Las varillas: En cada varilla se aceptan como máximo 9 anillos. Los anillos en la varilla de color azul valen 1. Los anillos de la varilla de color rojo valen 10. Los anillos de la varilla de color verde valen 100. Los anillos de la varilla de color amarillo valen 1.000. Los anillos de la varilla de color blanco valen 10.000. Cuando llegas a 10 anillos tienes que quitar todos de la columna y añadir uno a la siguiente a la izquierda. Los anillos se mueven para avisarte de que tienes 10. Entonces cuando se colocan más de nueve anillos en alguna varilla, se deben sacar los anillos y se reemplazan por un anillo en la varilla siguiente a la izquierda. Lo que equivale a que cada vez que se tiene 10 elementos de una posición se debe cambiar inmediatamente a un orden superior. Es así que pueden llegar a la conclusión de que los chicos reconozcan el principio de agrupamiento de nuestro sistema, donde cada 10 unidades se forma otra de carácter superior, la cual se escribe a la izquierda de la primera de las unidades. Esto es ilustrado en el ábaco, en donde cada vez que tenemos 10 pelotitas en una varilla, las transformamos en una de la varilla inmediatamente izquierda y la ubicamos en ésta, con lo cual obtenemos que 10 unidades equivalen a una decena, que 10 decenas equivalen a 1 centena y así sucesivamente.

Al momento de compartir esta experiencia en el CIDiMat, se destaca la siguiente conclusión "El trabajo nos permitió profundizar en el conocimiento sobre el Sistema de Numeración Decimal, las dificultades que pueden suscitarse en el aula y las estrategias didácticas que pueden ayudar a resolverlas. Durante el proceso de investigación se pudo dar cuenta de estos aspectos y construir nuevas herramientas conceptuales que nos permitirán en el futuro abordar el contenido desde otro lugar, de forma más positiva". En relación con el aporte de Gálvez, Navarro, Riveros y Zanocco (1998):

> Los niños usan y comprenden el sistema de numeración decimal cuando son capaces de leer y escribir numerales, manejar las reglas de canje en sentido directo e inverso, reconocer expresiones equivalentes para una misma cantidad y aplicar estos conocimientos en situaciones diversas. La consecución de estos logros, por parte de los alumnos, demanda del docente una cuidadosa selección de las actividades y de los materiales que les proporcionará. (pp.101-102)

La segunda experiencia se denominó "Duelo Matemático" fue desarrollada por un grupo de dos estudiantes y se implementó en un Centro Recreativo Infantil Municipal de la localidad de Puerto Santa Cruz, donde participaron cinco niños de 9 y 10 años. El recurso didáctico seleccionado fue la aplicación "Tablas de multiplicar" (Figura 2) con el fin de abordar la *Resolución de cálculos mentales de multiplicaciones que implican poner en juego propiedades de las operaciones*.

Figura 2. Aplicación Tablas de Multiplicar

Como su nombre lo indica, la aplicación permite trabajar con las tablas de multiplicar, está disponible para Android y se puede emplear de forma individual o grupal. Tiene diferentes posibilidades para seleccionar como *contrarreloj*, que consiste en la determinación del producto, a partir de opciones, establece un tiempo para responder, en tres niveles (fácil - intermedio - difícil), que se habilitan a medida que se avanza en la resolución; *tiempo infinito,* consiste en la determinación del producto, a partir de opciones, sin establecer un tiempo para responder, también posee tres niveles (fácil - intermedio - difícil), que se habilitan a medida que se avanza en la resolución; *aprendizaje,* Igual que la opción tiempo infinito (en principio) consiste en la determinación del producto, a partir de opciones, sin establecer un tiempo para responder, posee tres niveles (fácil - intermedio - difícil), que se habilitan a medida que se avanza en la resolución; *duelo,* dos jugadores compiten, aparecen diversos tipos de problemas, algunos solicitan el producto, otros alguno de los factores o bien la operación de multiplicación que permite obtener un resultado en particular, las respuestas se establecen a partir de distintas opciones; *tablas,* consiste en un listado donde se presentan las tablas de multiplicar, del 2 al 12; *examen, p*ermite ir avanzando de ejercicio en ejercicio, este modo está compuesto por 10 ejercicios de multiplicación, donde el usuario debe determinar el producto, sin opciones; *verdadero o falso,* solicita establecer la verdad o falsedad de una afirmación relacionada con operaciones de multiplicación, al final muestra los resultados incorrectos y correctos. Los estudiantes plantean como objetivo que los niños apliquen sus conocimientos previos sobre el algoritmo de multiplicación. Una conclusión a la que se arribó fue la vinculada a saber el resultado de *9* por *5*: le restamos *5* a *50*, esta estrategia de cálculo mental se valida a partir de las propiedades de la multiplicación de la siguiente manera: $9 \times 5 = (10 - 1) \times 5 = (10 \times 5) - (1 \times 5) = 50 - 5 = 45$, entonces $9 \times 5 = 45$.

En el trabajo que presentaron para el CIDiMat se destacó como conclusión: "Para que el proceso de construcción del saber sea eficaz, es necesario que el/la niño/a genere un puente de conexión entre los números de la tabla de multiplicación y las propiedades de las operaciones, de modo que les permitan ejercitar el cálculo mental. Teniendo en cuenta que los/las estudiantes pueden dar una solución a un problema sin identificar qué conocimiento matemático se ha puesto en práctica, se recomienda poner a la luz las nociones de estrategia de cálculo mental oral y las propiedades de las operaciones para que los mismos puedan interiorizar los conceptos mediante la práctica en las actividades que se proponen, de esta manera el conocimiento ya no permanecerá oculto sino empezará a ser indagado y cuestionado por los/las estudiantes". Se puede realizar un paralelo entre el uso de la app "Tablas de multiplicar" y el uso de la calculadora, en palabras de Itzcovich (2008): "se trata de que los alumnos puedan apoyarse en esta herramienta para avanzar en la identificación de nuevas propiedades, nuevas relaciones, nuevas estrategias de cálculo [...] sin perder el control de los resultados que van obteniendo" (p.130).

Una tercera experiencia denominada "Medimos en" fue desarrollada por un grupo de dos estudiantes en la localidad de Puerto San Julián, donde participaron como destinatarios seis estudiantes del Profesorado para la Educación Primaria. Se seleccionó el recurso didáctico digital "La Longitud" (Figura 3) para trabajar el contenido: *Resolución de problemas que implican medir y comparar la relación entre magnitudes con el uso de unidades convencionales y no convencionales y juegos para la enseñanza de la medida* (adaptado a los destinatarios).

Figura 3. La Longitud

El Recurso Longitud es un software propietario que puede utilizarse online y off line. Los objetivos principales del recurso son: reconocer la medida de objetos, medir en diferentes unidades y comparar distancias. La actividad 1 consiste en realizar mediciones no convencionales (palmos) y convencionales (metro), podría llegar a resultar más complejo medir de manera virtual que de forma analógica, resulta entonces necesario analizar la conveniencia o no de este tipo de actividad. La actividad 2 brinda la oportunidad de trabajar con las nociones de longitud, en particular con perímetro, como así también la relación entre área y perímetro. La actividad 3 propone la realización de medidas a escala y construcción de circuitos a partir de piezas predefinidas con medidas previamente determinadas. La actividad 4 trabaja con medida como distancia recorrida en kilómetros o millas. Luego presenta dos juegos, uno se centra en la estimación de medidas, a partir de una unidad no convencional y el otro en la estimación de medidas convencionales, con distintas escalas variantes.

Los estudiantes plantearon como objetivo de la actividad trabajar contenidos referidos a medida, a partir de la recuperación de los conocimientos previos, con la utilización del recurso digital. El objetivo principal del trabajo en cuanto al contenido de "error y aproximación de medidas" tuvo como finalidad que los estudiantes capten la esencia del proceso de medición mediante diferentes prácticas con su posterior comparación y/o debate de los resultados obtenidos.

La actividad implementada posibilitó desarrollar ejercicios de medida directa; estimación; identificación y conversión de unidades de medida; se empleó una regla, incluida como herramienta del recurso para llevar a cabo la tarea solicitada; recolección de datos y comparación de los resultados obtenidos por los pares. El recurso les posibilitó la realización de diversas actividades mediante calculadoras, aparatos de medida, tramas que permiten medir, contadores, lupa, entre otros.

Los estudiantes destacan que el recurso explicita el valor exacto, lo que permite poner en evidencia la validación del resultado, posibilitando establecer la relación entre la medida y las diferentes magnitudes que la engloban, manipular variados instrumentos y recursos para llevar a cabo el proceso de medición y reconocer que en la actualidad no solo se realiza con instrumentos tangibles. Recuperaron el valor de los conocimientos previos que poseen como participantes, en relación a las unidades de medida de longitud, la medición, y los atributos medibles abordando la inexactitud de los resultados obtenidos (atribuida al instrumento de medición o al error humano) y comparando unidades tanto arbitrarias como convencionales para comprender las regularidades del sistema de medición, las comparaciones y estimaciones. Realizan la confrontación a partir de la estimación y la medición con regla milimetrada que brinda el Recurso, distinguiendo la magnitud física vinculada al espacio trabajado (longitud) y el objeto a medir; teniendo presente que toda medición tiene un margen de error donde al medir se pueden presentar errores provocados por los defectos de la escala del instrumento (errores sistemáticos), errores que se originan en las lecturas del participante que está midiendo (errores de apreciación) o errores que no son previsibles (errores casuales).

La participación en el CIDiMat posibilitó que los estudiantes pudieran, en relación al desarrollo de la experiencia, concluir: "El trabajo propuesto brindó la oportunidad de analizar que no solo se puede trabajar el contenido resolviendo ejercicios sino que hay que darle un verdadero significado, teniendo como referencia el sentido de la medición". Esta conclusión refuerza el análisis respecto a que *dar problemas en que aparezcan solamente operaciones con cantidades y reemplazo de valores en fórmulas no implica que se esté trabajando la medida. En palabras* *de Chamorro:* "Con la aritmetización de la medida se van a reemplazar las magnitudes por los números" (Chamorro, 2003, p.232).

La cuarta y última experiencia se denominó "Juguemos con las propiedades de las figuras" estuvo a cargo de un grupo de tres estudiantes y se implementó en la localidad de El Calafate, donde participaron siete niños de entre 6 y 10 años. Recupera la plataforma "Matematicón" (Figura 4) para abordar el contenido: *Exploración, reconocimiento y uso de las características de figuras geométricas para distinguir unas de otra*.

Figura 4. Plataforma Matematicón

El recurso Matematicón es un software gratuito, disponible en la página de Educ.ar del Ministerio de Educación, puede ser utilizado tanto de manera online como offline y permite trabajar la geometría desde un espacio lúdico, que apunta a la creatividad e iniciativa de cada alumno.

En esta plataforma es posible crear figuras geométricas, elegir y poblar con formas y texturas diferentes escenarios virtuales posibles. Posibilitando la creación de pequeñas figuras u objetos que den vida a una historia, imaginada por cada estudiante y a partir de las producciones solicitar que expliquen qué figuras utilizaron para cada objeto, por qué las eligieron y en la instancia de institucionalización, solicitarles que expliciten sus características y propiedades.

Entre los objetivos propuestos por los estudiantes se destacan: reconocer las propiedades de las figuras geométricas, elaborar construcciones que contengan figuras geométricas, considerando y aplicando sus propiedades, participar activamente aportando ideas y puntos de vistas propios, respetando las opiniones de los demás, aceptando que los errores son parte de todo proceso de aprendizaje, conocer nuevos recursos para el aprendizaje de las matemáticas, ampliando las experiencias didácticas.

La propuesta implementada consistió en la exploración de la aplicación, la descripción de qué observaban, la identificación y escritura de los resultados obtenidos aplicando el recurso digital Matematicón; la selección de un escenario y descifrar unas adivinanzas que hacían mención al contenido. En el cierre, se propuso un espacio de intercambio donde los estudiantes aportaron su opinión sobre las características de las diferentes formas geométricas planas que surgieron y las dificultades que se presentaron en la construcción de las figuras propuestas.

En la experiencia detallada los destinatarios de la actividad utilizan la tecnología para hacer dibujos en la pantalla, considerando que Matematicón, aun cuando propicia un momento de exploración e inventiva personal por parte de cada estudiante, a su vez presenta cierta rigidez en cuanto a la construcción de los objetos en los diversos escenarios. No pudiendo elegir el sitio que el niño desee, sino más bien estar limitado en ciertos escenarios. Cuando el niño se encuentra en plena construcción de las diferentes figuras es posible que surjan algunos inconvenientes con la asignación de los valores para la medida de un lado y/o un ángulo determinado. Esto se debe a que existen valores que están fuera de rango según las propiedades de cada figura por ello la importancia de construir las figuras geométricas partiendo de sus propiedades y no utilizarlo simplemente como una herramienta de dibujo.

Como aspecto a destacar de este recurso digital es la utilización del juego como estrategia de enseñanza, en donde cada niño vivencia un contenido matemático teniendo la libertad de explorar, recurriendo a sus conocimientos previos y luego a los conocimientos adquiridos.

Para finalizar se comparte la conclusión de una estudiante presentada en el marco del CIDiMat: "Considero que como futuras docentes es fundamental que los niños adquieran este tipo de conocimientos en la Geometría, porque pueden relacionar, a simple vista, con diversos objetos que tienen a su alrededor. Por otro lado, pienso que será de gran utilidad la iniciación del aprendizaje de los conceptos fundamentales, previo a recordar las diferentes figuras geométricas ya existentes; para luego comenzar con diversas actividades didácticas con el fin de reconocer y diferenciarlas entre ellas". En palabras de Itzcovich (2008):

> el trabajo implica, por parte del docente, una fuerte apuesta a la elaboración, identificación y validación de propiedades de los alumnos, así como el uso de dichas propiedades para producir nuevas relaciones y obtener soluciones a nuevos problemas, poniendo el acento, no sólo en los resultados a los que arriben, sino en el modo de dar cuenta de la validez de dichos resultados. De esto se trata el trabajo geométrico (p.203).

Consideraciones finales

El uso de las herramientas digitales planteadas como soporte, para lograr un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos y los procesos que conllevan la enseñanza de la misma, permiten la construcción de propuestas didácticas enriquecidas que puedan acercarnos de modos más significativos a las finalidades educativas. La selección y el análisis de recursos disponibles deben realizarse con criterios claros, pertinentes y relevantes para que estos respondan a los intereses del docente, los objetivos propuestos y las características de los usuarios. La inclusión de las TIC no tiene por fin hacer divertido el aprendizaje, sino acercarse a los intereses de los destinatarios, favorecer la labor docente y hacer más significativos los procesos de construcción de los conocimientos escolares.

En palabras de Adell y Castañeda (2012, p.15):

> […] existe una "pedagogía emergente" que está surgiendo al hilo de, y en diálogo con, las TIC de última generación y que dicha pedagogía, que hunde sus raíces en ideas de grandes pedagogos del siglo XX pero que va más allá en algunos aspectos, puede entreverse en las prácticas innovadoras que realizan docentes intuitivos, sensibles a los cambios que está experimentando nuestra sociedad y a las posibilidades que les ofrece la tecnología y comprometidos con la renovación didáctica.

Gros (2015) enfatiza que las pedagogías que emergen deben posibilitar la eliminación de los muros del conocimiento; por otro lado y de manera clara y precisa aborda el significado actual del conocimiento y los cambios que suponen el lugar y los tiempos para el aprendizaje a través de la caracterización del aprendizaje. Es importante inferir que las características que plantea la autora de alguna manera van definiendo el tipo de sujeto, de conocimiento y de finalidad educativa de esta "caída de los muros". Queda claro que toda metodología debe responder a preguntas más profundas que le otorgan sentido y significado como son el para qué, para quién, qué, etc., siendo innegable que las transformaciones tanto en la esfera intra como intersubjetiva de la educación, promueven nuevas maneras de enseñar para nuevas maneras de aprender.

El análisis de las experiencias compartidas nos posibilita reflexionar acerca de la práctica matemática y la práctica matemática escolar, que se favorece u obstaculiza a partir de una situación didáctica particular. Nuestra concepción de la Matemática y del hacer Matemática guía la forma en que planteamos su enseñanza, desde este contexto didáctico se privilegia redescubrir la matemática con inclusión genuina de las TIC, aceptando el reto de Villareal (2012) de abandonar viejas prácticas y adentrarnos en una "zona de riesgo", incorporando en la formación inicial y continua de docentes de primaria el empleo de las tecnologías para afianzar su dominio y fomentar su incorporación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Referencias bibliográficas

Adell, J. y Castañeda, L. (2012). Tecnologías emergentes ¿Pedagogías emergentes? En J. Hernández, M. Pennesi, D. Sobrino, A. Vázquez (Coords.), *Tendencias emergentes en educación con TIC* (pp. 13-32). Barcelona, España: Asociación espiral, Educación y tecnología.

Borba, M. y Penteado, M. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte, Brasil: Editora Autêntica.

Carrillo Yáñez, J., Contreras González, L., Climent Rodríguez, N., Montes Navarro, M., Escudero Ávila, D. y Flores Medrano, E. (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid, España: Paraninfo.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid, España: Pearson.

Gálvez, G., Navarro, S., Riveros, M. y Zanocco, P. (1998). *Vida, números y formas*. Ministerio de Educación de la República de Chile. Recuperado de https://issuu.com/nkramm/docs/vida_numeros

Gros, B. (2015). La caída de los muros del conocimiento en la sociedad digital y las pedagogías emergentes. *Education in the knowledge society (EKS)*, 16(1), 58-68. Recuperado de: https://revistas.usal.es/index.php/eks/article/view/eks20151615868

Itzcovich, H. (2008). *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Maggio, M. (2012). *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia, 3*(5), 73 - 94.

Criterio de la derivada primera: visualización y elaboración de conjeturas en una clase mediada por TIC

FABIANA MONTENEGRO

montenegrofg@gmail.com

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral

Escuela Normal Superior N°32 'Gral. José de San Martín'

CARLOS FERNÁNDEZ

carlos_fernandez.81@hotmail.com

Escuela Normal Superior N°32 'Gral. José de San Martín'

Resumen

Esta ponencia describe una experiencia que representa una vuelta de tuerca a un conocido problema de optimización, posible gracias a los nuevos escenarios educativos que brindan la posibilidad de incorporar recursos de enseñanza vinculados con la tecnología. Los autores de esta ponencia, docentes de un profesorado de Educación Secundaria en Matemática de Santa Fe, hemos construido un archivo en *GeoGebra* vinculado con el problema, disponible en el web y planificado consignas para trabajar a partir de él. Esta propuesta propone el camino inverso a la tradicional enseñanza del Criterio de la Derivada Primera: exploración y elaboración de conjeturas por parte de los alumnos a partir de un problema de la semirrealidad (Skovsmose, 2012) para una posterior institucionalización por parte del docente. Enseñar matemática a partir de recursos TIC no solo promueve la visualización favoreciendo la comprensión de propiedades y conceptos sino que, también, fomenta el trabajo grupal, valora positivamente el error, realiza con rapidez y facilidad simulaciones de experimentos y resulta ser un elemento motivador en la clase (Molero Aparicio, 2009) Aunque no disponemos de resultados, consideramos que surgirán en la micro-comunidad matemática del aula cuestiones que no lo harían si la situación problemática se resolviera en un entorno de lápiz-papel. Sin olvidar que la planificación de actividades de enseñanza mediadas por la tecnología no está exenta de obstáculos y que requiere de decisiones anticipadas de los docentes, consideramos que constituyen una oportunidad para que alumnos, docente y conocimiento nos relacionemos de otros modos, superando los roles tradicionales.

Introducción

En las últimas décadas diversos investigadores del ámbito de la educación matemática (Brosseau, 1993, 1994; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Pochulu, 2018; Sadovsky, 2005) han puesto en tensión la profundidad del trabajo intelectual que se ofrece en las clases de esta asignatura -basadas frecuentemente en propuestas de mecanización y aplicación de algoritmos- y recomiendan desarrollar tareas que favorezcan la comprensión mediante la exploración, visualización, elaboración de conjeturas y argumentaciones, etc. Este modo de trabajar en el aula encuentra en la incorporación de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) un modo de concretarse.

Planificar la enseñanza del Cálculo a partir de la resolución de problemas mediada por las TIC, ofrece a los estudiantes nuevos modos de pensar y de aprender matemática. Problematizar los conceptos del Cálculo Diferencial bajo la idea de desnaturalizar los saberes en colaboración con entornos tecnológicos, como lo es el software dinámico *GeoGebra*, permite que los estudiantes sean capaces de resolver y producir el conocimiento desde sus posibilidades, favoreciendo la comprensión y el empleo de distintos conceptos.

En particular, la determinación de máximos o mínimos locales o relativos a través de lo que se conoce como ‘Criterio de la Derivada Primera’ constituye un tópico que se desarrolla, generalmente, siguiendo la enseñanza tradicional: explicitación y resolución de ejemplos por parte del docente y aplicación en ejercicios por parte del alumno. Esta propuesta de enseñanza, mediada por TIC, propone el camino inverso: exploración y elaboración de conjeturas por parte de los alumnos a partir de un problema de la semirrealidad (Skovsmose, 2012) para una posterior institucionalización por parte del docente.

Los autores de esta ponencia, docentes en un Profesorado de Matemática para el Nivel Secundario de la provincia de Santa Fe (Argentina), hemos elaborado esta propuesta para poner en práctica durante el 2020 con alumnos de segundo año de dicho profesorado en la asignatura ‘Cálculo II’. Representa una “vuelta de tuerca” a un conocido problema de optimización, posible gracias a los nuevos escenarios educativos que nos brindan la posibilidad de incorporar recursos de enseñanza diferentes vinculados con la tecnología.

Consideramos que las tareas están pensadas para alumnos del nivel superior o universitario que conocen la definición de derivada de una función y las reglas de derivación. En cuanto a los conocimientos previos sobre tecnologías, se requiere el uso de los comandos y herramientas básicas que ofrece *GeoGebra*.

En relación a lo anteriormente expresado, hemos construido un archivo en *GeoGebra* que aparece en la dirección https://www.geogebra.org/classic/rsrmguh8, que servirá como recurso para los estudiantes con quienes se desarrolle la actividad. Se pretende que a partir de las consignas de la tarea y de un trabajo grupal, bajo procesos numéricos acompañados por un registro geométrico del problema, se promueva un juego de anticipaciones y de producción de conjeturas que, a posteriori, podrán demostrar vía el teorema del valor medio y definiciones del Cálculo Diferencial.

En la siguiente sección enmarcamos la propuesta de enseñanza y en la tercera la describimos. En la cuarta sección efectuamos el análisis a priori de la tarea, sin considerar las intervenciones del profesor en la gestión de la clase. Finalmente, en la última sección elaboramos algunas reflexiones.

Marco de referencia

Castro y Castro (1997) destacan que los sentidos constituyen las vías de acceso de cada persona al conocimiento. En particular, el conocimiento matemático se transmite, se adquiere y se construye, primordialmente, mediante la vista y el oído. De allí, la importancia que adquiere la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

> La capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema, requiere habilidad para interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente y expresarla sobre un soporte material. Cuando se usan las representaciones gráficas de conceptos matemáticos como herramientas para interpretar conceptos o resolver problemas, la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para llegar a la comprensión de alguna propiedad específica de un concepto o alguna relación importante para la resolución de un problema a través de un diagrama, un dibujo o una gráfica (Castro y Castro, 1997, pp. 97-98)

El empleo de la tecnología, como recurso didáctico, facilita a los docentes la construcción de esas representaciones gráficas que colaboran con la adquisición y consolidación de los contenidos matemáticos en los alumnos acercando a la matemática con la realidad y transformando, por ejemplo, un teorema matemático en una realidad observable.

Existen muchos factores metodológicos favorables en el uso de la tecnología en una clase de matemática. Molero Aparicio (2009) nombra algunos de ellos y afirma que enseñar matemática a partir de recursos TIC facilita la adquisición de conceptos, permite el tratamiento a la diversidad, fomenta el trabajo grupal, valora positivamente el error, realiza con rapidez y facilidad simulaciones de experimentos y resulta ser un elemento motivador en la clase, entre otros.

El software *GeoGebra*, a diferencia de los clásicos programas de dibujos, favorece la visualización de representaciones de conceptos matemáticos puesto que permite construir figuras a partir de objetos iniciales entre los que se establece una relación de dependencia, de modo que, al mover los objetos iniciales de desplazan también los que dependen de éstos sin modificar la construcción realizada.

Estas y otras diversas razones justifican la gran cantidad de ponencias en congresos, artículos de revistas y libros que describen experiencias de integración de *GeoGebra* en clases de matemática:

- Es gratuito.
- Es multiplataforma.
- Es portable, es decir, es posible ejecutarlo desde una memoria portátil o un CD.
- Permite la creación de páginas HTML con los applets que dinamizan las actividades incorporadas.
- Está diseñado para trabajar con conceptos geométricos, algebraicos y de cálculo.
- Posibilita diseñar actividades de otras áreas del conocimiento (estática, dinámica, óptica, química, ...)
- La existencia de una comunidad académica internacional que interactúa a través de los foros y wikis del *Geogebra* (Moreno Vega, 2012, p 23)

Entre las modificaciones que el empleo de un Sistema de Geometría Dinámica, como lo es *GeoGebra* introduce en el aula, Gónzalez.López (2001) considera la forma que los alumnos ejercen la actividad matemática respecto de la enseñanza tradicional ya que a partir de su uso "tienen la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar; en definitiva, ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir" (Gónzalez-López, 2001, p 279).

Generar escenarios donde los estudiantes desarrollen una tarea de investigación a partir de representaciones dinámicas en la resolución de problemas, favorece la comprensión de conceptos o significados extraídos de dichas representaciones. Así cobra valor el proceso de conjeturación puesto que puede medir, agregar trazos auxiliares, o simplemente explorar favoreciendo el desarrollo de su pensamiento analítico, cuestiones que, con frecuencia, no suceden en un ambiente de papel y lápiz.

Propuesta de enseñanza

Se proponen dos instancias de trabajo en pequeños grupos a partir de las algunas preguntas que se detallan a continuación.

El objetivo de la propuesta es propiciar que, partiendo de la visualización que facilitan las TIC, los alumnos elaboren conjeturas sobre la vinculación entre el comportamiento de una función y el de su derivada para hallar extremos relativos de una función.

Las consignas son una adaptación de las que se encuentran en Castro Díaz y Forero Toro (2019).

Ustedes son ingenieros encargados de diseñar recipientes metálicos usados en la industria alimenticia atendiendo a las especificaciones del cliente. Uno de los clientes ha pedido que el recipiente tenga forma rectangular, sin tapa y hecho a partir de una lámina de metal de 32 cm por 25 cm, como se muestra en la figura 1. Para ello se cuenta con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja (Figura 1)

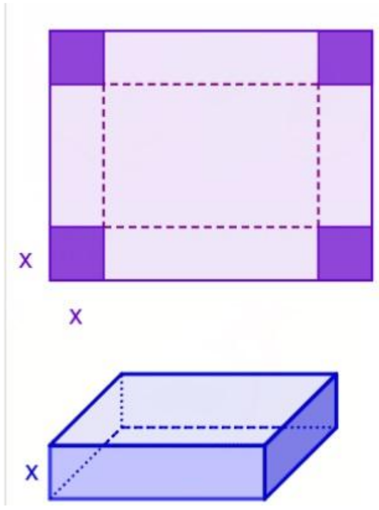


Figura 1. Esquema de plegado de la lámina

Ingresa a https://www.geogebra.org/classic/rsrmguh8

Primera Parte

Mueve el deslizador y observa

- ¿Qué representa el valor del deslizador en el problema?
- ¿Entre qué valores debe oscilar el deslizador para que pueda formarse la caja? ¿Por qué?

- ¿Crees que, en la medida que crece el lado de los cuadrados, crece también el volumen de la caja? Fundamenta tu respuesta.
- ¿Entre qué valores del lado de los cuadrados crece el volumen de la caja? ¿Y entre cuales decrece?
- En relación a tu respuesta de la pregunta anterior, estima el máximo volumen posible que puede tener la caja. Describe cómo llegas a esa conjetura.

Segunda Parte

Abandona por un momento el archivo de *GeoGebra*

- ¿Qué variables aparecen en el problema? ¿Cómo están relacionadas entre sí?
- ¿Cuál es la ecuación de la función V que relaciona el volumen de la caja en términos del lado de los cuadrados? ¿Cuál es el dominio de V?
- Determina la ecuación de la función derivada de V.

Abre la 'Vista Gráfica 2' del archivo

- ¿Existe relación entre el crecimiento/decrecimiento en la función V y el signo de las imágenes en V'? Si sí, ¿cuál es?
- En relación a la respuesta de la pregunta anterior, ¿cuál debe ser el comportamiento de las imágenes de los puntos cercanos a izquierda y derecha del máximo en V? ¿Puedes inferir si existe relación entre el máximo en V y el signo de la derivada en puntos cercanos?

Análisis a priori

Primera parte

En la primera de las preguntas se espera que los alumnos afirmen que, en el contexto del problema, el deslizador representa la longitud del lado de los cuadrados que se cortan de las esquinas, denotado por x en el archivo. La visualización de la Vista 2D del archivo en *GeoGebra*, sobre el que se trabajará, colabora en esta interpretación del deslizador.

Por lo tanto, el deslizador debe oscilar entre *0* y *12.5* que, matemáticamente, es el dominio de la función volumen de la caja dependiendo de la medida del lado de los cuadrados que se recortan de las esquinas. La segunda parte de la segunda pregunta busca que los alumnos argumenten esta respuesta. Probablemente, apelando al registro gráfico de la situación, aseguren que la medida del lado de los cuadrados debe ser positiva y menor que la mitad de la longitud del menor de los lados de la lámina puesto que, de otro modo, los cuadrados a recortar se solapan.

En la tercera pregunta, un primer razonamiento que puede surgir es que, si crece la medida de una arista, el volumen de la caja también crecerá. Esta conjetura no considera que, simultáneamente, otra de las aristas decrecerá y que, por lo tanto, el volumen no siempre irá en aumento. La casilla de control que visibiliza el volumen de la caja en la Vista Gráfica 3D del archivo, probablemente ayudará a concluir que no es verdad que, a medida que crece el lado de los cuadrados, crece también el volumen de la caja. Pueden fundamentar su respuesta considerando dos valores para el lado de los cuadrados para los cuales los volúmenes satisfagan la desigualdad opuesta. A modo de ejemplo, si se considera que el lado de los cuadrados a recortar es de *3 cm* o de *10.5 cm* y aunque *3* es menor que *10.5*, el volumen para *3 cm*, es de *1482* cm^3, mayor que *462* cm^3, que es el volumen para *10.5 cm*.

Vale aclarar que, en esta fase de la propuesta, los alumnos no dispondrán todavía de la gráfica de la función volumen para observar que es creciente en un intervalo de su dominio y decreciente en otro. Si los alumnos quisieran hallar la ecuación de dicha función, el docente los invitará a explorar nuevamente el archivo. Aun así, algunos estudiantes pueden optar por buscar el modelo algebraico de la situación.

Tal como en las preguntas previas, la cuarta pregunta es posible de responder analizando conjuntamente el deslizador -en la Vista 2D- y el volumen -en la 3D. El volumen de la caja crece para $0<x<4.6$ y decrece cuando $4.64<x<12.5$.

Debido a la respuesta de la pregunta anterior, se prevé que los alumnos afirmen que existe un valor de x tal que, en los valores a su izquierda el volumen de la caja crece y en valores a su derecha decrece. La ordenada de este punto, *(4.64, 1657.21)*, indica que el volumen máximo posible que puede tener la caja es de *1657,21* cm^3. La explicación de la conjetura puede basarse en que no existe otro valor de x en el cual sucede lo mismo: que los valores a izquierda y derecha hacen que el volumen pase de ser creciente a decreciente. Por lo tanto, en *4.64* se alcanza el máximo volumen que puede tener la caja sin tapa.

Segunda parte

La segunda parte contiene consignas cuyo propósito es continuar matematizando la situación con la que los alumnos vienen trabajando. Así, en las primeras preguntas se espera que los estudiantes identifiquen las variables y construyan un modelo funcional, en el registro algebraico, para establecer la correspondencia entre el volumen de la caja y la longitud del lado del cuadrado en el dominio de V, previamente analizado.

Luego de la validación del modelo funcional entre cada grupo y el profesor de la asignatura se pide, en la tercera consigna, que determinen de manera algebraica la función derivada del volumen de la caja. A posteriori, se invita a los alumnos a hacer visible Vista Gráfica 2 del archivo de *GeoGebra*, a fin de visualizar simultáneamente la gráfica de la función volumen y la de su derivada en el dominio predeterminado. Con este nuevo recurso, se espera que los estudiantes vuelvan al deslizador, haciendo variar el valor de "x" y observen el recorrido que realizan los puntos a lo largo de la gráfica de las funciones V y V'.

En consecuencia, presuponemos que los estudiantes conjeturarán, a partir del marco funcional de la situación, cuál es el comportamiento del volumen de la caja a medida que crece la longitud del cuadrado a recortar, y lograrán relacionar las imágenes positivas/negativas en la gráfica de V' con el crecimiento/decrecimiento de la función V y en qué intervalos numéricos se presentan dichas vinculaciones. Esto permite, además, acercarlos a la respuesta de la última pregunta de la esta parte, propiciando la formulación de conjeturas acerca de la obtención del extremo (en este caso el máximo relativo) de la función V con el signo de las imágenes de la derivada para valores próximos a la abscisa de dicho extremo local.

A modo de reflexión

No disponemos de resultados que conformen el análisis a posteriori, pues se trata de una propuesta a implementar durante el presente año. Aun así, consideramos que favorecerá la acción autónoma y el debate entre los estudiantes, ya que disponen de los conocimientos disciplinares y tecnológicos que se requieren.

Consideramos que gracias a la interacción con el recurso tecnológico "Una propuesta de este tipo permite entramar [...] la aplicación de conocimientos geométricos junto con la construcción de un sentido de la noción de función como modelo para vincular el cambio y/o la variación entre las medidas de dos magnitudes" (Duarte, 2014, p. 4).

Entre las cuestiones que no surgen si la situación problemática se efectuará en un entorno de lápiz-papel, pueden mencionarse: la visualización simultánea de la modelización matemática en dos y tres dimensiones, la inclusión del texto dinámico que indica el volumen de la caja sin necesidad de proceder a su cálculo para cada valor de la variable independiente, la disponibilidad de las coordenadas de cada punto que pertenece, simultáneamente, a la gráfica del volumen y de su derivada.

No olvidamos que, tal como lo menciona Duarte (2014), planificar actividades de enseñanza mediadas por la tecnología no está exento de obstáculos y requiere de decisiones anticipadas de los docentes. A modo de ejemplo, en esta propuesta se requiere disponer de internet en la institución educativa o que los alumnos hayan descargado previamente el archivo y que su netbook o celular disponga de algunas de las últimas versiones de *GeoGebra*. Además se precisa de un cañón en el lugar donde se esté desarrollando la clase, a fin de "que los alumnos puedan entrar en diálogo con las producciones de sus compañeros" (Duarte, 2014, p. 1), puesto que aquello que acontece en el archivo de *GeoGebra* no se puede comunicar mediante palabras sin el recurso de la visualización.

La enseñanza mediante el empleo de entornos tecnológicos constituye un desafío para la enseñanza de la matemática. No solo porque esto implica que los docentes superemos algunas tradiciones devenidas de nuestros propios recorridos formativos en las que el profesor explicaba para que luego los estudiantes aplicaran, sino también porque las nuevas tecnologías afectan los modos de estudiar el conocimiento matemático, la planificación y gestión de la clase. Sin embargo, la posibilidad de incorporar recursos de enseñanza provenientes de la tecnología constituye una oportunidad de organizar una clase de matemática en la que alumnos, docente y conocimiento nos relacionemos de otros modos, superando los roles tradicionales.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Trabajos de Enseñanza. Córdoba, Argentina: Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones* (pp. 65-94). Buenos Aires, Argentina: Paidós**.**

Castro Díaz, L. A y Forero Toro, C. A. (2019). *Razonamiento covariacional con tecnologías digitales, un camino hacia el cálculo* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Recuperado de: http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/11412/TO-23690.pdf?sequence=1

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.95-124). Barcelona, España: Horsori.

Chevallard, Y; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: ICE Horsori.

Duarte, B. (2014). Algunas experiencias y reflexiones sobre la enseñanza de la matemática en entornos de tecnología. *El monitor,* (34).

González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática* (pp.277-290). Granada, España: Universidad de Granada.

Morelo Aparicio, M. (2009). *Los medios tecnológicos y la enseñanza de las Matemáticas*. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura. ETSI Caminos. UPM. España: Instituto Juan de la Cierva de Madrid. Recuperado de:
http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/009%20Los%20medios.pdf

Moreno Vega, J. L. (2012). *Elaboración de simulaciones en el software Geogebra en el desarrollo de la capacidad de comunicación matemática* (Informe final de investigación). Huacho, Perú: Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión. Recuperado de:
https://www.academia.edu/17658569/SIMULACIONES_EN_EL_SOFTWARE_GEOGEBRA?email_work_card=view-paper

Pochulu, M. (2018). *La Modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones*. Villa María, Argentina: GIDED.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109- 130). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

El uso de *Geogebra* en la formulación y validación de conjeturas

MICAELA MAZZOLA
micamazzola@gmail.com
EESO N°423 “Reynaldo Cullen”
MA. EUGENIA CAMMISI
meugeniacammisi@gmail.com
EESO N°231 “República de Nicaragua”
CINTIA HURANI
huraniailen@gmail.com
IES N°15 “Dr. Alcides Greca”

Resumen

El presente trabajo tiene como propósito compartir una experiencia de producción y análisis didáctico-matemático realizado en el marco de la carrera de posgrado Especialización en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, en un curso donde se problematiza la validación en el aula de matemática en la escuela secundaria. Dicho trabajo es en torno a una tarea de validación de un problema geométrico mediada por un software de geometría dinámica (SGD), en la que se pretende que los estudiantes establezcan las condiciones que corresponde “imponer” bajo las cuales se cumple un enunciado. Asimismo, se presenta desde los aportes de Markiewicz (2018) y Balacheff (2000) el análisis de lo actuado por estudiantes de primer año de una escuela secundaria al formular una conjetura y validarla, en el momento de realizar dicha tarea.

Del análisis se desprende que el SGD ocupa diferentes roles en el proceso de validación de conjeturas: en algunos sirve como base sólida desde lo visual y los estudiantes se apoyan solo en ello para validar su conjetura, mientras que en otros, a través de la exploración, permite visualizar las propiedades en juego que otorgarán a su justificación mayor formalización.

Introducción

El estudio aquí compartido, tiene su origen en la Formación Práctica realizada en el marco del segundo Trayecto de la Especialización en Didáctica de la Matemática (UNL) en el cual se plantea como eje de análisis y discusión "La validación en el aula de Matemática".

En este trabajo se presenta el análisis de una actividad mediada por el software de geometría dinámica (en adelante, SGD) *GeoGebra* en un curso de primer año de la Escuela Secundaria. La propuesta consiste en establecer las condiciones que corresponde "imponer" bajo las cuales se cumple un enunciado.

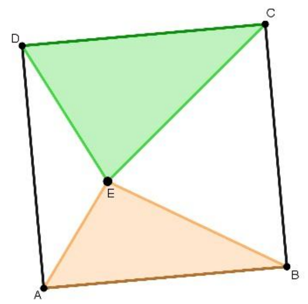
Se estudian los procedimientos que ponen en funcionamiento los estudiantes en la elaboración de conjeturas según Markiewicz (2018) y los tipos de pruebas que utilizan en el proceso de validación de las mismas definidas en Balacheff (2000).

Contextualización de la experiencia

En los Diseños Curriculares de Educación Secundaria de la Provincia de Santa Fe se propone que en el aula de matemática se trabaje a la manera de micro-sociedad científica, en el que se problematice el contenido y los estudiantes tengan oportunidad de conjeturar, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados y elaborar conclusiones, posibilitando la producción de conocimientos.

En esta dirección, considerando que los documentos mencionados proponen para el primer año de la escuela secundaria el tratamiento de las superficies y su comparación usando equivalencias entre figuras, se implementa en primer año de una escuela secundaria (13 – 14 años) de la ciudad de Santa Fe la siguiente tarea:

Seguir las instrucciones para construir una figura como ésta en la computadora, usando el programa *GeoGebra*. Entre paréntesis están indicados los nombres que el programa le da a cada objeto. Luego, responder las preguntas moviendo el punto E dentro del cuadrado.



1. Seleccionar la herramienta Polígono regular y marcar dos puntos en la pantalla. Luego, ingresar “4” para que el programa realice un cuadrado (ABCD).
2. Con la herramienta Punto marcar un punto (E) dentro del cuadrado.
3. Seleccionar la herramienta Polígono y marcar los triángulos AEB y CED, para eso hay que hacer clic sobre cada uno de los tres vértices y, luego, volver a hacer clic sobre el primero para cerrar cada triángulo.

a. ¿Dónde ubicarían el punto E para que las áreas de los triángulos AEB y CED sean iguales?, ¿por qué?
b. ¿Dónde ubicarían el punto E para que el área del triángulo AEB sea mayor que la del triángulo CED?, ¿por qué?
c. ¿Dónde ubicarían el punto E para que el área del triángulo CED sea un cuarto del área del cuadrado?, ¿por qué?
d. ¿Dónde ubicarían el punto E para que la suma de las áreas de los triángulos AEB y CED sea mayor a la suma de las áreas de los triángulos CEB y AED?, ¿por qué?
e. Si se agranda o se achica el cuadrado, moviendo el vértice A o el vértice B, ¿Cambiarán las respuestas anteriores? Justificar la respuesta.

La tarea se realiza en grupos de 3 y 4 estudiantes durante una clase de 80 minutos. Cada estudiante cuenta con una computadora con el software *GeoGebra* y con las instrucciones necesarias para poder realizar las construcciones pertinentes, ya que es la primera vez que lo utilizan. La docente solo interviene para aclarar las consignas o inconvenientes relacionados con el uso del SGD y dar indicaciones sin interceder en el trabajo de los alumnos.

Esta tarea es extraída del libro escolar “Hacer Matemática ⅔” de Sessa (2017). En la tarea original, no se piden de forma explícita justificaciones, por lo que se agrega a cada ítem la pregunta ¿Por qué? Esta pregunta conduce a los estudiantes a revisar sus afirmaciones y buscar razones que les permitan reafirmarlas. Además, les exige expresar sus ideas matemáticas y quizás les permita tomar conciencia de que lo observado pierde sentido si no se pueden encontrar argumentos que lo justifiquen.

En esta ponencia, por cuestiones de extensión, se comparte el análisis de las producciones de la consigna a): *¿Dónde ubicarían el punto E para que las áreas de los triángulos AEB y CED sean iguales?, ¿por qué?*

Aportes teóricos

La elaboración de conjeturas constituye una instancia fundamental del trabajo matemático. Como lo expresan Chevallard, Bosch y Gascón (1997), una vez que nos enfrentamos a un problema que debemos resolver, el estudio de dicha cuestión en-tra en una fase exploratoria, en la cual juega un papel importante el pensamiento plausible o conjetural, definido por Polya (1954) como aquel que nos permite elaborar hipótesis y conjeturas que nos parezcan acertadas, examinar su validez y contrastarlas, y reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba.

Por otra parte, Itzcovich (2007) afirma que "la idea de la conjetura, en términos escolares, es la producción de una "sospecha", de un "parecer", producto de una experiencia de trabajo. Es decir, confluyen en ella exploraciones, ensayos y errores, el uso de los datos conocidos y saberes disponibles que permiten establecer una afirmación con cierto margen de certeza" (p. 17). Markiewicz (2018) menciona los siguientes procedimientos involucrados en la elaboración de conjeturas:

- Inducción empírica:
    - Observación de casos particulares o ejemplos (discretos o dinámicos);
    - Sistematización de casos observados;
    - Búsqueda de regularidades;
    - Generalización.
- Analogía: a partir de la similitud encontrada entre dos o más cosas en algún aspecto, se infiere la similitud de esas cosas en otros aspectos.
- Generalización: A partir del cumplimiento de una propiedad en un conjunto de objetos, se infiere el cumplimiento de esta propiedad a un conjunto mayor que lo contiene. Puede consistir en la generalización a partir de un caso particular representativo.
- Ensayo y error a partir de conjeturas que van siendo refutadas rápidamente una tras otra.
- Conjeturar deductivo: idear directamente una síntesis para nuestra conjetura a partir de otra proposición emparentada con ella que ya sepamos que es verdadera.

En palabras de Novembre, Nicodemo y Coll (2015), la exploración realizada con lápiz y papel puede resultar costosa en términos de esfuerzo. La construcción de muchos casos de análisis no siempre es posible, lo cual la limita como herramienta. En cambio, la computadora brinda posibilidades para la exploración lo cual permite trabajar rápidamente con muchos casos particulares con tan solo mover alguno de los elementos libres sobre los cuales analizar patrones, semejanzas, diferencias, coincidencias, que pueden llevar a la búsqueda de una generalización, lo que favorece la elaboración de conjeturas.

Itzcovich (2007) menciona otra parte fundamental del trabajo matemático, la cual "involucra la responsabilidad de hacerse cargo, mediante argumentos matemáticos, de los resultados que se obtienen. Es decir, poder buscar razones que permitan explicar y comprender 'por qué pasa lo que pasa' o 'por qué se obtiene lo que se obtiene'." (p. 18) En este sentido, la tarea invita a los alumnos a volver sobre las actividades realizadas, a interpretar aquellas relaciones que comandan la obtención del área de cada triángulo y reconocerlas en la figura de análisis con el fin de argumentar sobre la verdad o falsedad de las conjeturas.

El proceso de validación, en palabras de Balacheff (2000), es la actividad intelectual no completamente explícita que se encarga de la manipulación de la información, dada o adquirida, para producir una nueva información, cuando este proceso tiene como fin asegurar la validez de una proposición y ocasionalmente producir una explicación, una prueba o una demostración.

Para abordar el estudio de estos procesos, el autor realiza una distinción entre los términos explicación, prueba y demostración, que si bien en su uso cotidiano pueden confundirse como sinónimos, no lo son. Es importante tener en cuenta esta clasificación ya que muchas veces los docentes, en las tareas que dan, utilizan distintos términos para referirse a dichos procesos: "probar que…", "demuestre que…", "explica…", "justifica…", etc.

Este autor entiende la *explicación* como el discurso por el cual el locutor, que ya adquirió la verdad de la proposición, intenta hacer inteligible la misma. Cuando la explicación adquiere un carácter social y es aceptada por una comunidad determinada, Balacheff (2000) la denomina *prueba*. La misma, según este autor, puede ser aceptada por una comunidad pero rechazada por otra. Finalmente, define la *demostración* como el tipo de prueba que se organiza siguiendo reglas predeterminadas, y que por ello, adquieren un carácter formal.

Las pruebas producidas por los alumnos pueden ser de naturaleza muy diversa. Por ello, desde el punto de vista de la actividad matemática, Balacheff (2000) clasifica a las pruebas en pragmáticas e intelectuales. Las primeras recurren a la acción o a la ostensión, es decir, requieren que quien desea interpretarlas recurra a la observación de ejemplos, figuras, etc. Las segundas, se basan en las propiedades puestas en juego y de sus relaciones.

Análisis de los procedimientos puestos en juego en la elaboración de conjeturas

La tarea propuesta se trata de explorar, formular y decidir qué condiciones corresponde "imponer" para que una determinada propiedad se cumpla. Esto es, se requiere de la producción de conjeturas a partir de explorar libremente la ubicación del punto interno al cuadrado, y en estos intentos encontrar las condiciones para que con los otros puntos determinen triángulos cuyas áreas cumplan con la condición pedida. La realización de una construcción dinámica que represente la situación se torna indispensable para poder realizar dicha exploración. Asimismo, permite usar el arrastre no como un medio de constatación, sino para elaborar dichas conjeturas.

Mediante la exploración de la situación se espera que los alumnos arriben a la siguiente conjetura: "*El punto E debe ubicarse en la recta correspondiente a la mediatriz del lado AD (que es también mediatriz del lado opuesto CB)*"

A partir del análisis de la implementación de esta tarea, se presentan los siguientes procedimientos vinculados al razonamiento conjetural (Markiewicz, 2018) que se pusieron en funcionamiento a partir de la primera pregunta:

- En algunos grupos de alumnos se utiliza la inducción empírica para construir la conjetura: a partir del arrastre del punto E, parten de la observación de casos particulares dinámicos, buscan regularidades entre la ubicación del punto E y el área de los triángulos (calculada con la herramienta correspondiente en GeoGebra), identifican y caracterizan el "lugar geométrico oculto" (Gutiérrez, 2005) del punto E para, por último, generalizar este lugar geométrico y así obtener una conjetura.
- A partir de lo que ocurre para un caso particular representativo -el centro del cuadrado-, un grupo de alumnos elabora la conjetura mediante la generalización para un conjunto mayor que lo contiene: "el segmento que corta al medio el cuadrado". Sin embargo, estos alumnos luego realizan la verificación de esta conjetura en nuevos casos particulares a partir del uso del arrastre. Aparece aquí el patrón inductivo fundamental del razonamiento conjetural donde la verificación de una consecuencia de la conjetura hace a la misma más creíble.
- Algunos grupos proceden a través de un modo de conjeturar deductivo: parten de una proposición que saben que es verdadera por ejemplo, el centro de un cuadrado está a igual distancia de los cuatro vértices, y de allí, por un razonamiento deductivo se logra una conjetura. Sin embargo, elaboran la conjetura: *el punto E debe ubicarse en el centro del cuadrado para que las áreas de los triángulos sean iguales,* y realizan una validación de la misma. A partir de la puesta en común, estos alumnos reformulan la conjetura mediante la ampliación del dominio de validez de la misma.

Análisis de tipos de pruebas puestas en juego en la validación de conjeturas

En términos de Arsac (1992), la tarea permite al alumno involucrarse en un proceso de prueba para convencer. Se trata de responder a la pregunta: ¿Es verdad? Lo cual "supone que haya una incertidumbre en cuanto a la validez de la conjetura producida, pero esta incertidumbre no es suficiente (…) Para comprometerse en un camino de prueba es necesario que haya una apuesta que nos incite a tener esta incertidumbre" (Arsac, 1992).

El solo hecho de proponer un problema a los estudiantes no es suficiente para garantizar que pongan en marcha un proceso de validación (Balacheff, 2000). En consecuencia, solo se expone a continuación el análisis de las pruebas elaboradas por siete de los trece grupos constituidos dado que los demás grupos no pudieron iniciar dicho proceso. Asimismo, se clasifican según los tipos de pruebas definidos en Balacheff (2000).

La mayoría de los grupos utilizan la herramienta *Área* de *GeoGebra* para calcular las áreas de los triángulos a la hora de elaborar sus conjeturas. La medida que devuelve el SGD es aproximada, lo cual permite poner en duda la medición como recurso para comparar dos áreas. En consecuencia, al cuestionar la "exactitud de la medida", no recurren a ella para validar sus conjeturas.

El grupo A asegura la verdad de su conjetura a partir de lo observado en la pantalla, pues sus afirmaciones están basadas en el conteo de los cuadrados que ofrece la cuadrícula que proporciona el SGD y en la manipulación del punto E a fin de obtener nuevos ejemplos para comparar (Figura 1). Así, su prueba está fundada -implícitamente- en el concepto de unidad de medida y en la iteración de la misma para asignar un número al objeto que se mide y comprobada en la acción, sin volverse objeto de reflexión.

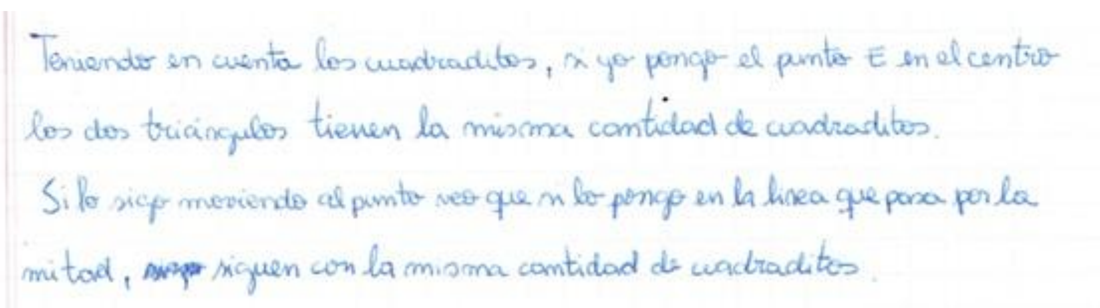
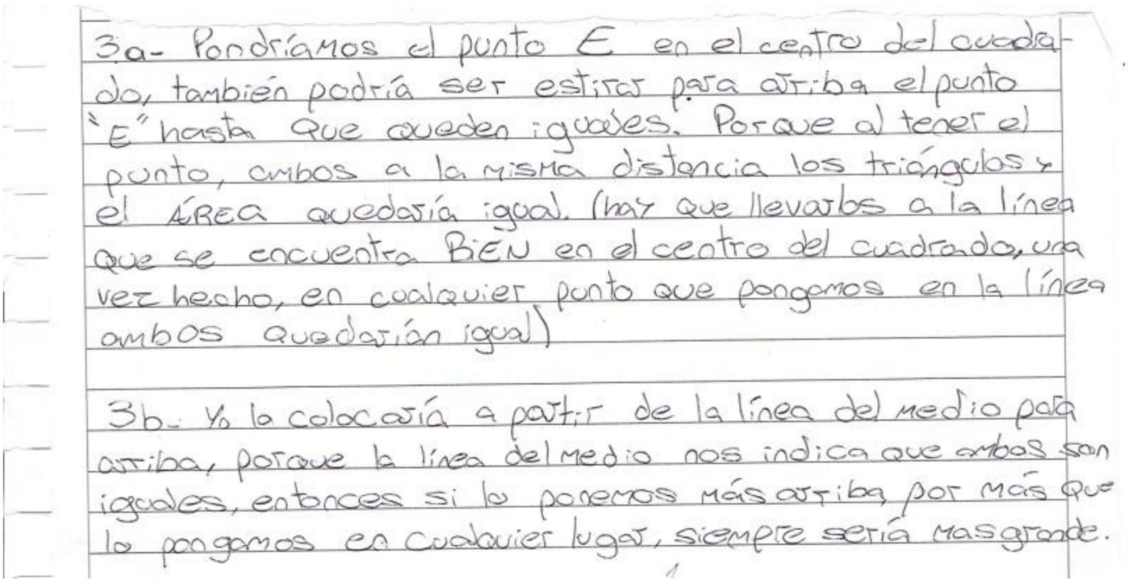

Teniendo en cuenta los cuadraditos, si yo pongo el punto E en el centro
los dos triángulos tienen la misma cantidad de cuadraditos.
Si lo sigo moviendo el punto veo que si lo pongo en la línea que pasa por la
mitad, siguen con la misma cantidad de cuadraditos.

Figura 1. Prueba elaborada por el grupo A

De igual manera, el grupo B (Figura 2) se basa en las experiencias que le ofrece el SGD. Pero en este caso establecen las razones de validez de la conjetura basándose -implícitamente- en la idea: para que dos figuras tengan igual área, deben ser iguales (la cual no siempre es correcta). Además, se expresa con el lenguaje de la familiaridad, empleando verbos de acción, y hacen referencia a la experiencia y a un autor.


3a- Pondríamos el punto E en el centro del cuadra-
do, también podría ser estirar para arriba el punto
"E" hasta que queden iguales. Porque al tener el
punto, ambos a la misma distancia los triángulos y
el ÁREA quedaría igual. (hay que llevarlos a la línea
que se encuentra BIEN en el centro del cuadrado, una
vez hecho, en cualquier punto que pongamos en la línea
ambos quedarían igual)

3b- Yo la colocaría a partir de la línea del medio para
arriba, porque la línea del medio nos indica que ambos son
iguales, entonces si lo ponemos más arriba por más que
lo pongamos en cualquier lugar, siempre sería mas grande.

Figura 2. Prueba elaborada por el grupo B

La formulación del grupo B es más general que en el caso del grupo A dado que el dibujo que les ofrece el SGD "no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura" (Balacheff, 2000: 68). No obstante, aún personaliza la prueba. En síntesis, se considera que ambas pruebas son pragmáticas.

Los grupos C y D elaboran sus pruebas en torno a la conjetura: "*El punto E debe ubicarse en la recta correspondiente a la mediatriz del lado AD (que es también mediatriz del lado opuesto CB)*"

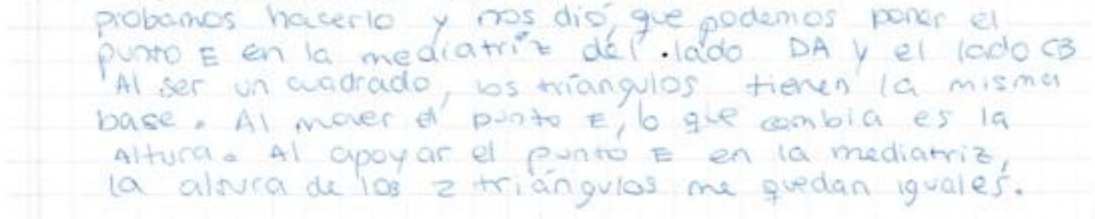
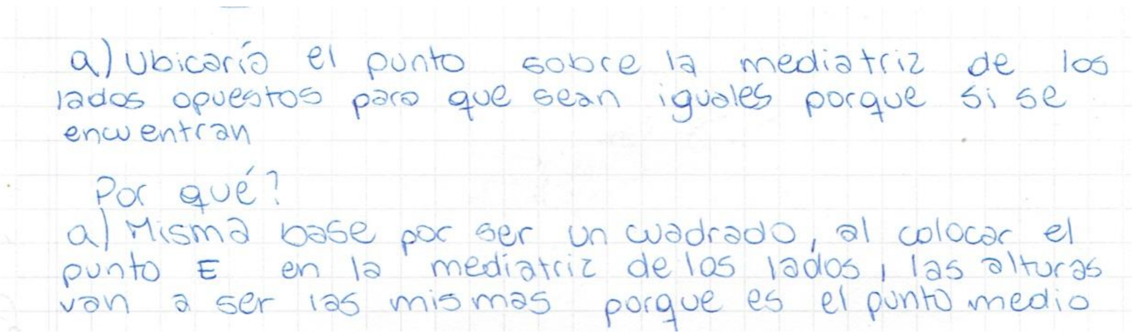

A - Lo ubicaríamos en el centro.
probamos hacerlo y nos dió que podemos poner el
punto E en la mediatriz del lado DA y el lado CB
Al ser un cuadrado, los triángulos tienen la misma
base. Al mover el punto E, lo que cambia es la
altura. Al apoyar el punto E en la mediatriz,
la altura de los 2 triángulos me quedan iguales.

Figura 3. Prueba elaborada por el grupo C

En el grupo C (Figura 3) el razonamiento de los estudiantes es inductivo, que si bien se basa en la observación, presenta carácter matemático: interioriza la acción y reflexiona sobre ella a partir de generalizar que las alturas de los triángulos son iguales. La explicación de las razones, que fundamentan la validez de la conjetura, se basa en un análisis de las propiedades o definiciones -más o menos formalizadas o explícitas- de los objetos en juego: en la idea que dos triángulos con altura y bases iguales tienen igual área y en las definiciones de cuadrado y de mediatriz de un segmento. Por tanto, esta prueba es intelectual.

De igual manera, el grupo D (Figura 4) presenta su prueba basándose en las mismas ideas pero de una forma más escueta y si bien no explicita todo lo que piensan ("porque es el punto medio" ¿de qué?) se realiza un razonamiento en el que se separa totalmente de la acción. En este sentido, estamos nuevamente frente a una prueba intelectual.


a) Ubicaría el punto sobre la mediatriz de los lados opuestos para que sean iguales porque si se encuentran

Por qué?

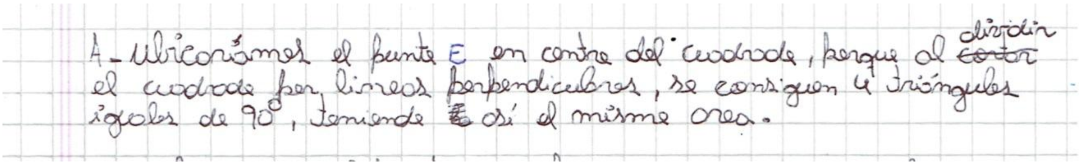
a) Misma base por ser un cuadrado, al colocar el punto E en la mediatriz de los lados, las alturas van a ser las mismas porque es el punto medio

Figura 4. Prueba elaborada por el grupo D

Los grupos E, F y G elaboran sus pruebas en torno a la conjetura incompleta: "*El punto E debe ubicarse en el centro del cuadrado*". Estos grupos si bien, al igual que en los casos anteriores, reflejan la necesidad de apoyarse en la visualización, presentan un escrito en el que se desprenden de la experiencia y exponen una dependencia lógica entre los conceptos, propiedades y elementos en juego. En consecuencia, estos grupos elaboran pruebas intelectuales.

Los tres grupos se apoyan en la congruencia de los triángulos para afirmar la igualdad de sus áreas. Esto es, "se seleccionan relaciones equivalentes a las que se quieren demostrar, anticipando que al probar las primeras las otras "caen por su propio peso"" (Itzcovich, 2005).

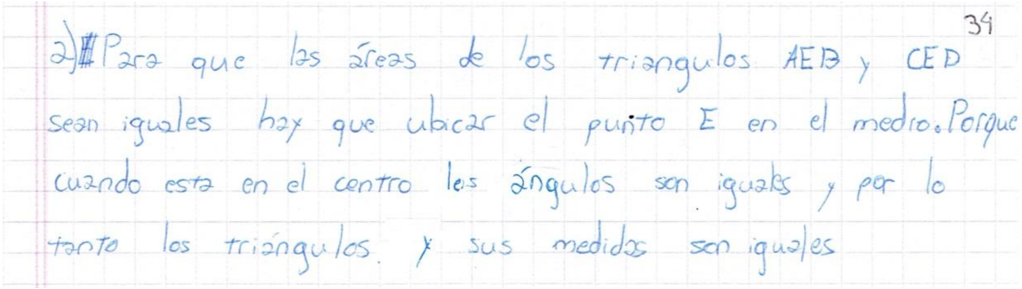
El grupo E (Figura 5) se basa en las propiedades de las diagonales del cuadrado para asegurar dicha congruencia. No obstante, no justifica porque dichas diagonales determinan triángulos congruentes.



A- Ubicaríamos el punte E en centro del cuadrado, porque al ~~cortar~~ dividir el cuadrado por líneas perpendiculares, se consiguen 4 triángulos iguales de 90°, teniendo así el mismo area.

Figura 5. Prueba elaborada por el grupo E

Por otro lado, el grupo F (Figura 6), se apoya en la igualdad de los ángulos de los triángulos para asegurar su congruencia. Sin embargo, no deja plasmado explícitamente el porqué de la igualdad de los ángulos y además hace uso de un criterio de congruencia que no es válido.

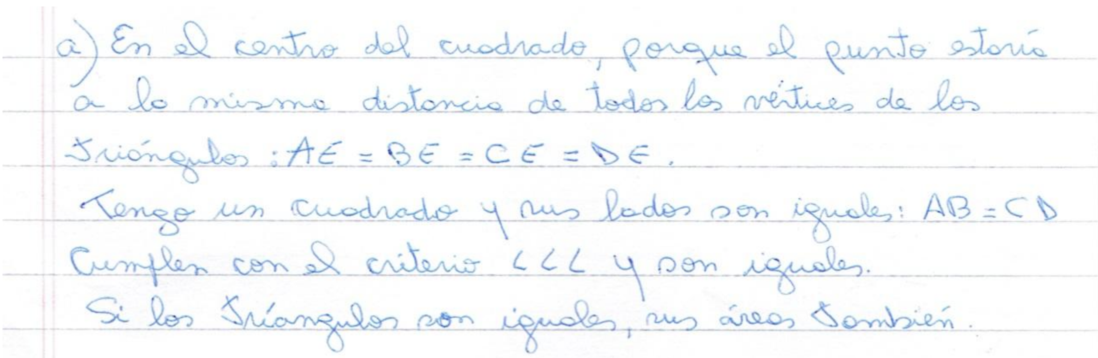


34

a) Para que las áreas de los triangulos AEB y CED sean iguales hay que ubicar el punto E en el medio. Porque cuando esta en el centro los ángulos son iguales y por lo tanto los triángulos y sus medidas son iguales

Figura 6. Prueba elaborada por el grupo F

Por último, el grupo G (Figura 7) utiliza la definición de cuadrado y la equidistancia de su centro a sus vértices para utilizar el criterio LLL con el fin de probar la congruencia de los triángulos, y así su equivalencia en área. Se puede afirmar que se trata de una prueba intelectual de mayor avance respecto a las anteriores.



a) En el centro del cuadrado, porque el punto estaría a la misma distancia de todos los vértices de los triángulos: AE = BE = CE = DE.
Tengo un cuadrado y sus lados son iguales: AB = CD
Cumplen con el criterio LLL y son iguales.
Si los triángulos son iguales, sus áreas también.

Figura 7. Prueba elaborada por el grupo G

Algunas reflexiones finales

El papel de otorgar el estatus de válido a un procedimiento, a una respuesta o a un resultado elaborado en la clase, tradicionalmente estuvo reconocida como tarea propia del docente. En contraposición a esta concepción, la tarea propuesta le permite al alumno elaborar una práctica fundamentada, en la que se autorice a sí mismo, apelando a sus conocimientos. Esto es, la tarea posibilita al alumno responsabilizarse matemáticamente por sus resultados.

El uso del SGD, a pesar de ser una condición del problema, juega un papel fundamental. Permite a los alumnos recorrer un camino que inicia con un tipo de trabajo empírico para analizar los triángulos y enunciar conjeturas. El SGD se emplea no solo para visualizar, sino también para explorar y conjeturar, siendo primordial la opción de arrastre que ofrece ya que permite a los estudiantes obtener una gran variedad de ejemplos de manera instantánea. Esto último resulta importante para poder avanzar y mejorar el razonamiento, ya que en general la observación de varios ejemplos y las hipótesis que surgieron de la misma fue lo que les permitió luego desarrollar razonamientos más complejos. Asimismo, el uso de la herramienta *área* del software permite cuestionar el uso de las medidas, lo que hace avanzar hacia un trabajo de tipo argumentativo donde las validaciones se apoyan en las propiedades y características conocidas de los objetos puestos en juego. En este sentido, se destaca que la mayoría de los alumnos han buscado argumentos para justificar lo que el SGD les permitía visualizar, sin convencerse solo con ello.

Por último, la tarea permite elaborar diferentes tipos de pruebas: pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales de diferente grado de avance y formalización, en función de los conocimientos previos y habilidades particulares. Es necesario que los alumnos valoren y discutan -entre todos y mediante la gestión del docente- los diferentes modos de validar que surgen, con el fin de identificar cuál de ellos explica de manera más acabada la cuestión planteada. Este trabajo sostenido en el aula, posibilita la evolución de los modos naturales de razonar hacia el razonamiento deductivo, primer objetivo de la enseñanza de las matemáticas según lo planteado en Gutiérrez (2007).

Referencias bibliográficas

Arsac G., Chapiron G., Colonna A., Germain G., Guichard Y. y Mante M. (1992). *Iniciación al razonamiento deductivo en el colegio.* (Trad. por I. Saiz). Press Universitaire de Lyon – IREM. (Trabajo original publicado en 1992).

Balacheff, G. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática.* Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* (pp.27-44). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Gutiérrez, A. (2007). Geometría, demostración y ordenadores. *Actas de las 13as JAEM* (versión electrónica sin paginar). Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. (Ed.) (2007). *La Matemática Escolar*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Markiewicz, M. E. (2018). *Clase 2: Significado de referencia acerca del razonamiento conjetural*. Módulo II: La validación en el aula de matemática, Especialización en Didáctica de la Matemática. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). *Orientaciones Curriculares. Educación Secundaria. Ciclo Básico*. Santa Fe, Argentina. Recuperado de: https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/191119/931924/file/noname.pdf

Novembre, A. Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). *Matemática y TIC – Orientaciones para la enseñanza.* Buenos Aires, Argentina: ANSES.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. New Jersey, USA: Princeton University Press.

Sessa, C. (2017). *Hacer Matemática 2/3*. Buenos Aires, Argentina: Estrada.

El uso de tecnologías digitales en Análisis Matemático I

ROMINA FERRANDO
romivfh@gmail.com
SILVINA G. SUAU
silvinasuau@yahoo.com.ar
Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional

Resumen

En este artículo mencionaremos experiencias de cátedra y reflexiones acerca de la incorporación de herramientas y recursos digitales en el aula de matemática, en la asignatura Análisis Matemático I (AMI), del primer nivel de las carreras de Ingeniería de la UTN-FRSF.

Estas experiencias aplicadas han surgido para tratar de ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de AMI, a pensar en forma significativa, razonando y relacionando los contenidos. Ante esto, creemos que el uso de tecnologías digitales puede favorecer y agilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Presentaremos diferentes experiencias implementadas a lo largo de varios años sobre incorporación de tecnologías y luego formularemos algunas reflexiones y consideraciones importantes sobre el eje temático abordado.

Introducción

Este trabajo trata sobre diferentes prácticas aplicadas a lo largo de los años en la asignatura Análisis Matemático I (AMI), del primer nivel de las carreras de Ingeniería de la UTN-FRSF, en la cual nos desempeñamos como docentes.

En primer lugar, nombraremos algunas de las referencias teóricas en las cuales se enmarcan nuestras prácticas docentes en AMI, y este trabajo en particular. Luego, mencionaremos algunas de las experiencias que hemos realizado en cuanto a la incorporación de tecnologías en el aula de matemática. Y finalmente, expresaremos algunas reflexiones y consideraciones finales sobre el eje temático abordado.

Las implementaciones realizadas surgen para tratar de ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de AMI, ya que hemos observado a lo largo de los años que a los estudiantes les cuesta pensar en forma significativa, razonando, cuestionando, integrando conceptos, y tienden a realizar los ejercicios en forma mecánica y repetitiva. Ante esto, el uso de tecnologías digitales puede favorecer y agilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, para lograr ayudar a los alumnos en la comprensión.

Marco teórico

Dentro del marco teórico-conceptual consideramos importante mencionar brevemente dos aspectos fundamentales: la comprensión de conceptos y la incorporación de tecnologías digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En primer lugar, cuando mencionamos la “comprensión” de conceptos, temas, contenidos y problemas por parte de los alumnos, hacemos referencia al concepto de "comprensión" de Perkins (1995). Según este autor, la comprensión tiene que ver no sólo con los datos o contenidos particulares sino con una actitud respecto de la disciplina. Comprender implica entender algo en su contexto y concebir el todo en relación a sus partes. Implica que haya interés por comprender y aprender. La comprensión va más allá de la posesión del conocimiento, implica un estado de capacitación. Enseñar para la comprensión es desarrollar un desempeño flexible, no sólo aprender o memorizar hechos o conceptos, sino saber y poder utilizarlos.

Según Stone Wiske (1999) la enseñanza para la comprensión implica involucrar a los alumnos en actividades de comprensión, entendiendo la misma como un desempeño flexible y como la capacidad de usar el propio conocimiento de maneras novedosas. El marco de referencia de la pedagogía para la comprensión implica responder preguntas tales como: *¿Qué tópicos vale la pena comprender? ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos? ¿Cómo podemos promover la comprensión? ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?* (Stone Wiske, 1999).

Por otro lado, es importante tener en cuenta que nos encontramos en lo que algunos denominan como la Era Digital, debido al gran avance de las tecnologías y la digitalización de la información.

Las comunicaciones se han acelerado, gracias a la presencia de Internet, telefonía celular, redes sociales, etc. Las transformaciones en las formas de comunicación que se producen en este contexto, implican también cambios en los modos de pensamiento. Y esto, por supuesto, impacta en las aulas. Los cambios en las prácticas humanas producto del constante avance de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) introducen modificaciones en los procesos sociales y en las pautas de actividad. En este sentido, la relación de las personas con la tecnología es bilateral (Burbules y Callister, 2008). Una concepción relacional de las TIC propone una mirada no solo sobre lo que se hace con la tecnología sino sobre las "pautas de uso" que se instalan en las prácticas sociales y producen un gran impacto social. Las TIC habilitan nuevas posibilidades para el acceso a la educación. Las instancias de aprendizaje se amplían ante las múltiples aplicaciones y recursos disponibles en Internet. Las aplicaciones específicas para la distribución y acceso a la información, la resolución de problemas y la comunicación aumentan las condiciones para configurar el aprendizaje significativo (Castro-García, Olarte Dussán y Corredor, 2016).

Por eso, es fundamental la incorporación de herramientas digitales en el aula, siempre con un objetivo específico, ya que no se trata de incorporar las tecnologías sin sentido, sino para que ayuden al alumno en la construcción de los conocimientos y el aprendizaje. No todas las tecnologías son útiles para un mismo contenido, grupo de alumnos o contexto específico. Debe ser el docente quien planifique adecuadamente el uso de las TIC según los objetivos de aprendizaje.

Experiencias de cátedra

Teniendo en cuenta el marco referencial comentado, a continuación describimos algunas de las intervenciones realizadas en las clases de AMI a lo largo de los años referidas al uso de tecnologías para la enseñanza, en busca de favorecer la comprensión de conceptos por parte de los alumnos y apuntar a la formación de habilidades y competencias que permitan a los estudiantes resolver problemas en el contexto de las carreras de Ingeniería.

Actividades grupales mediadas por tecnologías digitales

A partir del año 2014 comenzamos a implementar algunas experiencias de cátedra que apuntan a mejorar la comprensión y motivación de los alumnos. Describimos algunas de ellas a continuación.

Una de las propuestas que les presentamos a los alumnos para que trabajen en forma grupal fue la realización de un trabajo práctico (TP) sobre recta tangente. La consigna brindaba los enunciados de tres problemas de aplicación (como el de la Figura 1) y cada grupo debía elegir solo un problema (que les resultara interesante) para resolverlo en forma manual y luego graficarlo en un software a elección para verificar los cálculos y aprender a usar un software. Además, les anexamos un listado de software de fácil utilización y algunos comandos que podrían ser de utilidad según el software seleccionado. El archivo con la resolución del TP debían subirlo directamente al campus virtual (plataforma Moodle). En la Figura 1 se muestra el enunciado del problema más elegido por los estudiantes para realizar el TP.

Otra de las actividades propuestas a los alumnos se implementó en el año 2016 con un Trabajo Práctico Integrador e inter-cátedra. Esta actividad propuesta tuvo como objetivos la integración de temas dados en las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica (AGA) y en Análisis Matemático I (AMI), el trabajo en forma grupal por parte de los estudiantes, el uso del software GeoGebra como herramienta para facilitar la exploración y el descubrimiento mediante la representación de imágenes dinámicas que permiten la visualización y la comprensión de los conceptos utilizados, el uso del campus virtual para la entrega del mismo y la integración de los trabajos de laboratorio que son requisitos para la regularidad en ambas asignaturas.

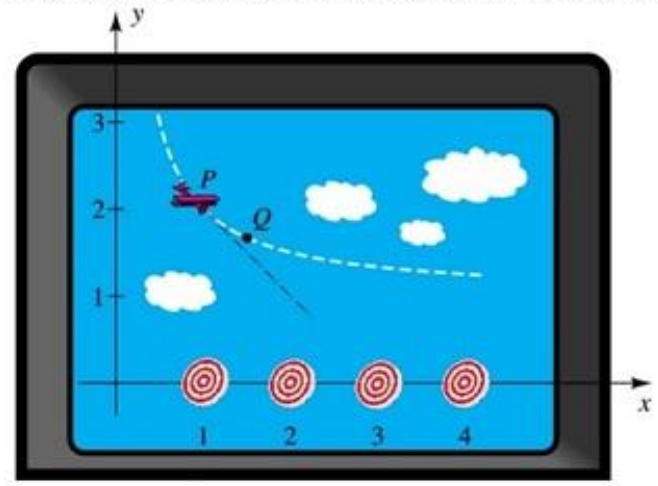
Los estudiantes recibieron las indicaciones, consignas y descripción del trabajo práctico grupal que debían realizar a través del campus virtual, donde además tenían material complementario y la posibilidad de realizar consultas mediante un foro en Moodle.

Los contenidos involucrados en esta actividad fueron: mínimos cuadrados y ajuste de curvas y aplicaciones de la derivada, como recta tangente e interpretación del Teorema de Lagrange. Los alumnos debieron subir al campus, en el plazo establecido, un informe por grupo que incluía el archivo de GeoGebra y un archivo Word con las respuestas y las conclusiones del mismo.

Esta experiencia piloto tuvo como fortaleza la integración y la cooperación de docentes de ambas cátedras que trabajaron juntos para elegir temas a evaluar, redactar las consignas del trabajo, corregir y comunicar al resto de los docentes el listado de alumnos aprobados por cada comisión; y por otro lado, los estudiantes tuvieron que trabajar en equipo, aportar datos personales como parte de las consignas del trabajo, tener claros determinados conceptos enseñados previamente en ambas asignaturas, comunicar los resultados obtenidos mediante un informe en el formato establecido, realizar la entrega de un solo trabajo de laboratorio para ambas asignaturas en lugar de dos trabajos distintos, uno para cada materia, como se venía haciendo desde años.

La idea al aplicar este tipo de TP es utilizar la tecnología como complemento de los conceptos y cálculos realizados, que es como un ingeniero la utiliza en su actividad profesional.

Video juego.
En el juego de video que se muestra en la figura, un avión vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria dada por $f(x)=1+\frac{1}{x}$ y dispara balas en la dirección tangente a dicha curva, para impactar en el centro de los blancos ubicados sobre el eje x en $x=1,2,3,4.$



a) ¿En qué punto debe estar el avión para que impacte al blanco ubicado en $x=3$? Justificar la respuesta.

b) Si el avión está en $Q(\frac{3}{2},\frac{5}{3})$, ¿su disparo impactará en algún blanco de balas? Justificar la respuesta.

c) Utilizar algún software para representar gráficamente las dos situaciones (a) y (b) presentadas en los incisos anteriores (representar la curva, la recta tangente y los puntos).

Figura 1. Enunciado de uno de los problemas del TP de recta tangente. (Adaptado y modificado por las autoras, en base al ejercicio n°65 de la página 176 del libro "Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica", Swokowski/Cole, 12ª Edición)

Utilización de software

Para aprovechar las posibilidades didácticas de las tecnologías y la agilidad del software decidimos utilizar *GeoGebra*, dado que esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ello su comprensión y permite la representación de imágenes dinámicas que facilitan la visualización y la resolución de problemas a través de las herramientas y opciones que ofrece. Este software está siendo utilizado en la actualidad por docentes de diferentes asignaturas de primer año para dar clases y, además, los alumnos lo utilizan frecuentemente en sus celulares.

Utilizar dispositivos móviles tales como teléfonos celulares y tablets en el aula, particularmente al enseñar el tema “funciones”, tiene como ventajas que el alumno puede visualizar las gráficas rápidamente, de esta manera promueve la participación y la motivación del mismo en clase y agiliza el tiempo de enseñanza.

El concepto de “función” es fundamental para un futuro Ingeniero ya que es la base para modelar situaciones reales. Reconociendo que es un concepto complejo debido a que se expresa en una multiplicidad de registros y genera diferentes niveles de abstracción y de significados, el aprendizaje del tema “funciones” es uno de los principales objetivos en la enseñanza de AMI y su importancia se debe a que es indispensable para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite, derivadas, integrales, entre otros.

Como menciona Litwin (2000), en educación, las tecnologías pueden considerarse como herramientas que permiten mostrar, ilustrar y ayudar en el proceso de comprensión de los alumnos. Para aplicar la tecnología al análisis matemático dentro del tema “funciones” se les propuso a los alumnos la siguiente actividad:}

Elegir una figura y diseñarla mediante funciones con el software *Geogebra*, identificando las funciones de su contorno, sus dominios acotados y los puntos de intersección entre las gráficas.

Esta actividad se realizó en forma grupal y debían entregar un trabajo por grupo en la fecha establecida. El archivo con la resolución del TP debían subirlo directamente al campus virtual. De los trabajos realizados por los alumnos podemos enumerar algunos objetos diseñados tales como logos de: UTN, Motorola, Windows, McDonald’s, Audi, Adidas, Batman; el símbolo del yin y yang, un pez, una mariposa, un tucán, un mouse, una copa, un mate, un helado, una llave, un velero, un corazón, la cabeza de Homero Simpson, entre otros. Todos modelados y contorneados mediante las funciones estudiadas en AMI y algunas curvas conocidas. Algunos de los archivos presentan colores y animación, lo cual los hace más atractivos y dinámicos. En las Figuras 2 a 5 presentamos algunas capturas de pantalla de los trabajos de los alumnos (las imágenes no contienen los ejes coordenados ni las cuadrículas, para que se observen con mayor claridad).

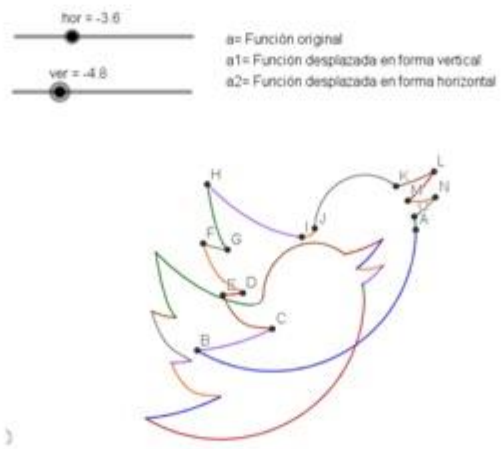


Figura 2. Logo de Twitter

Figura 3. Winnie Pooh

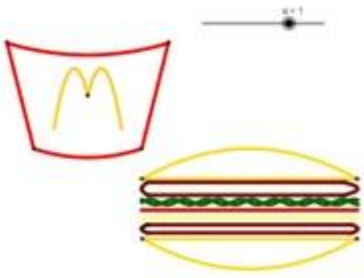


Figura 4. McDonald´s

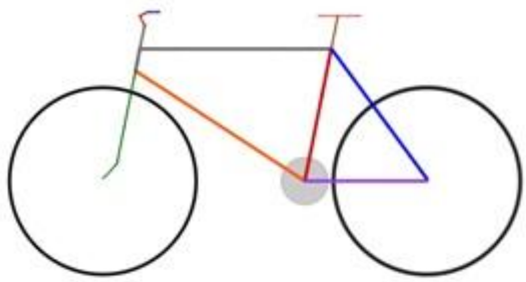


Figura 5. Bicicleta

Cuestionarios online

Para favorecer y estimular el estudio regular de los estudiantes y poder obtener un mejor rendimiento académico, nos propusimos intentar ayudarlos a auto-evaluarse antes de los exámenes parciales, sobre todo en aspectos conceptuales. Para ello, utilizamos la herramienta cuestionario de Moodle, a través de la utilización de un banco de preguntas. Las docentes creamos (configuramos) en el banco de preguntas de Moodle más de 50 preguntas (fiables y válidas) sobre los contenidos involucrados, algunas de tipo conceptual y otras de resolución práctica (similares a las de las guías de práctica de la cátedra y a preguntas de exámenes). Luego, para los alumnos, el cuestionario lo configuramos con un tiempo determinado de resolución (en general, 60 minutos), con la posibilidad de realizar 1 sólo intento por alumno y con una cantidad de preguntas (generalmente 10) para responder, seleccionadas aleatoriamente del banco de preguntas previamente elaborado por las docentes.

También hemos implementado a lo largo de los años, dentro y fuera del aula, el uso de cuestionarios online de evaluación y auto-evaluación como cierre de distintos temas de la materia, diseñados mediante la herramienta *Google Forms*.

Podemos señalar que no siempre los resultados de los cuestionarios online son los esperados por los docentes, ya sea por la falta de participación de los alumnos si el cuestionario no tiene carácter obligatorio o por las bajas calificaciones obtenidas al responder, lo que evidencia falta de estudio o de compresión de los temas dados y nos desafía, como docentes, a seguir evaluando y mejorando la implementación de estas herramientas a futuro.

Aula invertida

La experiencia se basó en aplicar a dos comisiones de la cátedra Análisis Matemático I (AMI) un enfoque metodológico-didáctico denominado "aula invertida" (*Flipped Classroom*), en un tema particular de AMI, mediado por el uso de tecnologías. Esta modalidad consiste en invertir el tiempo de instrucción directa de los contenidos (por parte del docente) al momento en que el alumno no está en clase. Los estudiantes debían adquirir determinados conocimientos, realizar actividades propuestas y completar cuestionarios a través de la plataforma del campus virtual (Moodle) antes de asistir a clase presencial. Luego, en el aula, se realizaron actividades de aplicación de los contenidos que tenían que estudiar solos, se identificaron las dificultades de aprendizaje y comprensión que surgieron, se revisaron los nuevos conceptos, se agregaron y consolidaron los conocimientos, por ejemplo, mediante la realización de mapas conceptuales en el pizarrón o en forma grupal con el objeto de organizar y comprender las ideas principales del tema nuevo de manera significativa. En las clases los alumnos trabajaron en forma grupal y colaborativa y recibieron la retroalimentación por parte de los docentes que guiaron y supervisaron la tarea de los mismos.

Los contenidos fueron presentados a los alumnos mediante la herramienta "lección" de la plataforma Moodle en el campus virtual de la FRSF. Para diseñar las lecciones en Moodle y que resulten atractivas, con formato moderno y útiles para los alumnos, se incorporaron varias herramientas online tales como *Genially*, *Can-*

va, *Prezi* y *Google Forms* que nos permitieron crear infografías, mapas conceptuales, presentaciones animadas e interactivas y encuestas de opinión.

Algunos de los materiales digitales realizados pueden observarse en los siguientes enlaces:

- https://view.genial.ly/5d483f061f10630fadca1b90/horizontal-infographic-review-extremos-de-una-funcion
- https://view.genial.ly/5d54152db6f35b10541ac240/guide-la-regla-de-lhopital
- https://view.genial.ly/5d613da6ac4b760fc1265d33/presentation-extremos-absolutos-en-el-dominio

Por ejemplo, en la Figura 6 puede observarse un mapa conceptual elaborado a partir de la herramienta digital *Canva*.

Además, utilizamos la plataforma digital Academia Khan que ofrece ejercicios de práctica y videos instructivos, y el software *GeoGebra* que fue una herramienta de gran ayuda para los docentes y para los alumnos que lo usaron en la realización de varias actividades grupales propuestas.

Al finalizar la metodología de aula invertida los alumnos debieron realizar un cuestionario online de evaluación en Moodle sobre los contenidos del tema abordado. En este cuestionario final de evaluación se obtuvo una nota promedio final de 7 (70%) en ambos cursos (con la participación de un 40-50 % del total de alumnos). Se observó que, en general, los alumnos que participaron en el cuestionario fueron los que primero vieron las lecciones al comienzo del proceso (antes de ir a clase) y participaron activamente durante toda la experiencia.

Figura 6. Mapa conceptual para el análisis de funciones. Realizado por las autoras de este trabajo.

Además, para contar formalmente con la opinión de los alumnos, diseñamos una encuesta de opinión mediante la herramienta *Google Forms*, aplicada a las dos comisiones en las que fueron implementadas las dos metodologías, la tradicional y la de aula invertida. El encabezado de la encuesta fue el siguiente:

En esta encuesta encontrarás preguntas acerca del cursado en AMI y sobre las metodologías implementadas. Te pedimos que seas sincero y respetuoso con las respuestas, ya que lo que queremos como docentes es mejorar, y nuestro objetivo siempre es ayudarlos a aprender. Muchas gracias por tu tiempo.

Respondieron voluntariamente sólo 20 alumnos de los 70-75 que cursaron con las dos metodologías. La encuesta fue diseñada con 13 preguntas que abarcaban diferentes aspectos vinculados con AMI (como nivel de conocimientos adquiridos, materiales de estudio, participación y grado de estudio de los alumnos, opinión sobre las metodologías de enseñanza, entre otros) de las cuales algunas respuestas se debían seleccionar de un listado de opciones y otras, los alumnos debían expresar su opinión por escrito. Por ejemplo, si consideramos la pregunta:

Respecto a la metodología de aula invertida aplicada en AMI, ¿qué aspectos te resultaron positivos y qué aspectos creés que tendríamos que mejorar?

Algunas respuestas (textuales) fueron las siguientes:

- *"La verdad es que desde que iniciaron el aula invertida me fue mucho más fácil estudiar y me guiaba mejor, muy buena metodología."*
- *"La propuesta me resulta interesante e innovadora. Sin embargo, me parece que es un sistema el cual no hay posibilidad de llevar a cabo al 100% en la práctica como se lo plantea en lo teórico."*
- *"Realmente no me ha funcionado el método, no he aprendido mucho ya que con solo los videos no llegaba a entender el tema, y aunque realizaba preguntas en clase, no alcanzaba para entender todo absolutamente, el método tradicional funcionaba mucho mejor en mi caso."*
- *"Me pareció muy positivo el uso de esta metodología en todos sus aspectos, por utilizar más el tiempo de clases para despejar dudas y reforzar bien los temas determinados."*
- *"Cómo mejora solamente adiciono que podrían estar todos los contenidos interactivos en el mismo formato."*

Como conclusión general de esta experiencia, la aplicación de la metodología de aula invertida con apoyo de recursos digitales fue útil para algunos alumnos (entre un 40-50% del total de alumnos que cursaron) ya que requirió de ellos mucha voluntad, seguimiento y estudio regular. Sin embargo, los materiales digitales les sirvieron a la mayoría del curso, ya que se conformaron como recursos de estudio permanente, es decir, más allá de la modalidad de aula invertida aplicada.

Consideraciones y reflexiones sobre el uso de tecnologías en el aula

Las distintas metodologías de enseñanza pueden verse favorecidas por la incorporación de las tecnologías digitales. Sin embargo, es importante destacar que el uso de estas tecnologías en educación siempre debe hacerse con un objetivo, es decir, no se trata sólo de incorporar tecnologías sino de cómo hacerlo y para qué. No todas las tecnologías son útiles para un mismo contenido, grupo de estudiantes o contexto específico. Debe ser el docente quien planifique adecuadamente el uso de los recursos digitales según los objetivos de aprendizaje.

Además, las metodologías de enseñanza y la incorporación de tecnologías deben complementarse con el modelo de evaluación adoptado. En este sentido, es fundamental poder realizar una evaluación continua que provea al alumno de una retroalimentación constante, de manera que pueda aprender y avanzar a partir de sus errores.

A continuación, presentamos algunas consideraciones importantes y reflexiones sobre el uso de tecnologías digitales en el aula de AMI, a partir de las experiencias realizadas, las cuales organizamos en fortalezas y debilidades.

Fortalezas:

- *El uso de software y herramientas digitales agilizan el proceso de enseñanza-aprendizaje*. Mediante la utilización del software GeoGebra (ya sea en clase o como tarea, tanto en sus versiones de escritorio o aplicación móvil) permitimos visualizar en forma más rápida y clara las gráficas de funciones y sus características.
- *Formación docente en herramientas y tecnologías digitales*. Es importante destacar que año a año las docentes fuimos capacitándonos, aprendiendo nuevas herramientas digitales a través de las mismas experiencias de cátedra y de cursos realizados específicamente. Es decir, la aplicación de tecnologías digitales en el aula estimula la capacitación docente, lo cual es muy importante.
- *Importancia de trabajar en forma colaborativa (personal y digitalmente)*. Tanto en el equipo docente en nuestro trabajo de preparar los materiales, diseñar y organizar las experiencias, capacitarnos, etc., como para los alumnos durante el proceso de realización de las actividades, es fundamental la participación colaborativa de todos los involucrados. Así pueden lograrse mejores resultados que en trabajos individuales.
- *Materiales digitales de consulta permanente*. Los materiales elaborados y subidos mediante plataformas digitales o disponibles en forma online sirven como recursos de consulta permanente por parte de los alumnos, ayudándolos en su proceso de aprendizaje.
- *Seguimiento más detallado del proceso de aprendizaje de los alumnos*. Principalmente con la experiencia de aula invertida, las tecnologías digitales (campus virtual) favorecen el seguimiento del docente al alumno ya que "amplían" el tiempo del cursado, es decir, docentes y alumnos nos encontramos en clase, pero también seguimos el proceso mediante las herramientas digitales, fuera de la clase.

- *Motivación de los alumnos a través de las tecnologías digitales.* Algunas de las actividades propuestas pueden motivar a los alumnos a aprender, ya sea porque la actividad les resulte "interesante" o "entretenida", como la de hacer dibujos con el software GeoGebra o bien porque puedan manejar sus tiempos de estudio y avance con los recursos digitales, como en la experiencia de aula invertida.
- *Posibilidades de evaluación mediante herramientas digitales.* El uso de cuestionarios online para evaluación y auto-evaluación puede ser una herramienta potente para la evaluación formativa, si bien requiere un diseño más detallado e incorporado al proceso que el aplicado en nuestras experiencias (las cuales fueron para casos muy puntuales). Otras ventajas de los cuestionarios online son que el alumno puede ver sus errores al finalizar el mismo y las docentes pueden tener resultados rápidamente (se auto-corrige), con estadísticas detalladas del rendimiento.

Debilidades:

- *El uso de tecnologías digitales en el aula no garantiza, por sí mismo, que los alumnos aprendan y comprendan.* Las aplicaciones digitales en la enseñanza deben hacerse con un objetivo, adaptadas al curso, a los alumnos, a la planificación, a los contenidos, a la metodología y a la evaluación. Además, debe evaluarse su implementación para analizar los resultados y poder realizar mejoras.
- *Dificultades presentadas en los alumnos en el cumplimiento de tareas.* Sobre todo en la experiencia de aula invertida los alumnos necesitaron mucho seguimiento por parte de las docentes (recordatorios, tareas, explicaciones, etc.) debido al poco tiempo que ellos dispusieron fuera de clase para ver los contenidos digitales y dificultades que presentan para comprender y organizar sus tiempos de estudio.
- *Demanda mucho tiempo de trabajo docente.* Al realizar actividades de incorporación de recursos digitales, dedicamos mucho tiempo a la planificación del proceso, a la elaboración de materiales, a realizar un banco de preguntas online para los cuestionarios, a elaborar las encuestas de opinión, al seguimiento de los alumnos (planificar las actividades, corregirlas, dar una retroalimentación, enviar recordatorios, etc.).
- *El uso de software debe complementarse con la comprensión de conceptos.* Si bien el software GeoGebra, en este caso, facilita, agiliza y clarifica muchos temas, es el usuario el que debe conocer los conceptos fundamentales para poder interpretar el software y poder resolver problemas a partir del mismo.

Finalmente, queremos destacar que los resultados obtenidos nos sirven para seguir mejorando el proceso de enseñanza y aprendizaje, buscando favorecer con nuestras prácticas docentes y el apoyo de las tecnologías digitales, la comprensión de conceptos por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Burbules, N. y Callister, T. (2008). *Educación: Riesgos y promesas de las nuevas tecnologías de la Información*. Buenos Aires, Argentina: Granica.

Castro-García, D., Olarte Dussán, F. y Corredor, J. (2016). Technology for Communication and Problem Solving in the Classroom. Effects on Meaningful Learning. *Digital Education Review*, (30), 207-219.

Litwin, E. (2000). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente: del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*. Barcelona, España: Gedisa.

Stone Wiske, M. (comp.) (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Barcelona, España: Paidós.

Enriqueciendo los procesos de aprendizaje en probabilidad y estadística a través de autoevaluaciones en Moodle

DIANA RAQUEL KOHAN

dikohan@ingenieria.uner.edu.ar

MARISA BATTISTI

Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Entre Ríos

Resumen

Probabilidad y Estadística es una asignatura de segundo año de las carreras de Bioingeniería, Licenciatura en Bioinformática e Ingeniería en Transporte de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos. A lo largo del cursado, los estudiantes son evaluados con cinco pruebas breves escritas llamadas “parcialitos” que versan sobre temas desarrollados tanto en teoría como en práctica.

En cuatrimestres anteriores, hemos notado que el estudiante muestra escaso interés por ver las correcciones que el docente realiza sobre los parcialitos, viendo que incurre en los mismos errores al rendir instancias de evaluación posteriores. Para revertir esta situación, en el segundo cuatrimestre de 2019 reemplazamos los parcialitos por una serie de “autoevaluaciones” en Moodle, caracterizadas por su calificación y retroalimentación inmediata.

Como consecuencia, observamos un aumento considerable de los alumnos que lograron promocionar la asignatura respecto de lo ocurrido años atrás. Este hecho se traduce en que un 60% no necesitó rendir examen final para la aprobación de Probabilidad y Estadística en el pasado cuatrimestre.

Pretendemos continuar con la propuesta y efectuar un análisis detallado de los errores cometidos, evaluando los obstáculos que pudieron presentarse a la hora de responder las preguntas del instrumento, para mejorarlo y volver a implementarlo en el presente cuatrimestre.

Motivación

La asignatura Probabilidad y Estadística corresponde al segundo cuatrimestre del segundo año común de las carreras de Bioingeniería, Licenciatura en Bioinformática e Ingeniería en Transporte ofrecidas por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos (U.N.E.R.). A lo largo del cursado de la materia, los estudiantes son evaluados por medio de 5 (cinco) "parcialitos" durante clases de práctica, cuya duración no supera los 15 minutos y que versan sobre temas desarrollados en las clases de teoría y de práctica. Una de las condiciones de regularidad fijada para la materia es la aprobación de al menos 3 (tres) de los 5 (cinco) "parcialitos", debiendo participar de al menos 4 (cuatro) de ellos.

Los parcialitos constituyen un instrumento que forma parte de un proceso de evaluación continua y formativa, el cual persigue el objetivo fundamental de que el estudiante se mantenga al día con las unidades de la asignatura, permitiendo la detección a tiempo de falencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje y el accionar en consecuencia de ambos protagonistas. Del equipo docente, el cual realiza una intervención didáctica si determinados conceptos no fueron asimilados de manera correcta, y del estudiante, quien tiene que reparar sobre los errores y reforzar los contenidos implicados para lograr un aprendizaje significativo de la totalidad de los temas.

En este sentido, los parcialitos intentan ser una herramienta de diagnóstico de los aprendizajes adquiridos, caracterizada por su progresividad y su desarrollo previo a los tradicionales parciales teórico-prácticos de la asignatura.

La implementación de este instrumento de evaluación, comenzó en el segundo cuatrimestre de 2015 y continuó incorporándose en ambos cuatrimestres de los años siguientes de manera ininterrumpida.

En cuatrimestres anteriores, hemos notado que el estudiante muestra escaso interés por ver las correcciones que el docente realiza sobre los parcialitos, observándose que vuelve a cometer los errores detectados en estas pruebas en los exámenes parciales o finales que rinde con posterioridad. Este comportamiento no nos permite cumplir con el objetivo para el cual fueron incorporados.

Para revertir esta situación brindamos un espacio de evaluación continua en la plataforma Moodle instrumentando autoevaluaciones, que se caracterizarán por su calificación y retroalimentación inmediata, reemplazando los actuales "parcialitos".

Con este objetivo, confeccionamos un banco de preguntas en el aula virtual de la asignatura y armamos cinco cuestionarios a modo de autoevaluación. Los estudiantes accedieron a estas autoevaluaciones en fechas pautadas, y las resolvieron desde su propio teléfono móvil conectado a la red wi-fi de la FIUNER dentro del aula.

A partir de esta propuesta, deseamos incrementar tanto los niveles de compromiso como los de responsabilidad de los estudiantes durante el proceso de asimilación de los contenidos de la asignatura. Además, propiciamos más oportunidades para que los alumnos puedan observar sus errores con facilidad, y en forma inmediata, para luego recurrir a sus apuntes o a los espacios de consulta, con el fin de lograr una adquisición correcta de los contenidos abordados.

Esta propuesta fue llevada a cabo en el marco de un Proyecto de Innovación e Incentivo a la Docencia titulado Autoevaluaciones en Probabilidad y Estadística: Fomentando un Continuo Seguimiento de los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje, implementado durante el segundo cuatrimestre de 2019.

Fundamentación

Con frecuencia, se habla de la integración de las tecnologías en las aulas en todos los niveles educativos, entendiendo que las Tecnologías para la Información y la Comunicación (TIC) pueden contribuir a mejorar las tareas de enseñanza y aprendizaje. Entre las virtudes de su utilización se encuentran la facilitación de la implementación de diversas prácticas de retroalimentación y evaluación mediadas por tecnologías, en intrínseca relación con la simpleza en la generación, expansión y vigorización de redes humanas de aprendizaje y colaboración (Libedinsky, 2016).

Añadimos que las TIC pueden ser no solo empleadas para difundir material didáctico sino también para enriquecer las metodologías de enseñanza y evaluación, bajo la fuerte concepción que "la evaluación en lugar de considerarse como actividad terminal llevada a cabo bajo supervisión estricta debe entenderse como una actividad de aprendizaje que facilite la retroalimentación y permita la toma de decisiones correctivas oportunas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje" (Urbina Nájara, Medina Nieto y Gracía, 2013, p.52). Como afirman Arocena, Gascue y Leymonie (2010), la evaluación no debe ser percibida por los actores involucrados como un suceso de culminación, sino como un componente inmerso en el proceso de aprendizaje (citado en Álvarez, Hernández y Romero, 2017). Coincidimos en que las autoevaluaciones incorporadas durante el cursado pueden ayudar al estudiante a fortalecer su proceso de asimilación de los contenidos, guiando al alumno e informando al cuerpo docente respecto de su práctica formativa (Álvarez, Hernández y Romero, 2017).

Actualmente, “la disponibilidad de plataformas virtuales de enseñanza ha transformado el escenario habitual de la docencia en la Universidad en los últimos años” (Benítez Márquez, Cruces Pastor y Sarrión Gavilán, 2011, p. 1).

En la asignatura la plataforma virtual es ávidamente utilizada para fomentar la comunicación con los estudiantes, y es un espacio de almacenamiento de la información y los materiales empleados durante el cursado presencial facilitando la tarea de aprendizaje.

No obstante, para la elaboración de instrumentos de evaluación, se cree que resulta valioso explotar las potencialidades de la plataforma Moodle pues permite “crear cuestionarios con diferentes tipos de preguntas, adaptados a los objetivos específicos de cada una de las etapas del proceso de enseñanza y aprendizaje, que proporcionan un retorno de información automático y rápido (…)” (Blanco y Ginovart, 2012, p. 169). Las autoras destacan además la utilidad de este recurso para desarrollar actividades de evaluación que le brindan al docente la oportunidad de modificarlas y adaptarlas según las necesidades del estudiantado.

Una característica de la evaluación virtual es su versatilidad explicada claramente por Daly et al. (2010): “por un lado, utiliza el retorno de información formativamente para adaptar sus concepciones y su forma de enfocar las tareas, y por el otro, le sirve al profesor para adaptar el trabajo a las necesidades de sus alumnos” (citado en Blanco y Ginovart, 2012, p. 169).

El denominado “retorno de la información” es concebido en la retroalimentación en tiempo real que el docente puede incluir en las preguntas además de la calificación de la respuesta automática. Un aporte que se destaca especialmente es

> […] la inmediatez de la visualización de la respuesta correcta hecho que es muy importante para el estudiante, pero también para el profesor porque la retroalimentación descansa en ella. La respuesta automática se puede igualar a esa presencia docente en la cual el profesor valida el contenido de lo que el estudiante ha contestado (Urbina, Medina y Vargas, 2013, p.57).

Este aspecto de la evaluación propuesta aportará resultados rápidos y oportunos al educando, en donde cada uno de sus protagonistas conocerá el estado de su progreso en el propio proceso de aprendizaje.

A posteriori de la realización y la implementación de los instrumentos de evaluación en Moodle, la plataforma otorga herramientas para llevar a cabo un análisis psicométrico que es, en palabras de Heck y Van Gastel (2006) “una gran herramienta que permite evaluar la fiabilidad de los cuestionarios como instrumentos de medición de desempeño, actitud y habilidades de los alumnos” (citado en Blanco y Ginovart, 2012, p.174).

Metodología

Para la confección de este instrumento desarrollamos un banco de preguntas en el aula virtual de la asignatura con consignas sencillas, similares a las de los parcialitos evaluados en cuatrimestres anteriores.

Estas consignas son de diferentes tipos: opción múltiple, verdadero o falso, respuesta numérica y de respuesta corta, con la finalidad que los alumnos adquieran diferentes habilidades. Cada una cuenta con una retroalimentación acorde, que el estudiante recibe como devolución en tiempo real en el momento de la calificación automática de la prueba.

Empleamos la herramienta “cuestionario” que ofrece Moodle para generar las autoevaluaciones virtuales. Estructuramos cinco autoevaluaciones con tres consignas cada una, recogiendo aspectos teóricos y prácticos de las unidades temáticas abordadas en la asignatura (Tabla 1).

Cuestionario	Unidad temática
Autoevaluación 1	1. Introducción a la probabilidad
Autoevaluación 2	2. Variables aleatorias unidimensionales 3. Variables aleatorias bidimensionales 4. Características de las variables aleatorias
Autoevaluación 3	5. Algunas variables aleatorias discretas 6. Algunas variables aleatorias continuas
Autoevaluación 4	7. Suma de variables aleatorias 8. Muestras y distribuciones muestrales 9. Estimación de parámetros
Autoevaluación 5	10. Pruebas de hipótesis

Tabla 1. Distribución de las autoevaluaciones en el desarrollo de los contenidos

Para cada una de las consignas de las autoevaluaciones cargamos algunas variantes. En cada instancia, el armado del cuestionario fue al azar. Por ejemplo, en la autoevaluación 1, hubo 4 variantes de la primera consigna, 4 variantes de la segunda y 4 de la tercera, lo que dio lugar a 64 cuestionarios diferentes, reduciendo la posibilidad de copia de resultados entre los estudiantes al momento de rendir la prueba en el aula.

Antes de la primera autoevaluación, generamos un cuestionario que llamamos "simulacro de la autoevaluación 1" para que los estudiantes conocieran la herramienta, accediendo al mismo fuera del horario de clase, y tantas veces como lo desearan.

A modo de ejemplo, mostramos en la Figura 1 dos de las preguntas de la "Autoevaluación 1" con las correspondientes retroalimentaciones que visualizó el estudiante y, en la Figura 2, exhibimos la impresión de la realización de un estudiante en la "Autoevaluación 2".

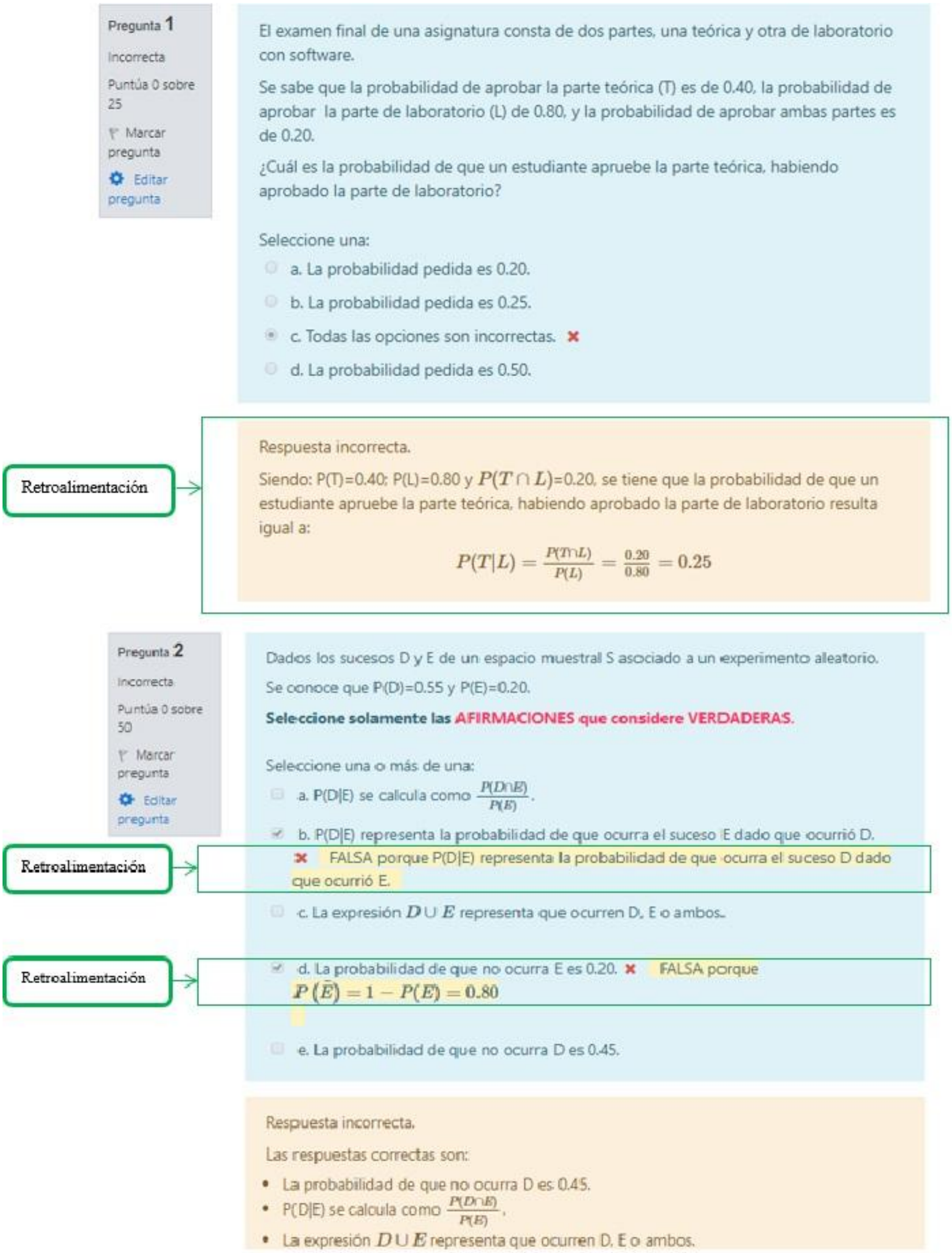


Figura 1. Ejemplos de dos consignas con retroalimentación correspondientes a la Autoevaluación 1

Durante el segundo cuatrimestre de 2019, 58 estudiantes cursaron la asignatura, accediendo a las autoevaluaciones en fechas pautadas y las resolvieron, dentro del aula y desde su propio teléfono móvil conectado a la red wi-fi de la facultad en, a lo sumo, diez minutos durante la clase.

Comenzado el	martes, 10 de septiembre de 2019, 17:34
Estado	Finalizado
Finalizado en	martes, 10 de septiembre de 2019, 17:42
Tiempo empleado	7 minutos 35 segundos
Calificación	**54,00** de 100,00

Pregunta **1**
Parcialmente correcta
Puntúa 28,00 sobre 40,00
Editar pregunta

Considere la variable aleatoria X cuya distribución de probabilidades se encuentra tabulada a continuación.

x	1	3	5	7
$f(x)$	0,30	k	0,18	0,12

Seleccione solamente las AFIRMACIONES que considere VERDADERAS.

Seleccione una o más de una:

- a. La variable aleatoria X es continua.
- b. k=0,40
- c. La variable aleatoria X es discreta. ✓
- d. P(X≤3)= f(3)
- e. P(X>5)=0,12 ✓
- f. k=0,60

Respuesta parcialmente correcta.

Ha seleccionado correctamente 2.

Las respuestas correctas son:

- La variable aleatoria X es discreta.
- k=0,40
- P(X>5)=0,12

Pregunta **2**
Incorrecta
Puntúa 0,00 sobre 20,00
Editar pregunta

Suponga que el tiempo, en minutos, que una persona debe esperar para ser atendido un día domingo en la guardia de un sanatorio, tiene la función de densidad de probabilidad $f(x) = \frac{2x-20}{900}$ con 10<x<40.

¿Cómo calcula la probabilidad de que la espera no supere los 15 minutos?

Seleccione una:

- a. $\int_{10}^{15} F(x)dx$

  ✗ Recordar que debe integrarse la función de densidad de probabilidad.
  La probabilidad pedida se calcula como:
  $P(X \leq 15) = \int_{10}^{15} \frac{2x-20}{900} dx$.

  Caso contrario la probabilidad pedida puede calcularse como: $P(X \leq 15) = F(15)$.
- b. $\int_{10}^{15} \frac{2x-20}{900} dx$
- c. $\int_{0}^{15} \frac{2x-20}{900} dx$
- d. $\int_{15}^{40} \frac{2x-20}{900} dx$

Pregunta **3**
Parcialmente correcta
Puntúa 26,00 sobre 40,00
Editar pregunta

Sean las constantes a y b, las variables aleatorias X y Y con función de probabilidad conjunta f(x,y), y funciones marginales g(x) y h(y) respectivamente.

Seleccione solamente las AFIRMACIONES que considere VERDADERAS.

Seleccione una o más de una:

- a. $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$
- b. X y Y son variables aleatorias independientes ⇔ $f(x,y) = g(x).\,h(y)$, $\forall (x,y) \in R_{XY}$ ✓
- c. $E(aX+b) = aE(X) + b$ ✓
- d. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
- e. $E(aX+b) = a^2E(X)$

  ✗ FALSA porque $E(aX+b) = aE(X) + b$.

Figura 2. Impresión de la Autoevaluación 2 realizada por un estudiante

Figura 3. Primera autoevaluación desarrollada el 20 de agosto de 2019

Configuramos la plataforma de manera tal que cada uno de los cuestionarios es catalogado automáticamente como Aprobado si el puntaje de respuestas correctas es de al menos 40 puntos o Desaprobado en caso contrario, manteniendo como uno de los requisitos de regularidad la aprobación de tres de las cinco autoevaluaciones, habiendo realizado presencialmente al menos cuatro de ellas.

Resultados

En la Tabla 2 mostramos un breve resumen del desempeño de los estudiantes en las autoevaluaciones. Además, en la Figura 4 exhibimos las distribuciones de las calificaciones en cada una de las pruebas.

Número de autoevaluación	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Semana en que fue evaluada	3	6	7	11	13
Cantidad de estudiantes	48	48	49	39	45
Promedio de calificaciones	85,21	78,58	53,94	75,18	64,44
Desvío estándar de calificaciones	17,45	17,95	18,44	21,86	28,49
% de aprobados	97,92	97,92	85,71	94,87	82,22

Tabla 2. Resumen del desempeño de los estudiantes en las autoevaluaciones

Dado que en el segundo cuatrimestre de 2018 el dictado de la asignatura fue atípico por la medida de fuerza docente llevada a cabo, efectuamos la comparación entre los segundos cuatrimestres de 2019 y 2017.

Del análisis de la Tabla 3, observamos que el porcentaje de promocionales en 2019 ha sido de 63.3% respecto de 45.9% en 2017, y luego de aplicar el test estadístico correspondiente, concluimos que la proporción de promocionados al finalizar el cuatrimestre ha aumentado en 2019 respecto de 2017 (Test Z para comparación de dos proporciones; p-value=0.055).

		Condición final		
		Promocionales	Regulares	Libres por parciales
Año	2017 (Parcialitos)	17	15	5
	2019 (Autoevaluaciones en Moodle)	31	11	7

Tabla 3. Resumen del desempeño de los estudiantes en las autoevaluaciones

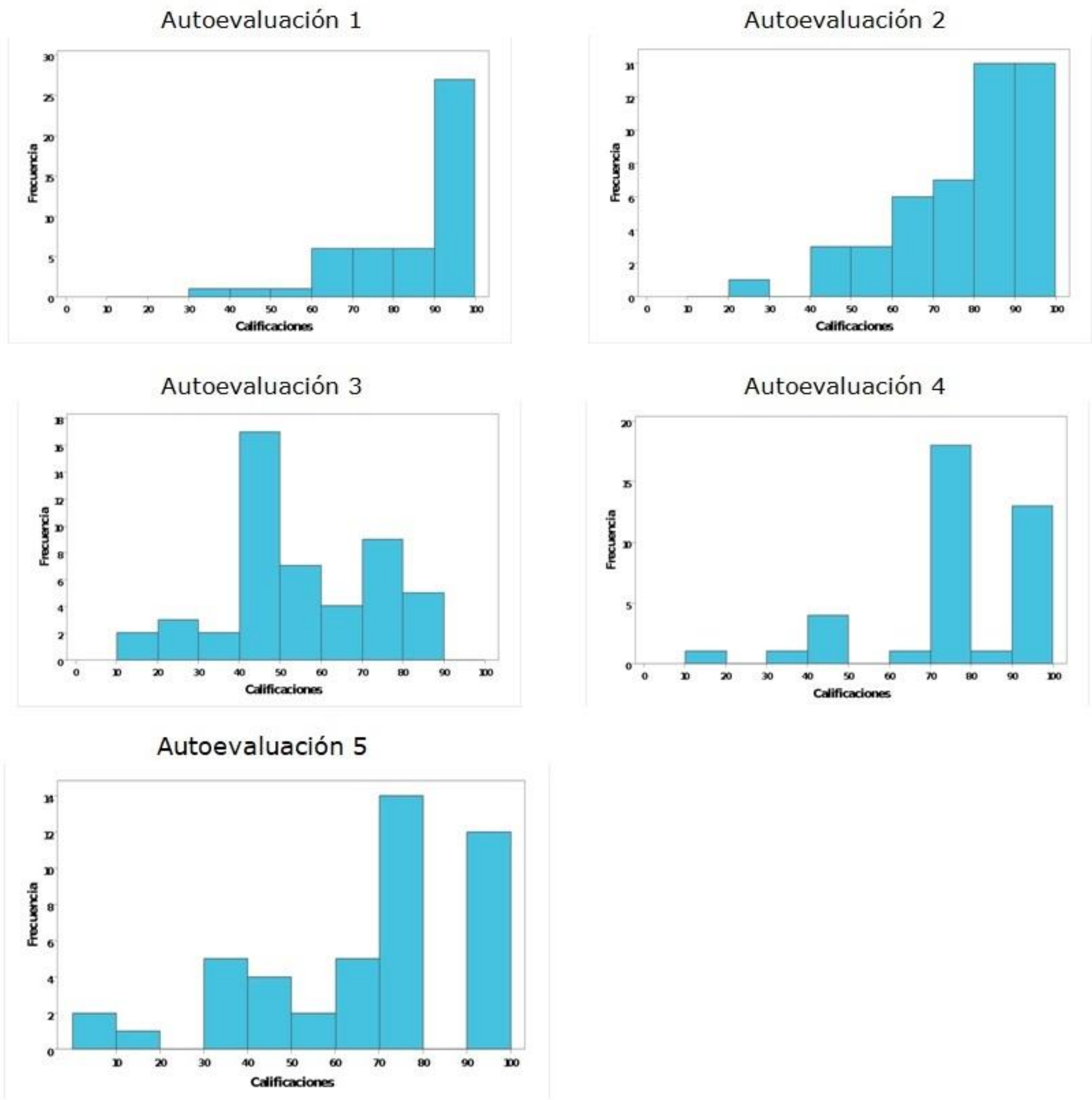


Figura 4. Distribuciones de las calificaciones obtenidas por los estudiantes

Discusión y conclusión

La incorporación de las autoevaluaciones virtuales con las correspondientes retroalimentaciones permitió a los estudiantes observar los errores, en caso de haberlos cometido, en forma inmediata. Emplearon los horarios de consultas para despejar sus dudas, reparando sobre su propio proceso de asimilación de los contenidos. Las autoevaluaciones contribuyeron al aprovechamiento de este espacio que semanalmente la cátedra pone a su disposición.

En el segundo cuatrimestre de 2019, año en el que implementamos la experiencia, hubo un aumento considerable de alumnos que lograron promocionar la asignatura respecto de lo ocurrido en el mismo cuatrimestre de 2017. Este hecho se traduce en que un 60% no necesitó rendir examen final para aprobar la asignatura en el pasado cuatrimestre. Sin embargo, no podemos asegurar que este aumento sólo sea consecuencia de la metodología de autoevaluaciones incorporadas.

Entendemos que la plataforma Moodle puede ser utilizada para la evaluación formativa y ofrece, como valor agregado, datos estadísticos acerca de la eficiencia y pertinencia de los cuestionarios por consigna, de manera total y parcial. Por ende, pretendemos continuar con la propuesta y efectuar un análisis detallado de los errores cometidos, evaluando los obstáculos presentados a la hora de responder las preguntas del instrumento, para su mejora y nueva implementación.

Valoramos la importancia de efectuar esta revisión para enriquecer las estrategias utilizadas y mejorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Álvarez, Y., Hernández, E. y Romero, G. (2017). Utilidad de herramientas Moodle para la meta-evaluación. *Eduweb, 11*(1), 41-54.

Benítez Márquez, M., Cruces Pastor, M. y Sarrión Gavilán, M. (2011). El papel de la plataforma virtual de enseñanza en la docencia presencial de asignaturas de estadística. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, *4*(1), 1-12.

Blanco, M. y Ginovart, M. (2012). Los cuestionarios del entorno Moodle: su contribución a la evaluación virtual formativa de los alumnos de matemáticas de primer año de las titulaciones de Ingeniería. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, *9*(1), 166-183.

Libedinsky, M. (2016). *La innovación educativa en la era digital*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Urbina Nájara, A., Medina Nieto, M. y Gracía, V. (2013). Uso de Moodle para evaluar competencias cognitivas en ciencias exactas. *Educere. La revista venezolana de educación*, *17*(56), 51-58.

Eje 4
Educación matemática en la formación de profesores de matemática

Caracterización del modelo epistemológico dominante en torno a la divisibilidad en los libros de texto escolares

MAYRA MUÑOZ VENEGAS
mayranqn90@gmail.com
FEDERICO OLIVERO
MARÍA LAURA SANTORI
Universidad Nacional del Comahue

Resumen

En este trabajo de investigación presentamos la primera etapa de estudio de una tesis de maestría centrada en la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) para el profesorado de matemática en torno a la divisibilidad.

El objetivo principal de este trabajo es dar a conocer algunas conclusiones con respecto a la caracterización del modelo epistemológico dominante (MED) que se puede evidenciar en los libros de texto de primaria y secundaria. Este análisis tiene como finalidad detectar fenómenos didácticos que emergen de los diferentes niveles de completitud de las organizaciones matemáticas propuestas, como un primer paso en la elaboración del MER. Para el desarrollo y análisis de este trabajo nos apoyamos en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En particular consideramos los Indicadores de completitud propuestos por Cecilio Fonseca y Catarina Lucas (Fonseca, 2004; Lucas, 2010).

Introducción

Este trabajo es el inicio de una investigación en el marco de la maestría Enseñanza de Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue, que tiene como finalidad la elaboración de un modelo epistemológico de referencia (MER) alternativo para el estudio de la divisibilidad en el conjunto de los números enteros. Como primer paso intentaremos caracterizar el modelo epistemológico dominante (MED) de la divisibilidad en la escuela secundaria y, dialécticamente necesaria, en la formación de profesores. Para esto comenzaremos con una exploración de libros de textos de secundaria a fin de recabar información que nos permita caracterizar las organizaciones matemáticas (OM) presentes, las relaciones entre ellas y las prácticas matemáticas asociadas a las mismas que se privilegian en la escuela secundaria en nuestra región.

Para llevar a cabo la exploración en los libros de texto se formularon cinco conjeturas que permiten analizar el grado de completitud de las OM propuestas (Fonseca, 2004; Lucas, 2010) y por cada conjetura, una específica para las OM que comprenden la divisibilidad. Las OM consideradas son las construidas en torno a: búsqueda de múltiplos y divisores, cálculo del máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM), uso de los criterios de divisibilidad, aplicaciones del algoritmo de la división y del teorema fundamental de la aritmética (TFA). Estas OM se eligieron en función de lo establecido por los diseños curriculares de Neuquén (Ministerio de Educación Provincia del Neuquén, 2018), Río Negro (Ministerio de Educación y Derechos Humanos Río Negro, 2017) y los núcleos de aprendizajes prioritarios (NAP) (Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, 2006) del sistema educativo argentino. Si bien el TFA no aparece explícitamente en las currículas oficiales, consideramos oportuna su incorporación puesto que proporciona un elemento tecnológico-teórico imprescindible y se encuentra implícito en los libros de texto.

Marco teórico

El marco teórico adoptado para este trabajo de investigación es el de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Chevallard 1999, 2007, 2013).

Para analizar la actividad matemática institucionalizada, la TAD propone un modelo epistemológico general de la matemática que describe el saber matemático en términos de praxeologías (u organizaciones matemáticas) institucionales (Chevallard 1999). La noción de praxeología permite considerar al mismo tiempo y, atribuyéndole importancia equivalente, tanto la dimensión teórica como la dimensión práctica del saber. Una praxeología designa la unión de un bloque práctico-técnico, formado de un tipo de tareas T y de una técnica para resolver las tareas del tipo T, con un bloque tecnológico-teórico constituido de una tecnología θ que justifique la técnica y de una teoría Φ que justifique la tecnología θ.

De manera más explícita decimos que, como toda obra humana, una organización matemática (en adelante OM) surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas. Más precisamente, las OM son el resultado final de una actividad matemática que, como en toda actividad humana, concisamente, es posible distinguir dos aspectos inseparables:

- El nivel de la práctica o praxis o del "saber hacer", que engloba un cierto tipo de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos. Consta de tipos de tareas o de problemas y de técnicas o maneras de hacer sistemáticas y compartidas, en cierta institución, que son útiles para realizar las tareas. Este primer bloque se denomina bloque práctico-técnico. Las tareas o tipos de tareas no son datos que nos proporciona la naturaleza, éstos son "obras" que provienen de cierta construcción institucional y cuya reconstrucción en cierta institución es un objeto de estudio de la didáctica. Lo mismo puede decirse del resto de componentes de las praxeologías.

- El nivel del logos o del "saber", en el que se sitúan los discursos razonados sobre la práctica que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, y que recibe el nombre de tecnología. Dentro del "saber" se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación que se denomina teoría. Desarrollando un papel similar que la tecnología hace para las técnicas, la ahora llamada teoría lo hace para la tecnología.

Las tareas problemáticas o cuestiones asociadas a una OM acaban cristalizando en uno o más tipo de problemas, generados por el desarrollo de la actividad matemática del estudio de las cuestiones iniciales. En general, podemos decir que si un tipo de problemas es considerado en cierta institución es porque en la institución existe una técnica matemática que permite, no sólo resolver estos problemas, sino también generar muchos más del mismo tipo (Lucas, 2010).

Las organizaciones (o praxeologías) matemáticas más elementales se llaman puntuales y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una OM se obtiene por integración de cierto conjunto de OM puntuales, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico θ, diremos que tenemos una OM local caracterizada por dicha tecnología θ.

Una OM local permite plantear y resolver problemas (o, al menos, responder ante ellos) que en las OM puntuales iniciales no podían formularse con toda propiedad. Resulta, por tanto, que estas nuevas cuestiones problemáticas deberían constituir la "razón de ser" que dan sentido a la OM local. (Chevallard, 1999). Aunque en la TAD se habla también de OM "regionales" y "globales", en este trabajo no iremos más allá del análisis de una OM "local" que vive en la Enseñanza Secundaria: la que se estructura en torno a la divisibilidad.

En la TAD, los procesos de modelización se entienden como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente, que deben partir de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se quieren construir.

En diversas investigaciones (Fonseca, 2004; Lucas 2010) se pone de manifiesto una extraordinaria rigidez en la enseñanza secundaria de las matemáticas. Se plantea que los alumnos tienen problemas con la nomenclatura, manejan una sola técnica, no son capaces de distinguir entre tarea directa y tarea inversa, no interpretan las técnicas y, lo que es más importante, tienen una extraordinaria dificultad para trabajar con tareas abiertas. Todo ello provoca una incompletitud de la actividad matemática desarrollada y una desarticulación de las matemáticas escolares.

La respuesta a esta problemática fue la creación de un nuevo dispositivo didáctico, situado dentro de la ingeniería didáctica: "Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas (OMLRC)", que posibilita la conexión entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria (Fonseca, 2004). Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores. En este trabajo nos guiaremos de los indicadores referidos por Cecilio Fonseca, (2004), y Catarina Lucas (2010) para medir el grado de completitud de una organización matemática Local

Para estudiar un ámbito matemático dentro de la TAD es necesario describir y dar una interpretación de lo que, como investigadores, vamos a considerar dentro de ese ámbito matemático y que constituirá el modelo epistemológico de referencia (MER). La elaboración de ese MER es el primer paso necesario para construir el problema de investigación, y no constituye un modelo en el sentido normativo del término, sino que es una herramienta del trabajo teórico-experimental y, como tal, es siempre provisional, permanentemente puesto a prueba a partir de su contraste con la realidad que se investiga. Su explicitación forma parte de la dimensión epistemológica de los procesos de investigación y es considerada fundamental (Gascón, 2011).

Para elaborar el MER en torno a cierta praxeología (en cierta institución) es necesario explicitar el modelo epistemológico dominante (MED), a menudo implícito, que se "impone" a los sujetos de la institución y que tiene una importancia didáctica crucial, puesto que determina lo que se entiende por "enseñar y aprender matemáticas" dentro de dicha institución. Además, el MED de cierto ámbito del saber matemático enseñado (en una institución determinada) condiciona fuertemente no sólo el tipo de actividades matemáticas que será posible llevar a cabo en dicha institución en torno al ámbito matemático en cuestión, sino también las correspondientes actividades didácticas que se materializan en un modelo docente. En consecuencia, la emancipación epistemológica comporta, en cierta medida, la emancipación respecto del MED en la institución, lo que proporciona autonomía para cuestionarlo y para proponer otros modelos docentes alternativos.

Desarrollo

Como dijimos anteriormente, para caracterizar el MED de la divisibilidad en la escuela secundaria comenzaremos con el análisis de libros de textos escolares.

Elección de los libros de texto en la escuela secundaria

Inicialmente, para establecer en qué años del nivel secundario se estudia explícitamente la divisibilidad, efectuamos un abordaje de los programas oficiales del nivel secundario, en particular analizamos los núcleos de aprendizaje prioritarios dispuestos por nación, y los diseños curriculares de Río Negro y Neuquén.

Una vez establecidos los cursos en los que se propone estudiar divisibilidad pasamos a la elección de libros de texto. Los libros utilizados para el estudio de las características de las OM en torno a la divisibilidad fueron elegidos y clasificados teniendo en cuenta dos categorías:

- Los libros de tipo A: son libros utilizados frecuentemente en las escuelas de Río Negro y Neuquén según análisis de programas anuales cedidos por los docentes, encuesta realizada a docentes y a las principales librerías sobre los libros más vendidos en los últimos dos años.

-Los libros de tipo B: son incluidos en este análisis debido a que sus autores y coordinadores de edición tienen una amplia trayectoria y reconocimiento a nivel nacional en Didáctica de la Matemática. Además son libros calificados positivamente por el grupo de investigación dada su propuesta didáctica y su adecuación a los NAP

La siguiente tabla (Tabla 1) muestra los libros organizados por las categorías mencionadas y además por la etapa educativa a la que corresponden, 7° grado correspondiente al último año de la escuela primaria y 1° y 2°de la escuela secundaria.

	Tipo A		**Tipo B**	**Año**
7°	Matemática I- Pablo Effenberger-Kapelusz	2013	Hacer Matemática Juntos – Carmen Sessa- Estrada	2018
1°	Activados 1 –Versión para el docente - Puerto de Palos	2013	½ Hacer Matemática – Carmen Sessa	2015
2°	Activados 2 –Versión para el docente – Puerto de Palos	2013	2/3 Hacer Matemática Carmen Sessa.	2017

Tabla 1. Libros de textos de nivel primario y secundarios utilizados para el análisis

De modo general, los libros del tipo A de 1° y 2° año destinan una sección del capítulo de números naturales (o enteros) al tema a estudiar (la divisibilidad) y la estructura de 7° a 2° año se repite, presentando la definición de múltiplo y divisor, una lista con los criterios de divisibilidad, definición de números compuestos y primos, factoreo y por último cómo utilizar la técnica de factoreo para la búsqueda del MCD y el MCM. Continuo a cada presentación se detallan una serie de ejercicios en su mayoría de aplicación de las técnicas mencionadas.

En cambio, la estructura de los libros del tipo B destinan un capítulo completo al tema múltiplos y divisores y comienzan en cada uno con una serie de problemas para introducir el tema y recuperar organizaciones matemáticas estudiadas en años anteriores. Cabe destacar que el foco gira en torno a los problemas y al finalizar un conjunto de problemas se institucionalizan algunas definiciones o se pone a la luz la variedad de técnicas que fueron utilizadas durante el desarrollo de las actividades.

Indicadores para el análisis del grado de completitud de la OM

Para analizar el grado de completitud de las OM en torno a la divisibilidad de números enteros se consideraron las siguientes conjeturas que se usaron como indicadores del grado de completitud basados en los propuestos por Cecilio Fonseca

(2004) y Catarina Lucas (2010). A partir de estas conjeturas, analizamos los libros de textos mencionados anteriormente, lo que nos permitió llegar a las conclusiones que se detallan a continuación.

C1. Las tareas no permiten explorar la potencialidad y el real funcionamiento matemático de las técnicas.

En particular para el análisis de esta conjetura se buscaron tareas relacionadas a las siguientes técnicas:

- Uso de los Criterios de divisibilidad
- Uso del Algoritmo de la división
- Descomposición en factores primos (TFA)

Se tratará de dar respuesta a las siguientes preguntas (Tabla 2):

C11	¿Qué tipo de tareas permiten reflexionar sobre la potencialidad del uso de los criterios de divisibilidad, más allá de su mera aplicación?
C12	¿Qué tipos de tareas permiten reflexionar sobre la pertinencia y potencialidad del uso del algoritmo de la división?
C13	¿Qué tipo de tareas permiten reflexionar sobre la pertinencia, potencialidad y economía del TFA?

Tabla 2. Preguntas relacionadas a la conjetura 1

Conclusión 1

En los libros de tipo A podemos decir que no encontramos tareas que permitan reflexionar sobre la potencialidad de las técnicas analizadas para C11, C12 y C13. En estos libros, podemos asegurar que el trabajo gira en torno a la aplicación de las técnicas, sin ningún tipo de cuestionamiento sobre su uso. Además, tampoco se reconoce la presencia de la tecnología que las explica y justifica.

En cambio, en los libros del tipo B respecto a C11, se observa un trabajo genuino para establecer algunos criterios de divisibilidad. Este trabajo se centra en la descomposición en sumas y multiplicaciones de un número, las cuales permiten comprender cómo surgen los criterios aportando una nueva técnica que resulta útil para cualquier número en general y no sólo para unos pocos. En cuanto a C12, las tareas propuestas permiten poner en funcionamiento el algoritmo de la división en diferentes sentidos: como técnica para determinar si un número es divisor (múltiplo) de otro, como algoritmo de la división propiamente dicho, determinando divisor, dividendo, cociente y resto, como modelo algebraico introduciendo la letra como variable, entre otros. Destacamos que este tipo de tareas lleva a establecer estrechas conexiones entre el algoritmo de la división, las expresiones equivalentes y la letra como variables a partir de un contexto envuelto en la divisibilidad. Habitualmente, en la escuela, son temas abordados en forma individual y aislada, dejando en manos del estudiante la tarea de relacionarlos entre sí de manera espontánea. En cuanto a C13, en los libros del tipo B, podemos decir que tampoco se observa un trabajo genuino en torno al TFA.

En la serie de libros analizados se puede observar que los tipos de tareas aportan un camino apropiado para el análisis de propiedades de los números desde la descomposición en sumas y multiplicaciones en el campo de los naturales. Además, se amplía estas nociones y técnicas al conjunto de los números enteros, para luego continuarlo hacia un trabajo algebraico, apoyándose en los conocimientos sobre números y operaciones. En esta propuesta, algo que resulta muy interesante es que estas técnicas, definiciones y propiedades se presentan *despojadas de sus razones de ser*. En ningún momento aparece la necesidad de descomponer estos números aditivamente o multiplicativamente a partir de una situación que lo demande, más allá de saber si un número es múltiplo de otro o no.

Es por esto que podemos decir que en los libros del tipo A y B no se observan tareas específicas que permitan reflexionar sobre la pertinencia, potencialidad y economía del TFA. Así también, en ambos casos, se observó que la descomposición en factores primos queda subordinada al uso de números primos de una cifra, fomentando una conjetura errónea: que los números primos son únicamente números pequeños que no van más allá de 2,3,5 y 7. Tampoco se identificaron tareas que permitan reflexionar sobre la existencia y unicidad de la descomposición.

C2. La aplicación de una técnica para resolver una tarea no implica la interpretación del resultado

Las tareas analizadas en este punto se agruparon en tres tipos de tareas:

- Calcular los múltiplos (o divisores) de un número natural.
- Calcular el MCM (o el MCD) de dos números naturales.
- Determinar si un número natural es múltiplo de (o divisible por) otro número natural.

En particular para analizar esta conjetura se tratará de dar respuesta a las siguientes preguntas (Tabla 3):

C21	¿Qué tareas respecto al cálculo de Múltiplos (divisores) de un número incluyen la interpretación del resultado?
C22	¿Qué tareas respecto al cálculo del *MCD (MCM)* incluyen la interpretación del resultado?
C23	¿Qué tareas para determinar la divisibilidad de un número por otro incluyen la interpretación del resultado?

Tabla 3. Preguntas relacionadas a la conjetura 2

Conclusión 2

De manera global podemos decir, a partir del análisis de las preguntas C21, C22 y C33 con respecto a nuestra conjetura C2, que existe una brecha notoria entre las tareas y la interpretación de sus resultados comparando los libros del tipo A y los del tipo B. Por un lado, los libros de tipo A conciben la tarea como una mera aplicación de la técnica presentada, sin la necesidad de interpretar los resultados, pues el foco está puesto en "saber aplicar". Por otro lado, y contrariamente, en los libros del tipo B las tareas invitan a la exploración, validación y justificación, y por decante a una necesaria interpretación de los resultados obtenidos.

C3. A cada tarea está asociada una técnica privilegiada

Para analizar esta conjetura se consideraron las mismas tareas que en la conjetura anterior. En particular se tratará de dar respuesta a las siguientes preguntas (Tabla 4):

C31	¿Qué técnicas se proponen vinculadas a la búsqueda de múltiplos (divisores)?
C32	¿Qué técnicas se proponen en la búsqueda del MCD y MCM?
C33	¿Qué técnicas se proponen para determinar la divisibilidad de un número por otro?

Tabla 4. Preguntas relacionadas a la conjetura 3

Conclusión 3

Con respecto a la pregunta C31, en los libros del tipo A la técnica que se desprende de la definición dada de múltiplo, es que un número natural a es múltiplo de un número b si se puede expresar al primero como producto del segundo por otro número natural. En el caso del divisor la técnica asociada es dividir ambos números y si la división es exacta, uno es divisible por el otro. Además, el libro institucionaliza cómo encontrar todos los divisores de un número natural haciendo las combinaciones posibles entre los números primos que resultan de su factorización. En el caso de los libros del tipo B, se puede observar que las técnicas utilizadas son similares a la de los libros del tipo A, con la diferencia que las definiciones son institucionalizadas al finalizar tareas que involucran estas técnicas implícitamente.

Al analizar la pregunta C32, pudimos observar que en el caso de los libros del tipo A, la tarea de calcular el MCM (o el MCD) se vincula estrechamente con una única técnica, la descomposición en factores primos con la ayuda de una tabla. En cambio, en los del tipo B se fomenta a un trabajo exploratorio sin definir específicamente una técnica como válida o superadora al resto. Sí cabe mencionar que el tipo de técnicas que emergen de las tareas son poco económicas para valores grandes. Además, la búsqueda de MCD y MCM es una tarea destinada a 7° grado y a 1° año, en 2° año no aparecen tareas relacionadas esta búsqueda.

Con respecto a C33, en los libros del tipo A se detectaron dos técnicas, una es el uso del algoritmo de la división y la otra técnica es el uso de los criterios de Divisibilidad, los cuales están definidos apenas comienza el capítulo. Según nuestro análisis la técnica propuesta y predilecta por los libros de este tipo es el uso de los criterios de divisibilidad. En cambio, los libros del tipo B direccionan su trabajo hacia la construcción, validación y justificación de los criterios de divisibilidad. Así mismo, cabe destacar cómo los libros del tipo B posibilitan la aparición de distintas estrategias relacionadas a C3 como, por ejemplo, la búsqueda de criterios de divisibilidad y la descomposición del número en sumas o productos más fáciles de analizar.

Luego de un análisis sobre los libros el tipo B con respecto a sus tareas, podemos asegurar que si bien no se presentan técnicas específicas para determinar cuándo un número dado es divisible por otro, todas las tareas apuntan a que emerjan en un principio los criterios de divisibilidad y luego la descomposición de un número en sumas y productos. Según nuestra lectura global de la serie de libros, la técnica de la descomposición en sumas y productos es la técnica predilecta y asociada directamente a la tarea de determinar si un número es divisible por otro.

C4. No hay reversión de las técnicas para realizar la tarea “inversa”

Para analizar esta conjetura buscamos en los libros del tipo A y B la existencia de tareas inversas y uso de la reversión de la técnica sobre tipos de tareas que se vinculen a la búsqueda de MCM (MCD) de números enteros dados y a la tarea de determinar si un número entero es divisible por otro entero dado.

En particular para analizar esta conjetura se tratará de dar respuesta a las siguientes preguntas (Tabla 5):

C41	¿Qué tipo de tareas demandan la inversión de las técnicas para hallar el MCD (MCM)? ¿Qué nivel de relación se establece entre la técnica para hallar el MCD (MCM) y su técnica inversa?
C42	¿Cuáles son las tareas que permiten la reversión de las técnicas utilizadas para determinar si un número natural es divisible por otro? ¿Qué nivel de relación se establece entre la técnica para determinar la divisibilidad de un número por otro y su técnica inversa?

Tabla 5. Preguntas relacionadas a la conjetura 4

Conclusión 4

Podemos concluir con respecto a C41, que en ambos tipos de libros no son frecuentes las actividades que respondan al tipo de tarea inversa. En el caso de los libros del tipo A se puede observar que, si bien hay una tarea muy potente, que consiste en hallar dos números naturales compuestos tales que su MCD (MCM) sea un número natural dado, la consigna limita la exploración a partir de cualquier número del conjunto de los naturales, condicionando que los números buscados sean números compuestos. Consideramos que dado el contexto de las actividades y el momento en el que se presentan son actividades destinadas a ser resueltas a partir del tanteo de valores, no requieren una justificación de la técnica aplicada ni la necesidad de determinar todos los valores que cumplen con las condiciones dada. Resaltamos la necesidad de encontrar todos los valores, ya que esto permitiría un análisis profundo de la técnica y los elementos tecnológicos que la justifican.

En el caso de C42 utilizamos la siguiente identificación para referirnos a una tarea (T) y su tarea inversa (T^{-1})

T: dados a y b naturales, determinar si a es divisible por b (si b es divisor de a)

T^{-1}: dados a y b naturales, determinar si a es múltiplo de b.)

En el caso del análisis realizado con respecto a las tareas T y T^{-1} en los libros del tipo A y B podemos decir que existen ambos tipos de tareas en diversos ejercicios y que además ambos tipos de libros proponen actividades que fomentan la relación que existe entre la noción de múltiplos y de divisores.

En el caso de la reversión de la técnica para resolver T y T^{-1} podemos decir que en los libros del tipo A no se encontraron este tipo de tareas. Estos libros proponen como técnica predilecta el uso de los criterios de divisibilidad.

En cambio, en los libros del tipo B se reconoció una amplia variación de los tipos de tareas que permitían la reversión de las técnicas aplicadas. Considerando como técnica predilecta la que surge al tener en cuenta “si el resto de dividir a por b es cero, entonces b divide a a” se describieron tareas que posibilitan abordar el formato del algoritmo de la división, pero analizando pequeñas variaciones en su dividendo o resto. También tareas que permiten relacionar el uso de la recta numérica con la ubicación de múltiplos y la lectura sobre el algoritmo de la división. Así también se logró poner a la luz la relación entre el algoritmo de la división y números expresados como productos o sumas de números naturales (enteros).

C5. No hay situaciones abiertas de modelización

En particular para analizar esta conjetura se tratará de dar respuesta a la siguiente pregunta (Tabla 6):

C51	¿Qué situaciones “abiertas” se proponen que requieran un trabajo de modelización en torno a la divisibilidad? ¿Qué tareas abiertas se proponen que permitan establecer relaciones entre los diferentes objetos de la OM en torno a la divisibilidad?

Tabla 6. Preguntas relacionadas a la conjetura 5

Conclusión 5

Si bien reconocemos la potencialidad de los problemas presentados en los libros del tipo B sobre los del tipo A, consideramos importante mencionar que los problemas presentados en relación a la conjetura 5 son problemas cerrados, que aportan todos los datos necesarios para su resolución. No es necesario en estos problemas analizados seleccionar la información pertinente y tampoco la técnica necesaria pues en los problemas se observan incisos intermedios que guían hacia la técnica necesaria para su resolución.

Cabe mencionar que este tipo de tareas cerradas no permite la toma de decisiones y autonomía en el trabajo matemático.

Conclusión final

Luego del análisis de los indicadores planteados en los libros de textos seleccionados, podemos establecer que hay evidencia suficiente para afirmar que las organizaciones matemáticas propuestas para la escuela secundaria presentan un alto grado de incompletitud, especialmente en los libros del tipo A, que son los utilizados frecuentemente en las escuelas de Río Negro y Neuquén.

Con respecto al indicador dado por C1, observamos que en general, las tareas que se desarrollan en los libros de texto no permiten reflexionar sobre la potencialidad del uso de las técnicas. En los libros del tipo B hay unas pocas tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, esto es, tareas cuya realización permita responder a cuestiones relativas a ciertas características de las técnicas matemáticas (dominio de validez, economía, justificación, interpretación de los resultados que se obtienen con ella, etcétera). Esto está totalmente ausente en los libros de tipo A.

El análisis de la conjetura C2 nos permite concluir que en el caso de los libros del tipo A, las tareas que se plantean no incentivan a que se realice una interpretación fehaciente de los resultados obtenidos al aplicar ciertas técnicas de resolución. Si bien en los libros del tipo B las tareas permiten realizar una exploración, validación y justificación de los resultados obtenidos, consideramos que sería mayor el nivel de completitud si contara con una mayor incidencia del bloque tecnológico-teórico.

La conjetura C3 hace evidente la rigidez de la OM analizada ya que en general hay una única técnica privilegiada asociada a cada tarea matemática. Si bien los libros del tipo A tienen más marcada esta rigidez, en ambos libros se termina haciendo énfasis en una de las técnicas, en el caso de los libros del tipo A en la descomposición en factores primos y en el uso de los criterios de divisibilidad, mientras que en los del tipo B la técnica es la descomposición en sumas y productos. Este aspecto limita a los estudiantes a que tengan la responsabilidad de decidir entre las diversas técnicas útiles para resolver una tarea, cuál es la más económica o la más fiable. Este fenómeno provoca la atomización de las diversas tareas, es decir, existe una asociación de una determinada técnica a cada tipo de tarea.

Acordando con Fonseca (2004), uno de los aspectos más importantes de la rigidez de las OMP que se estudian en la escuela secundaria se manifiesta en la no reversión de las técnicas matemáticas correspondientes. En términos del contrato didáctico podemos decir que no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno invertir una técnica para llevar a cabo la tarea inversa. Del análisis que realizamos en los libros de texto a partir de la conjetura C4, podemos afirmar que en los libros del tipo A se observa ausencia de tareas inversas que permitan la exploración de la reversión de la técnica abiertamente, particularmente, cuando existen dos tareas inversas entre sí, las correspondientes técnicas suelen tratarse como si fueran independientes.

En el caso de los libros del tipo B, si bien se presentan algunas tareas donde es posible pensar en término de la reversibilidad de las técnicas, estas fueron tratadas como técnicas totalmente desvinculadas unas de otras. A lo largo de estos textos se busca hacer evolucionar las técnicas desde técnicas más elementales a técnicas más económicas y más robustas, pero no se trabaja la reversibilidad de las mismas.

Finalmente, del análisis de la conjetura C5, que según Fonseca (2004) es uno de los principales indicadores del grado de completitud de una OML, podemos afirmar que en ninguno de los libros analizados hemos observado existencia de tareas matemáticas “abiertas” que requieran un trabajo de modelización en torno a la divisibilidad. La importancia de este indicador de la completitud proviene del hecho de que la existencia de tareas abiertas presupone cierto grado de flexibilidad de las técnicas y, además, presupone que las OMP que constituyen la OML en cuestión han alcanzado cierto grado de articulación. No obstante, si bien reconocemos la potencialidad de los problemas presentados en los libros del tipo B, concluimos que la OM analizada no satisface completamente este indicador de completitud.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221 - 265.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y* didáctica. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: ICE-Horsori.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, España.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 14*(2), 203 - 231.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas*. (Tesina no publicada). Universidad de Vigo, España.

Ministerio de Educación Provincia del Neuquén (2018). *Diseño curricular. Nivel secundario ciclo básico común.* Neuquén, Argentina. Gobierno de Neuquén. Recuperado de https://www.neuquen.edu.ar/resolucion-146318-diseno-curricular/

Ministerio de Educación y Derechos Humanos Río Negro (2017). *Diseño curricular. Escuela secundaria.* Río Negro, Argentina: Gobierno de Río Negro. Recuperado de https://educacion.rionegro.gov.ar/admarchivos/files/seccion_238/anexo-1-diseno-curricular-esrn.pdf

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2006). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) Matemática. 3° ciclo EGB Nivel Medio.* Buenos Aires, Argentina: Consejo Federal de Educación. Recuperado de http://repositorio.educacion.gov.ar:8080/dspace/bitstream/handle/123456789/94459/nap3matem.pdf?sequence=1

Discusiones en torno a la existencia del límite puntual a través de consignas con potencial matemático rico

PATRICIA CAVATORTA

patricia.cavatorta@gmail.com

BIBIANA IAFFEI

bibiana.iaffei@gmail.com

AGUSTINA RAMOS

aguus1509@gmail.com

MARIANA RODRÍGUEZ

mariirodriguez7@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este trabajo se presenta el análisis de eventos de una clase de Cálculo I del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Los eventos resultan de la implementación de dos consignas diseñadas con potencial matemático rico para trabajar la noción intuitiva de límite puntual de funciones reales de variable real. También se exponen reflexiones en torno a la potencialidad de las consignas a partir de las evidencias del análisis, para lo que se considera el marco teórico de referencia.

Introducción

Esta presentación surge del trabajo realizado en dos adscripciones en investigación enmarcadas en la materia Cálculo I del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC). Las mismas tienen por objetivo estudiar el potencial matemático (PM) de consignas para la enseñanza de distintos aspectos del concepto de límite puntual de funciones reales de variable real.

El grupo de trabajo diseña, analiza e implementa consignas matemáticas consideradas potentes para la enseñanza del tema señalado. Aquí se exponen algunos resultados que son parte de este proceso de estudio e investigación. Particularmente se analizan eventos que resultan de la implementación de dos consignas y se reflexiona en torno a estas evidencias a partir del marco teórico de referencia que se presenta a continuación.

Marco teórico

Las consignas matemáticas son enunciados de tareas, con la redacción que presenten, vinculadas al quehacer matemático que un docente propone en el aula. Estas implican resoluciones vinculadas a la aplicación de procedimientos, fórmulas y estrategias, a uso de una propiedad o una definición matemática, al establecimiento de condiciones para que algo sea válido, a la modelización de fenómenos (Rodríguez, 2017). El potencial matemático (PM) de una consigna matemática se mide de acuerdo a las posibilidades de exploración que habilita o no y a las posibilidades de argumentar sobre la validez de la resolución o de la respuesta que ofrece. La exploración a partir de la consigna se puede ver favorecida si existen diferentes caminos de resolución y no incluye pasos a seguir.

Barreiro (2015) sostiene que se puede valorar como positivo el uso de TIC para resolver consignas matemáticas si no hace perder de vista el objetivo matemático y se vuelve imprescindible. Arcavi y Hadas (2000) plantean que los ambientes dinámicos computarizados tienen características propias que potencian la actividad matemática de los estudiantes a la hora de resolver un problema. Estas características son: la experimentación, la visualización, la sorpresa, la retroalimentación y la necesidad de pruebas o demostraciones. Los estudiantes realizan construcciones y pueden observar, medir, comparar, distorsionar la figura, etc., favoreciendo toda esa experimentación el establecimiento de conjeturas y generalizaciones. Al visualizar la construcción y poder transformarla en tiempo real crean bases intuitivas para justificar sus conjeturas. La sorpresa es el desconcierto entre lo que los estudiantes conjeturan previo al uso del ambiente dinámico y lo que éste ofrece o les permite ver. Es mediante esta sorpresa que se produce una retroalimentación entre el ambiente dinámico y los estudiantes, provocando que los mismos tengan que revisar sus conocimientos, sus saberes y sus predicciones. La retroalimentación provocada es diferente a la que se puede dar con el docente, pues carece de juicio de valor y puede motivar la necesidad de demostrar.

Por otro lado, las consignas matemáticas pueden presentar su enunciado en distintos registros de representación (Duval, 2006): verbal, gráfico, tabular o numérico, analítico o algebraico, o la combinación de ellos. La consigna puede propiciar resoluciones dentro de un registro o interconectando registros. En este último caso la exploración es mayor. La representación verbal hace uso del lenguaje natural, en la tabular o numérica cobran importancia los aspectos numéricos, la gráfica potencia el entendimiento a través de la visualización de los objetos matemáticos y la analítica hace uso de fórmulas, lenguaje algebraico y símbolos matemáticos.

El trabajo dentro de un registro de representación se denomina tratamiento y el cambio de un registro a otro se denomina conversión. Cuando se resuelve una consigna importa el tratamiento dentro de un registro de representación "adecuado", lo que muchas veces implica la necesidad de cambiar el registro desde el cual se comenzó a pensar la resolución.

Metodología

La investigación que se viene desarrollando por el grupo de trabajo es de tipo cualitativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) y cuenta de distintas etapas: primero la redacción de consignas, después el análisis de las posibles resoluciones con y sin el uso de *GeoGebra* que puedan dar lugar y, por último, observar y estudiar lo que realmente ocurrió en el aula cuando se pusieron en acto. El tema que se trabaja es límite puntual de funciones reales de variable real. El eje vertebrador de todas las etapas de la investigación es el potencial matemático de las consignas.

Caracterización de la experiencia

Los eventos analizados en esta ponencia son seleccionados de un compilado de observaciones y registros que realizó el grupo de trabajo durante la implementación de una guía con cinco consignas en una clase de Cálculo I del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL) durante el año 2019.

La guía se implementa previo a la introducción de la definición métrica de límite. Hasta ese momento los estudiantes abordaron la noción intuitiva de límite considerando funciones sencillas, en su mayoría polinómicas, definidas a través de una ley o a lo sumo tres para funciones por tramos, fundamentalmente desde los registros tabular y gráfico; y se familiarizaron con la notación de límite.

Las actividades se resuelven en una clase de dos horas reloj (y se recupera lo actuado para su discusión en la clase siguiente). Los estudiantes trabajan en pequeños grupos (tres integrantes aproximadamente). Todos los estudiantes cuentan con el software *GeoGebra* instalado en sus teléfonos móviles.

El análisis recupera eventos (resoluciones escritas y registros de los observadores) de lo sucedido durante la resolución de dos de las consignas de la guía.

En el análisis de los eventos se focaliza en las siguientes cuestiones:

- Las ideas correctas o no construidas por los estudiantes a partir de la resolución.
- Los tipos de registros utilizados en la resolución.
- El uso de los recursos disponibles durante la actividad (lápiz y papel, *GeoGebra*, apuntes de clase).

Breve análisis de las consignas

Se exponen a continuación las dos consignas, denominadas consigna 1 y consigna 2, consideradas para este trabajo (que fueron las consignas tres y cuatro de la guía) y un breve análisis de lo que se pretende con las mismas.

Consigna 1 Sea la función definida por $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$
Si c es cualquier número real, ¿existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c? Explicar los procedimientos utilizados para asegurar lo que se concluye para cada c.

Consigna 2 Dadas las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, siendo a un número real

$$f(x) = \begin{cases} a^2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a\mid a\mid & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a\mid a\mid & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}ax & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a\mid a\mid & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Describir y justificar cómo influye el valor de a en la existencia o no del límite de cada función en cualquier número real.

Figura 1. Enunciados de las consignas 1 y 2

Estas consignas se diseñan con la intención que los estudiantes construyan ideas en torno a la noción intuitiva del concepto de límite puntual de funciones reales de variable real. Se pretende que exploren y conjeturen respecto de la existencia de determinados límites y puedan dar argumentos respecto de lo que conjeturan. No se espera que las conjeturas y los argumentos sean del todo acertados, pero sí que permitan recuperar ideas en una posterior puesta en común respecto de lo que significa la existencia del límite de una función en un punto, lo cual involucra necesariamente: la consideración del dominio de la función, el hecho que pueden obtenerse diferentes resultados dependiendo del conjunto de valores que se elija próximos a aquél en el cual se está calculando el límite y el descubrimiento intuitivo de la diferencia del comportamiento de la función en puntos de continuidad y de discontinuidad. Todas estas cuestiones son necesarias para comprender la noción intuitiva de límite antes de realizar cálculos algebraicos para determinar un límite.

Los enunciados dicen qué hacer pero no cómo hacerlo, no se direcciona el procedimiento de resolución. De esta manera se abre un abanico de posibilidades de resolución, se invita a los estudiantes a proponer sus propios caminos, a tomar decisiones y buscar estrategias, que sean útiles para formular conjeturas y sus respectivas justificaciones. No se pide explícitamente el trazado de un gráfico o la construcción de una tabla de valores, sino que se les da "libertad" en la resolución, potenciando las posibilidades de exploración para lograr establecer conjeturas y las justificaciones de éstas, o de por qué se eligió tal o cual procedimiento "efectivo".

No se dice cómo hacer para establecer si los límites existen, pero para poder cumplir con lo que las consignas solicitan se necesita "hacer algo". De esta manera no se direcciona el trabajo hacia un tipo de registro de representación en particular. Los estudiantes pueden trabajar desde distintos registros de representación, cuestión que es fundamental para la comprensión de un concepto matemático que requiere una coordinación entre los diversos registros de representación que se pueden elegir y usar (Duval, 2006).

Tampoco se dice explícitamente que deben usar *GeoGebra*, aunque lo tienen a disposición ya que lo usan frecuentemente en las clases, por lo que se espera que algunos grupos lo utilicen.

Análisis de eventos

Se presenta el análisis de algunos eventos que se dan durante la implementación de las dos consignas.

Eventos en relación a la consigna 1

Se analizan tres eventos denominados Eventos 1,2 y 3.

Evento 1

Los estudiantes registran lo que se presenta en las Figuras 2 y 3 y realizan la construcción de la gráfica de la función involucrada en *GeoGebra*.

3) $f(x) = \frac{1-cos(x)}{x}$ $\quad$ $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x}$

A nuestro parecer el único valor c que puede presentar un problema es $c = 0$, así que vamos a analizar ese caso particular.

Figura 2. Resolución de consigna 1 de grupo 1

$c = 0$

$x \to c$	$f(x)$
-0,6	-0,291107
-0,5	-0,244834
-0,4	-0,197347
-0,3	-0,148878
-0,2	-0,099667
-0,1	-0,049958
0,1	0,049958
0,2	0,099667
0,3	0,148878
0,4	0,197347
0,5	0,244834
0,6	0,291107

A medida que x se acerca a 0 por izquierda y por derecha, $f(x)$ tiende a 0. Entonces el lím existe y es 0. En conclusión, el $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x}$ existe para cualquier valor de c.

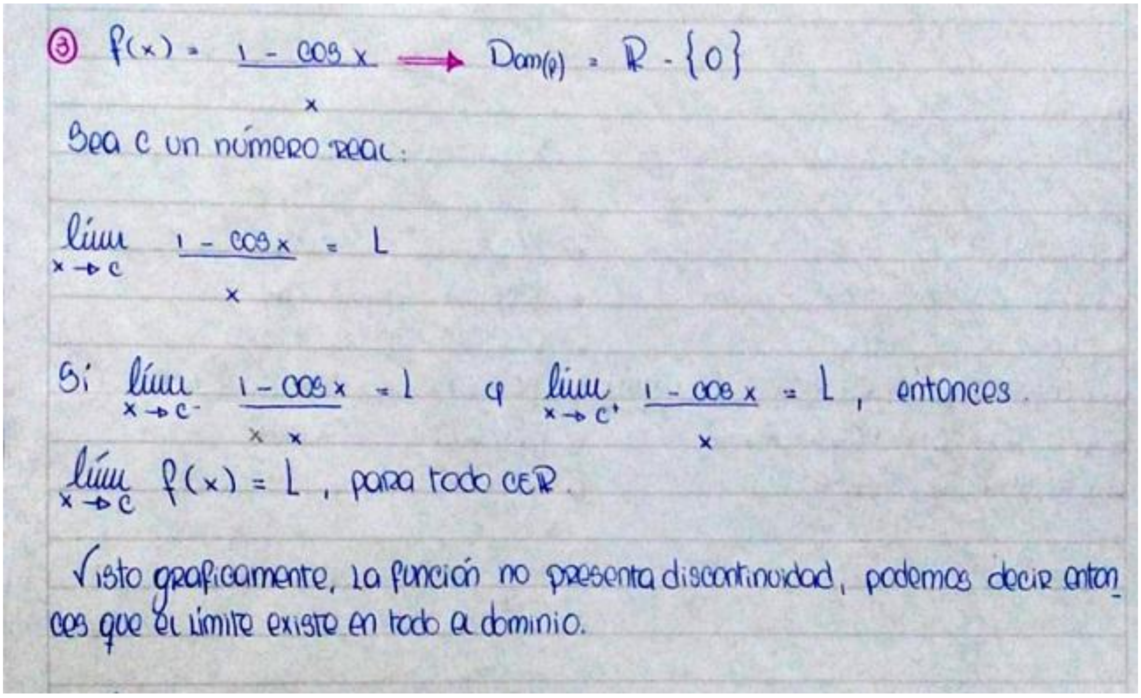
Figura 3. Continuación de resolución de consigna 1 de grupo 1

Trabajan con una idea incompleta, ya que proponen que sólo interesa estudiar el límite cuando c=0 porque anula el denominador de la ley que define la función involucrada, pero no explicitan el por qué no es necesario pensar en los otros casos.

Comparan lo que ven en la gráfica y lo que calculan con la tabla. Las representaciones gráfica y tabular fueron utilizadas en conjunto para arribar a esta conclusión. De esta manera se evidencia el trabajo en paralelo desde dos registros de representación (Duval, 2006).

Evento 2

Los estudiantes escriben como resolución lo que se presenta en la Figura 4.



③ $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \longrightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Sea c un número real:

$\lim_{x \to c} \frac{1 - \cos x}{x} = L$

Si $\lim_{x \to c^-} \frac{1 - \cos x}{x} = L$ y $\lim_{x \to c^+} \frac{1 - \cos x}{x} = L$, entonces

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Visto graficamente, la función no presenta discontinuidad, podemos decir enton-
ces que el límite existe en todo el dominio.

Figura 4. Resolución de consigna1 de grupo 2

Si bien en un principio analizan el dominio de la función, luego se limitan sólo a observar la gráfica construida en *GeoGebra* y concluyen escribiendo: "Visto gráficamente, la función no presenta discontinuidad, se puede decir entonces que el límite existe en todo el dominio".

Esta conclusión es errónea, ya que la función presenta discontinuidad en $x=0$, aunque este valor no pertenece al dominio. No analizan lo que sucede cuando $c=0$, haciendo que el análisis de la discontinuidad en R sea incompleto, porque es necesario calcular el límite aún cuando la variable independiente tiende a un valor que no pertenece al dominio (siempre que la función se encuentre definida en un entorno reducido del valor).

Si bien reconocen la necesidad del estudio de los límites laterales para establecer la existencia del límite de la función cuando x tiende a c, no lo consideran en el caso $c=0$.

Evento 3

Los estudiantes escriben en sus hojas lo que se presenta en la Figura 5.

3) $f(x) = \frac{1-cos x}{x}$ $\qquad Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$Im(f) \simeq [-\frac{7}{10}, \frac{7}{10}]$

Podemos asegurar mediante la gráfica que la función $f(x)$ es continua en todo su dominio. Si bien la función no está definida en 0 podemos establecer que $\text{lím}_{x \to 0} \frac{1-cos x}{x} \simeq 0$ por lo tanto para cada $x = c$ podemos asegurar que $\text{lím}_{x \to 0} \frac{1-cos x}{x}$ $\exists$.

Figura 5. Resolución de consigna 1 de grupo 3

Aquí se evidencian varias afirmaciones erróneas que permiten inferir ideas que aún no tienen claras. Se listan a continuación.

- "$Img(f) \cong \left[-\frac{7}{10}, \frac{7}{10}\right]$".

En este caso están estimando el posible conjunto imagen a partir de la identificación en el gráfico de los valores extremos de la función, aproximando a los décimos las imágenes observadas y eso explica el uso del símbolo $\cong$.

- "Podemos asegurar mediante la gráfica de la función f(x) es continua en todo su dominio."

Esto no se puede afirmar sólo mirando el gráfico, ya que, por ejemplo, la gráfica ofrecida por *GeoGebra* (dadas sus limitaciones) muestra una curva continua en $x=0$.

- "Si bien la función no está definida en 0 podemos establecer que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cong 0$ por lo tanto para $x = c$ podemos asegurar que $\lim_{x\to c} \frac{1-\cos x}{x}$ existe".

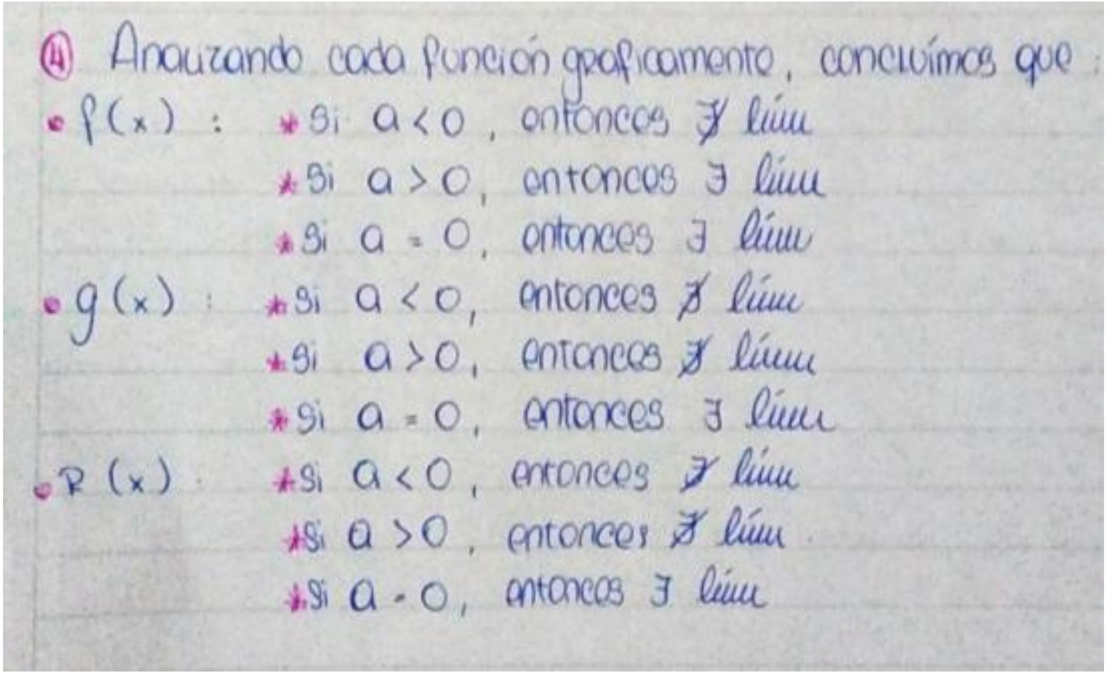
Utilizan el símbolo $\simeq$ en lugar del símbolo = para expresar el valor del límite cuando x tiende a 0.

Eventos en relación a la consigna 2

Se analizan tres eventos denominados Eventos 4, 5 y 6.

Evento 4

Los estudiantes realizan las gráficas de las funciones f, g y r en *GeoGebra* y registran lo que se presenta en la Figura 6.



(4) Analizando cada función gráficamente, concluimos que:

- $f(x)$: * Si $a<0$, entonces $\nexists$ lím
  * Si $a>0$, entonces $\exists$ lím
  * Si $a=0$, entonces $\exists$ lím
- $g(x)$: * Si $a<0$, entonces $\nexists$ lím
  * Si $a>0$, entonces $\nexists$ lím
  * Si $a=0$, entonces $\exists$ lím
- $r(x)$: * Si $a<0$, entonces $\nexists$ lím
  * Si $a>0$, entonces $\nexists$ lím
  * Si $a=0$, entonces $\exists$ lím

Figura 6. Resolución de consigna 2 de grupo 2

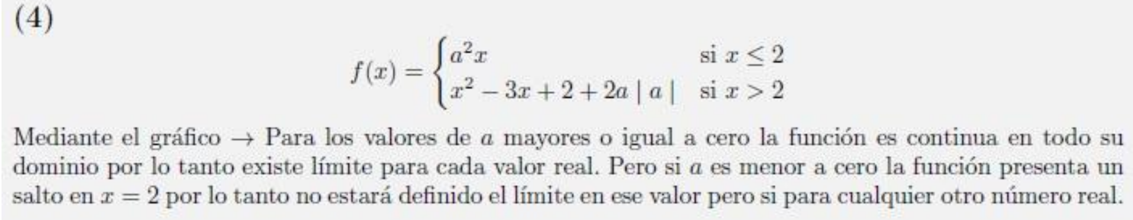
Expresan sus conclusiones a partir de lo observado en el software, no utilizan otro tipo de registro de representación. Sólo describen lo que sucede para cada función y no argumentan.

Para la función *f* la conjetura es correcta, pero no explicitan que si a es mayor o igual que 0 la función f resulta continua en $x=2$ y que para $x<2$ y $x>2$ también es continua por estar definida por funciones polinómicas.

Para la función g lo conjeturado es incorrecto, pues sólo alcanza la continuidad en $x=2$ si el parámetro a toma los valores 0, 1 y -1. Lo mismo sucede para el caso de la función r, que alcanza la continuidad en $x=2$ para tres valores de a, a saber, 0, $\frac{2}{3}$ y $-\frac{2}{3}$ (estos dos últimos valores imposibles de ser identificados con el software).

Evento 5

Las Figuras 7 y 8 corresponden a las resoluciones entregadas por los estudiantes.



(4)

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a \mid a \mid & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Mediante el gráfico $\rightarrow$ Para los valores de a mayores o igual a cero la función es continua en todo su dominio por lo tanto existe límite para cada valor real. Pero si a es menor a cero la función presenta un salto en $x=2$ por lo tanto no estará definido el límite en ese valor pero si para cualquier otro número real.

Figura 7. Resolución de consigna 2 de grupo 3

$$g(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a \mid a \mid & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Mediante la gráfica podemos observar que cuando a toma los valores $-1, 1, 0$ la función es continua en $x = 2$ por lo tanto existe el lím cuando x tiende a 2 en esos valores. Luego para los valores distintos de los ya dichos la función presenta un salto en $x = 2$ por lo tanto no existe límite cuando x tiende a 2. Pero para cualquier otro real distinto de 2, el lím existe por ser continua.

Figura 8. Continuación de resolución de consigna 2 de grupo 3

Los estudiantes sólo trabajan desde el registro de representación gráfico, observando lo ofrecido por *GeoGebra* extraen conclusiones que son correctas respecto de cómo influye el valor del parámetro a en la existencia o no del límite para las funciones f y g en cualquier número real.

Describen lo que ven gráficamente y señalan en el caso de la función f que si $a<0$ se presenta un salto en $x=2$ por lo que el límite no existe sólo para ese valor de x. Lo mismo describen para g si el parámetro a toma valores distintos de 0, 1 y -1.

(Lo siguiente es extraído del registro de observación de clase)

En este evento no aparece la resolución en relación a la función r. Las estudiantes no logran encontrar con el software los valores exactos de a que aseguran la existencia del límite para todo número real. Sólo se dan cuenta que $a=0$ es un valor admisible para la existencia del límite de $r(x)$ cuando x tiende a cualquier número real, en particular cuando x tiende a 2, y que existen otros dos posibles valores de a para los que esto también sucede, uno mayor que 0 y otro menor que 0. Eso hace que no escriban la respuesta.

Evento 6

Los estudiantes hacen un estudio exploratorio con el *GeoGebra* y luego realizan un estudio usando límites laterales, desde el registro de representación algebraico, en forma completa y correcta para justificar las conclusiones.

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x & si\, x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a|a| & si\, x > 2 \end{cases}$$

En el caso de la función $f(x)$ a partir de lo que vimos en la gráfica, y el análisis realizado, la función tendrá límite para $x \to 2$ cuando los valores de $a \geq 0$.

$$g(x) = \begin{cases} ax & si\, x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a|a| & si\, x > 2 \end{cases}$$

Para $g(x)$ el límite para $x \to 2$ existirá si $a = 0, a = 1, a = -1$.

$$r(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} ax & si\, x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + 2a|a| & si\, x > 2 \end{cases}$$

Con $r(x)$ se puede ver en las gráficas que el límite existirá en 3 casos particulares de a, y es cuando esta valga $\frac{-2}{3}$; 0 y $\frac{2}{3}$.

Figura 9. Resolución de consigna 2 de grupo 1

El encabezado con el que inician la escritura de la resolución se presenta a continuación.

4). Para verificar si las funciones tienen límite para todos los reales (R), solo basta con ver que ocurre en los puntos donde se producen los cambios de ley de la función, pues al ser poli nómicas, nos aseguran que siempre existirá el límite en los demás puntos:

Figura 10. Continuación de resolución de consigna 2 de grupo 1

Explicitan la necesidad de analizar sólo lo que sucede en relación al límite en 2, fundamentando la existencia del límite en cualquier otro número real para las tres funciones f, g y r, dado que son funciones polinómicas.

Mediante el estudio del límite cuando x tiende a 2 desde un registro de representación algebraico logran encontrar para cada función exactamente cuáles son los valores del parámetro a que permiten que tenga límite para cualquier número real.

Idean un plan de resolución a partir de lo que conjeturan observando el dinamismo de los gráficos construidos con *GeoGebra*, haciendo uso de sus conocimientos previos sobre funciones polinómicas, funciones por tramos, continuidad de funciones polinómicas, existencia y coincidencia de límites laterales para la existencia de un límite puntual.

En cuanto a los eventos 4, 5 y 6, los estudiantes reconocen que el software no estaba siendo totalmente eficiente sobre dos de los resultados en relación a la función r. En algunos grupos esto hizo que sientan la necesidad de hallar algebraicamente los valores del parámetro a para concluir y justificar, en cambio otros sólo han anotado las conclusiones o han omitido lo referido a la función r. Esto hace suponer que están siendo críticos sobre las visualizaciones que hacen a partir del entorno dinámico y que quizás estén pasando por un momento de transición entre esa mirada ingenua sobre los resultados ofrecidos por *GeoGebra* y una mirada crítica basada en todos los conocimientos que tienen disponibles.

Observaciones sobre los eventos

A partir del análisis presentado sobre los eventos se señalan algunos puntos que se retoman en la puesta en común para seguir construyendo ideas en torno a la noción intuitiva de límite:

- La insuficiencia de calcular los límites sólo desde el registro de representación gráfico o el registro de representación tabular debido a que las afirmaciones que se hacen quedan dentro del plano “conjetural”.

- Los valores del dominio de una función no son los únicos valores en los que se puede calcular el límite de la misma.
- La utilización del símbolo igual en la escritura de límites. Dado que la noción de límite está asociada al estudio del comportamiento de las imágenes de las funciones a partir de aproximaciones, generalmente esto dificulta la interpretación del símbolo igual. Deben construir un nuevo significado al que ya tienen adquirido desde el trabajo en el marco aritmético y algebraico.
- La importancia de observar el tipo de función y el dominio de la misma antes de analizar la existencia de límites.
- El software colabora pero es insuficiente porque hay veces en que la visualización nos conduce a errores ya que podemos ver una realidad que no es tal. Hay que tener en cuenta que un software para realizar los gráficos hace evaluaciones que redondea con una determinada precisión y pueden dar por iguales números que difieren a partir de una cifra decimal que ocupa una posición que corresponde a una potencia negativa de *10* con un exponente muy grande. No obstante, en casos como los de la consigna *2*, optar por la resolución con el *GeoGebra* puede ser útil para comprender la consigna y establecer conjeturas ya que el dinamismo que ofrece el software facilita la visualización de los distintos casos para cada valor de a, que no es fijo, sino que varía.

Reflexiones finales

El análisis de las dos consignas presentadas da cuenta que las mismas han posibilitado un trabajo que implicó necesariamente la exploración de los estudiantes a partir de sus conocimientos previos y de los recursos con los que cuentan, entre ellos el *GeoGebra*. Se evidencia que los caminos de resolución son variados y no responden necesariamente al trabajo desde el mismo registro de representación (Duval, 2006), si bien prima el registro gráfico. Por otro lado, las consignas posibilitan la argumentación. Los estudiantes realizan, en muchos casos, intentos por justificar los que conjeturan, esos argumentos también son variados y de diferente orden de complejidad. Esto hace inferir que el Potencial Matemático de las consignas es rico (Rodríguez, 2017).

Surgen mediante la resolución de las consignas trabajos dentro de distintos registros de representación, a saber, gráfico, tabular, algebraico. En algunos casos los estudiantes abordan la resolución desde más de un registro, dándose lo que Duval (2006) denomina la conversión de registros de representación, que es crucial para la comprensión de un concepto matemático. En otros casos, resuelven usando un sólo registro de representación, porque lo creen más eficiente o simplemente porque es desde donde pueden comenzar a comprender la consigna para abordarla. Empero, el trabajo posterior a la resolución mediante una puesta en común colabora en la identificación de otros modos de resolver, la posibilidad de conversión de registros de representación y la discusión en torno al más conveniente o económico para conjeturar y/o dar argumentos más fundados.

El uso de *GeoGebra*, dado que es un software dinámico, allana el camino en relación a la comprensión de las consignas en tanto permitió, mediante la visualización y experimentación, que comprendan a qué debían llegar en la resolución y al mismo tiempo abordar la resolución desde distintos registros de representación en paralelo. El software funcionó como posibilitador, ayudando a decidir caminos de resolución, por esto se considera que el uso del software es pertinente y significativo (Barreiro, 2015). Se generan sorpresas en los estudiantes en relación a lo que conjeturan y retroalimentaciones en tanto realizan búsquedas de justificaciones a partir de lo que visualizan y experimentan (Arcavi y Hadas, 2000). El uso del *GeoGebra* se vuelve imprescindible pero insuficiente, ya que no se pueden resolver por completo las consignas desde lo que visualizan en un registro tabular y/o gráfico. Particularmente es para destacar el diseño de la consigna 2 en cuanto al papel que jugó en la resolución cada una de las funciones involucradas, ya que permitió, por ejemplo, en el caso de la función r, que los estudiantes necesariamente deban desprenderse de los resultados visualizados en el software para hallar la solución desde un registro de representación algebraico.

Por todo lo expuesto se cree que el trabajo con este tipo de consignas habilita a potenciar la comprensión del concepto intuitivo de límite puntual de funciones reales de variable real y a la construcción "con sentido" del trabajo dentro del registro algebraico, que se aborda luego especialmente.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* [en línea], (5), 25-45. Recuperado de https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf

Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, *9*(1), 143-168.

Hernández, R. Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta Edición). México, México: McGraw Hill.

Rodríguez, M. (coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones UNGS.

Formación en la práctica profesional docente. Un recorrido por algunas universidades nacionales

M. FLORENCIA GONZÁLEZ

fgonza@fceia.unr.edu.ar

LUCÍA SCHAEFER

lucias@fceia.unr.edu.ar

NATALIA SGRECCIA

sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario

Resumen

El presente trabajo se inscribe en el Proyecto de Investigación "El trayecto de la Práctica Profesional Docente (PPD) en el Profesorado en Matemática (PM). El caso de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)" (1ING576, 2018-2021), donde se procura hacer un recorrido por los dispositivos que se emplean en la formación docente en algunos Profesorados en Matemática del país valiéndonos de las producciones publicadas en las Memorias de las Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática (1JPPDPUM) llevadas a cabo en Rosario a fines del 2018.

El enfoque de este estudio fue cualitativo y tuvo un alcance descriptivo-interpretativo, con la finalidad de caracterizar los dispositivos de formación para la práctica docente en Matemática. La técnica empleada fue el análisis documental, siendo los documentos trabajos en extenso publicados en las Memorias de 1PPDPUM. En este estudio se delimitaron 11 dispositivos que se utilizan en 14 Universidades Nacionales en la PPD, que giran en torno al análisis de la estructura curricular, la complejidad de la práctica y diversas estrategias para afrontarla, los desafíos actuales en la enseñanza de la Matemática, el conocimiento matemático requerido por el futuro profesor, la incorporación de las TIC, el trabajo en terreno desde distintas perspectivas, el papel del coformador, la reflexión sobre la práctica, la biografía escolar, el aprendizaje basado en proyectos y la modelización matemática. En términos generales, se destaca la PPD como articuladora de la carrera de Profesorado en Matemática.

Presentación

Este trabajo se inscribe en el Proyecto de Investigación "El trayecto de la Práctica Profesional Docente (PPD) en el Profesorado en Matemática (PM). El caso de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)" (1ING576, 2018-2021). Entre las actividades enmarcadas en dicho Proyecto se encuentran tanto la Beca de Iniciación de la Investigación "Dispositivos de Formación en las Prácticas Docentes de los Profesorados Universitarios en Matemática" como el Plan de Posdoctoración "El campo de formación en la PPD en los PM de las Universidades Nacionales", que hacen foco en analizar los dispositivos de formación en el trayecto de la PPD en la carrera PM de la UNR, así como de otros PM de Universidades Nacionales.

Los dispositivos de formación (según Morin, 1994; Souto, 1999; Perrenoud, 2005; citados en Sanjurjo, 2009) son aquellos artificios complejos, pensados y/o utilizados para plantear alternativas de acción. Estos se crean o se aprovechan para resolver problemáticas contextualmente, con un alto grado de maleabilidad para adecuarlos al análisis sobre las prácticas docentes.

En esta ponencia procuraremos recorrer sucintamente los dispositivos que se emplean en la formación docente de algunos Profesorados en Matemática de las Universidades del país, valiéndonos para ello de las producciones presentadas en las Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática (1JPPDPUM) y publicadas en Sgreccia (2019).

Encuadre conceptual

El Consejo Interuniversitario Nacional (CIN), en su propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática (Anexo IV Resolución CIN 856/13) delimita el Campo de Formación en la PPD como aquel espacio de "construcción reflexiva y el desarrollo de saberes y habilidades que se ponen en juego en el accionar del profesor universitario, tanto en las aulas como en otros ámbitos que hacen al ejercicio de la profesión docente". Puntualmente se señala la importancia de la integración teórico-práctica asumida desde una posición reflexiva y crítica que atienda a las particularidades de los contextos en que se sitúa la acción.

La formación en el campo de la PPD en los Profesorados Universitarios en Matemática, de acuerdo a los estándares del CIN, se propone que se inicie en los primeros años de la carrera, mediante actividades que permitan analizar y reconstruir actuaciones propias del quehacer docente. Entre las acciones recomendadas a desarrollar en este campo se encuentran:

- La comprensión del ejercicio de la profesión docente como una práctica social enmarcada en contextos sociales y culturales diversos.
- La comprensión de los valores y procesos básicos vinculados a la seguridad e higiene y protección del ambiente.
- La valoración de la actividad profesional docente como una actividad social y colaborativa, orientada a aprender a pensar y a hacer con otros.
- La reflexión sobre los conocimientos a enseñar, contemplando las diversas dimensiones de la realidad educativa.
- La comprensión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la disciplina.
- La planificación, puesta en práctica y evaluación de propuestas de enseñanza y de aprendizaje pertinentes.
- La selección crítica y producción de material didáctico.

En cuanto a la carga horaria del campo de la PPD, en relación con la carga horaria total de la carrera, el CIN sugiere que no debe ser menor a 400 horas de un total de 2900.

En particular, en el Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la UNR, en el marco del plan de estudios 2018, el trayecto de la PPD conforma uno de los cuatro Campos de Formación de la carrera; siendo los otros tres Campos de Formación: Disciplinar Específica, Pedagógica y General. Está dirigido a la articulación teórico-práctica de los restantes campos de formación, integrándose mediante actividades de diversa naturaleza con el objetivo de desarrollar competencias en el diseño, implementación, análisis y evaluación de prácticas educativas en el área de la Matemática, así como en la docencia en general.

Pero, ¿qué conocimientos y habilidades deberían adquirir los futuros profesores en Matemática durante su formación inicial? Muchos autores han abordado este tema, entre ellos Ball (2017), quien asegura que más allá del conocimiento de la disciplina, el cual siempre debe estar, lo importante es determinar qué se conoce y de qué manera dentro del trabajo matemático de enseñar. La PPD constituye un campo fértil donde se pone en práctica ese conocimiento y es posible abordar y discutir estas cuestiones.

Como se mencionó, el 1 y 2 de noviembre del 2018 se llevaron a cabo las 1JPPDPUM en la FCEIA donde precisamente uno de los ejes temáticos giró en torno a los dispositivos de formación para la PPD en Matemática. Puntualmente en este trabajo se prestará atención a los dispositivos de formación en el trayecto de la PPD en los Profesorados en Matemática, haciendo un recorrido por algunas universidades del país.

Método

El enfoque del estudio fue predominantemente cualitativo, en el que no interesaron mediciones o generalizaciones sino las particularidades con la finalidad de caracterizar los dispositivos de formación para la práctica docente en Matemática. En correspondencia, adquirió un alcance descriptivo-interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). La técnica empleada fue la de análisis documental, siendo los documentos los trabajos publicados en las Memorias de las 1JPPDPUM.

Se trata de 26 ponencias en Simposios (S1 a S26, Tabla 1), de 14 Universidades Nacionales, relativas a la integración de la PPD en los planes de estudio, los programas, los dispositivos y la enseñanza de la Matemática. Además, se consideraron tres presentaciones de invitados (C1 a C3, Tabla 1), que aluden a propuestas innovadoras desde la Matemática en la formación de profesores en la UNGS, a reflexiones por parte de coformadores del nivel superior, así como de practicantes residentes de la UNR. La extensión de cada trabajo es de aproximadamente 12 páginas.

	Nombre del trabajo	Universidad
C1	Reflexiones sobre la tarea de enseñar matemática	Universidad Nacional General Sarmiento (UGS)
C2	Experiencias de práctica pre-profesionales docentes. El caso del profesorado en Matemática de la UNR	Universidad Nacional de Rosario (UNR)
C3	Desafíos de coformadores y coformadoras del nivel superior. Experiencias en el ciclo básico de las carreras de ingenierías de la UNR	Universidad Nacional de Rosario (UNR)
S1	El profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias, Exactas y Naturales de la UNCA	Universidad Nacional Catamarca (UNCA)
S2	Cambios en la Práctica Docente para el Profesorado Universitario en Matemática de la Universidad Nacional de Mar del Plata	Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP)
S3	La construcción del saber Matemática para enseñar en la Formación Inicial del Profesorado	Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB)
S4	El profesorado en Matemática de la UNR a 30 años de su creación: configuración del campo de la PPD	Universidad Nacional de Rosario (UNR)
S5	Accesibilidad Académica y Diversificación Curricular como Problemática Transversal en el Trayecto de las Prácticas	Universidad Nacional de Rosario (UNR)

S6	Diseño y Estructura del plan de estudios del Profesorado en Matemática de FCEyT-UNSE	Universidad Nacional de Santiago del Estero (USE)
S7	Las competencias digitales en el proceso de formación de los estudiantes del profesorado en matemática	Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus)
S8	Secuencias didácticas con geogebra	Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus)
S9	La evaluación de curso de teoría de grafos en formación docente	Universidad Nacional de Comahue (UNCo)
S10	La modelización matemática a partir de recorridos de estudios e investigación en la formación de profesores	Universidad Nacional de Comahue (UNCo)
S11	Evaluación de competencias geométricas en alumnos ingresantes al profesorado en matemática de la FAHCE-UNLP	Universidad Nacional de La Plata (UNLP)
S12	¿Qué matemática debería estar incluida en la formación de un futuro profesor de matemática?	Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)
S13	¿Cuánta matemática tiene que saber un profesor de matemática?	Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB)
S14	Cuando las ecuaciones diferenciales se convierten en herramientas de formación docente	Universidad Nacional de Rosario (UNR)
S15	Enseñando probabilidad a través de proyectos: una apuesta a futuro	Universidad Nacional del Sur (UNS)
S16	La elaboración de consignas como proceso de enseñanza, por parte de los estudiantes del profesorado en matemática de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Autónoma de Entre Ríos	Universidad Autónoma de Entre Ríos (UADER)
S17	Estrategias que favorecen las primeras prácticas en el aula de los y las estudiantes del profesorado en matemática	Universidad Nacional de La Plata (UNLP)
S18	La articulación entre el trayecto de práctica y el estudio de la didáctica específica en el profesorado de matemática de la UNLP	Universidad Nacional de La Plata (UNLP)
S19	Las memorias de las prácticas docentes iniciales	Universidad Nacional de la Patagonia Austral (UNPA)
S20	"La clase" como dispositivo de formación en PPDI	Universidad Nacional de Rosario (UNR)
S21	Generando herramienta para desarrollar tecnologías para la enseñanza de la matemática	Universidad Nacional del Sur (UNS)
S22	Procesos de autorreflexión acerca de la actividad como profesor en matemática durante el período de las prácticas: un dispositivo de aprendizaje y autoevaluación	Universidad Nacional de Misiones (UNM)
S23	La formación de futuros profesores a partir de reflexiones didáctico-matemáticas sobre la confrontación de procedimientos de alumnos del secundario	Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)
S24	El profesor como tutor mediador entre el saber que circula en la clase y el saber gestionado por los practicantes	Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)
S25	El trabajo en terreno de los programas del trayecto de PPD. El caso del profesorado en matemática de la UNR	Universidad Nacional de Rosario (UNR)

S26	Ciclo formativo en didáctica de la matemática para la formación de futuros profesores de matemática	Universidad Nacional de Villa María (UNVM)

Tabla 1. Etiquetas asignadas a los trabajos de las Memorias de las 1JPPDPUM.

Las categorías de análisis, delimitadas luego de una primera inmersión en los datos, giran en torno al análisis de la estructura curricular, la complejidad de la práctica y diversas estrategias para afrontarla, los desafíos actuales en la enseñanza de la matemática, el conocimiento matemático requerido por el futuro profesor, la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), el trabajo en terreno desde distintas perspectivas, el papel del coformador, la reflexión sobre la práctica, la biografía escolar, el aprendizaje basado en proyectos y la modelización matemática.

Principales hallazgos

En lo que sigue iremos recorriendo las categorías de interés, con algunas explicaciones e ilustraciones que dan cuenta del sentido que han adquirido en el evento de referencia.

Análisis de la estructura curricular, de acuerdo a estándares nacionales (C1, S1, S2, S6). Para este análisis, se han enfocado en diversos aspectos:

- *Formación didáctica* (C1), atiende a la formación inicial del futuro profesor en cuanto a lo didáctico-matemático.
- *Formación práctica* (S1), son aquellas actividades indispensables para la formación docente que se desarrollan, de qué manera lo hacen, en qué ámbitos y en qué espacio curricular.
- *PPD como articuladora a lo largo de la carrera* (S4, S25), de los demás campos de formación.
- *Manejo de contenidos matemáticos por parte del profesor* (C1, S6) en los diferentes niveles de formalización y estructuración propios de la disciplina.

Complejidad de la práctica, dado que comprende un rol expuesto del practicante al mismo tiempo que un formador que no fue formado para enseñar la práctica (C1, C3). Se propone emplear la investigación en Educación Matemática como insumo para la formación en la práctica (C1), y en ocasiones, incorporar docentes adscriptos a las cátedras para complementar las tareas del docente-investigador (S16). Se presentan algunas estrategias para afrontar esta complejidad:

- *Planificación de las clases*, dinámicas y colaborativas, para desarrollar en cursos previamente observados y atendiendo a sus particularidades (C2, S25). Esto permite prever numerosas situaciones, obstáculos, errores y dificultades de los estudiantes. El diseño de materiales propios, entre ellos la planificación de la clase, es una de las etapas fundamentales del ciclo formativo de todo futuro profesor (S26).
- *Entrevistas a docentes* (S17) para conocer las cátedras, las metodologías, antes de su entrada al aula. Es una herramienta para complementar la planificación de las clases.
- *Portafolio* (C1, S11), para evaluar producciones estudiantiles que denotan un proceso llevado a cabo en un período de tiempo. Cuando acompaña las prácticas en terreno, permite la reflexión sobre lo escrito en diarios de clases, análisis didáctico-matemático de producciones de los estudiantes durante las prácticas (S23), como así también hacer explícitos sentimientos, dudas, inquietudes de diferentes maneras y no siempre desde la palabra.
- *Socialización de las prácticas*. A través de *producciones escritas*, tales como narrativas en documentos online abiertos a los involucrados (C2) y diarios de clase (S17, S19).
- *Prácticas simuladas en micro clases* como un dispositivo que permite afrontar las expectativas e incertezas previas a la entrada al campo (S17), como así también la planificación de una clase para sintetizar todas las herramientas adquiridas y lo vivenciado en el trabajo en terreno (S20).

Desafíos en la enseñanza de la Matemática (C1), se remarca la heterogeneidad de los estudiantes y las condiciones curriculares institucionales, que muchas veces influye en dificultades disciplinares desde el inicio de la carrera (C1, S1). También se destaca la necesidad de brindar recursos en la formación docente para realizar propuestas adaptadas que afronten la diversidad curricular (S5).

Conocimiento matemático del futuro profesor. Qué matemática requieren los futuros profesores resultó un tema reincidente en las 1JPPDPUM (S3, S12, S13), muchas veces sin perder de vista la PPD (S14). Se pone en tensión la matemática escolar y la matemática de formación (S3, S13), indicando la necesidad de estudiar los conocimientos de los ingresantes (S11) para articular la matemática del nivel secundario y superior (S12). Se destaca la necesidad de que los futuros profesores desnaturalicen los objetos matemáticos desde una mirada epistemológica (S21), y reflexionen sobre los saberes matemáticos que se construyen (S3) y que permiten el diseño, implementación y evaluación de los procesos formativos.

Incorporación de las TIC, por ejemplo, en *clases de matemática* (C1, S8, S14), remarcando las etapas de diseño y gestión, que asumen fases de integración de las herramientas tecnológicas por parte de futuros docentes (acceso, adopción, adaptación, apropiación, invención), con consignas que permitan develar propiedades matemáticas en las que su uso marca una diferencia y relacionar distintos registros de representación. Es necesario propiciar el desarrollo de *competencias digitales en la formación de profesores* (S7) y en la actualización, como un camino propicio para la incorporación reflexiva de recursos tecnológicos en el plano educativo.

Trabajo en terreno, contemplando tanto los niveles educativos involucrados como la estructuración global de este tipo de trabajo:

- *Desde el nivel superior*, asumiendo un rol semejante al de ayudante de segunda o ayudante-alumno (C2, S25). Suelen ser las primeras prácticas por resultar un ámbito más cercano a los estudiantes (S17). Pero en terreno no solo se llevan a cabo las tareas del practicante, sino que es común encontrarse anteriormente con observaciones de clases, por ejemplo, en el nivel superior terciario, como así también análisis del Proyecto Pedagógico Institucional, del área de Matemática y de la cátedra (S25).
- *Desde el nivel secundario*, contemplando etapas previas de planificación e implementación de clases (C2, S18). En algunas ocasiones se llevan a cabo prácticas individuales pero con entrada al campo en parejas (S18), lo cual el favorece el intercambio de opiniones, acuerdos sobre la dinámica y la discusión de propuestas. Nuevamente, el trabajo en terreno en este nivel no se da directamente con la residencia, sino que previamente se realizan observaciones y entrevistas como primera aproximación en años anteriores, ya sea en ciclo básico u orientado, de acuerdo al estadio del trayecto de la PPD en que se encuentren (S20, S25).
- *Desde los programas* (S25), procurando la articulación entre todas las asignaturas de la carrera que componen el campo de la PPD y promoviendo que desde el inicio de la misma los futuros profesores tengan contacto directo con el terreno.

Papel del coformador, en tanto contribuye a moldear la formación, trabajando colaborativamente con el equipo formador como referente cercano para el residente. “Cede” su lugar, o mejor dicho, se posiciona en otro lugar y se dispone a recibir retroalimentaciones del practicante. Para cada practicante, su coformador se constituye en un “intelectual transformador”. Se destaca este papel tanto desde la visión de los residentes (C2) como desde la visión de los propios coformadores (C3), ofreciendo diversas propuestas para fortalecer y establecer el lugar que ocupan y la forma de participación que tienen en la formación docente (S18, S24).

Reflexión sobre la práctica, retro, intro y prospectivamente (C2). Se proponen las cátedras de la práctica docente como un espacio de intercambio colectivo (S17) y análisis de la práctica desde el punto de vista de tendencias didácticas trabajadas previamente (S18). Además de los intercambios, es importante una etapa final de autorreflexión y autocrítica como forma de seguir aprendiendo (S22).

Biografía escolar (C2, S14, S20), posibilita el re-planteo a partir de la propia experiencia sobre la importancia de las configuraciones que se adquieren en el tránsito por la escuela como alumno.

Aprendizaje basado en proyectos (S15) como modelo de aprendizaje que favorece la elaboración de conocimientos desde una perspectiva de investigación colaborativa a través de problemáticas que se canalizan mediante este tipo de trabajo.

Modelización matemática (S10), a partir de la implementación de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), dispositivo propio de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), y el análisis posterior a la misma: ruptura del contrato didáctico, rol de las TIC y disciplinariedad.

A modo de cierre

En el trabajo se ha procurado recorrer y describir los dispositivos de formación empleados en la formación docente de los Profesorados en Matemática de algunas Universidades Nacionales de Argentina, compartidos en las 1JPPDPUM. A raíz de ello surgieron algunas categorías de análisis que permiten realizar un panorama sobre lo que se está trabajando y poniendo en foco a nivel país en lo relativo a la PPD.

El conocimiento matemático es lo primero que surge al pensar en la formación del futuro Profesor en Matemática. Se han puesto en discusión las dificultades de los ingresantes a los Profesorados, permeados a su vez por su biografía escolar. Como así también, de qué forma los docentes deben conocer la Matemática. Pero, como señala Ball (2017), igual de importante es el conocimiento que se pone en juego al enseñar la disciplina, y es con esto que surgen otras categorías como la complejidad de la práctica y diversas estrategias para afrontarla. En particular, se pondera la socialización de las prácticas a través de producciones propias de los alumnos que permiten la reflexión sobre las mismas, fundamental para que el trabajo en terreno constituya un campo fértil de aprendizaje.

El análisis de la estructura curricular ha permitido tener una mirada macro de la carrera, lo cual favorece articulaciones y relaciones entre los distintos campos y asignaturas, estableciendo trayectos que transitarán los futuros profesores. Así, la PPD se constituye en un potencial articulador de las carreras de Profesorado en Matemática.

El recorrido del presente trabajo permitirá realizar comparaciones pertinentes (entre las carreras y los estándares, entre distintas carreras, entre distintos campos en una misma carrera, entre las instancias graduales de PPD en una carrera) que se irán materializando en aportes en torno a la temática. Se propone también estudiar en profundidad las categorías surgidas y su consonancia con los dominios del conocimiento para la enseñanza propuestos por Ball, Thames y Phelps (2008), para de este modo analizar posibles vacancias en el área de la formación inicial de Profesores en Matemática.

Referencias bibliográficas

Ball, D. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp.11-34). Hamburgo, Alemania: Springer.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ª edición). México DF, México: Mc Graw Hill.

Sanjurjo, L. (2009). Razones que fundamentan nuestra mirada acerca de la formación de las prácticas. En L. Sanjurjo (Coord.), *Los dispositivos para la formación en las prácticas profesionales* (pp.15-40). Rosario, Argentina: Homo Sapiens.

Sgreccia, N. (Comp.) (2019). Memorias de las Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática [en línea]. Rosario, Argentina: Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario. Recuperado de https://desarrolloinstitucional.fceia.unr.edu.ar/media/attachments/2019/12/16/memorias-1jppdpum.pdf.

Un espacio de estudio de herramientas de análisis didáctico-matemático para contribuir a la formación del profesor

María Elena Markiewicz

mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Bettina Aylén Milanesio

Silvia C. Etchegaray

Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

En el marco de la complejidad que implica la formación de profesores de matemática, planteamos la necesidad de desarrollar conocimientos didácticos que le permitan al futuro profesor analizar sus propias prácticas y las de sus alumnos. Para ello consideramos imprescindible que el mismo disponga de herramientas conceptuales y metodológicas de análisis que le pueden aportar las diferentes teorías o enfoques de investigación en didáctica de la matemática, y en particular algunas herramientas que propone el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Este trabajo tiene como objetivo mostrar cómo, una alumna avanzada de nuestro profesorado en matemática, en el marco de una beca de estímulo a las vocaciones científicas, ha podido realizar un estudio y un uso reflexivo de estas herramientas para analizar su propia práctica (representativa de alumnos de los últimos años de nuestro profesorado) y las prácticas de alumnos de la escuela secundaria ante ciertos problemas, explicitando objetos, procesos, niveles de algebrización y conflictos semióticos presentes en dichas prácticas. Esto le ha permitido avanzar en la comprensión de algunos factores condicionantes de las mismas y de las características que diferencian su propia resolución (y la de otros estudiantes avanzados del profesorado) de las resoluciones propuestas por alumnos de la escuela secundaria. Este tipo de trabajo constituye, así, una manera de fortalecer la formación del futuro profesor, y contribuir a mejorar las condiciones para gestionar una clase de matemática donde se puedan retomar, con sentido, las producciones de los alumnos, ponerlas en diálogo y transformarlas.

Introducción

Sin lugar a dudas la formación del profesor de matemática es un asunto que reviste una gran complejidad, la cual ha sido abordada en diferentes estudios e investigaciones internacionales y nacionales (Ball, 2000; Ponte, 2012; Chevallard, 2005; Bosch y Gascon, 2009; Olarría y Sierra, 2011; Pino Fan y Godino, 2015; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012; Sessa, 2011, entre otras).

En nuestro caso, en particular, nos preocupa el desarrollo de conocimientos, en el futuro profesor, para realizar análisis a priori de las situaciones problemas que propone en el aula y análisis a posteriori de las producciones de sus alumnos ante las mismas, que contribuyan a identificar factores que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, consideramos fundamental que los futuros profesores dispongan de herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan analizar la actividad matemática (propia y de estudiantes) de una manera sistemática y pormenorizada, para que, al pensar o enfrentarse a diferentes producciones ante un mismo problema no se queden con la sola y simple idea de que “es otra resolución” o que “se utilizaron otros procedimientos”, sino que puedan ser conscientes de toda la configuración de objetos y procesos diferentes que se activan en dichas prácticas y de los distintos niveles de algebrización en los que se sitúan las mismas. Esto les permitirá anticipar y explicar posibles dificultades de los alumnos, explicándolas a partir de la complejidad ontosemiótica reconocida de la actividad matemática desplegada.

En este sentido el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012) aporta herramientas que son de suma utilidad para este tipo de análisis y que consideramos valiosas para trabajar en la formación del profesor en distintos espacios.

En el presente escrito queremos mostrar parte del trabajo realizado en el marco de una beca de estímulo a las vocaciones científicas de una alumna avanzada del Profesorado en Matemática de nuestra Universidad, con el objetivo de evidenciar cómo el reconocimiento y el uso reflexivo de algunas herramientas del EOS por parte de la futura profesora le permitieron realizar un análisis de su propia práctica y de las prácticas de estudiantes de nivel medio ante problemas de divisibilidad, dando cuenta de la utilidad analítica de dichas herramientas.

En el apartado 1 sintetizaremos algunos de los constructos teóricos del EOS que constituye el marco teórico y metodológico que se toma en consideración en este trabajo y, en particular, en la beca antes mencionada. En el punto 2 mostraremos parte del trabajo realizado por la estudiante en el marco de la beca y en el punto 3 esbozaremos algunas reflexiones finales.

Marco teórico y metodológico

El EOS tiene como punto de partida "la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado" (Godino et al., 2007, p. 3).

En este marco, se introducen las nociones de *práctica matemática* (toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar las soluciones, validarlas y generalizarlas a otros contextos) y de *significado personal e institucional* de un objeto matemático (ligado a los *sistemas de prácticas* que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución) para resolver un tipo de problemas en los que se requiere poner en funcionamiento dicho objeto. Estos sistemas de prácticas están, a su vez, constituidos por redes de relaciones en las que intervienen diferentes tipos de *objetos o entidades primarias*: *situaciones-problemas, procedimientos, definiciones/conceptos, propiedades, argumentos* y *lenguaje*. Los problemas son el origen o 'razón de ser' de la actividad y motivan la puesta en funcionamiento de ciertos procedimientos, definiciones y propiedades, como así también de argumentos para justificar los procedimientos y propiedades utilizadas.

Tanto los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas como los emergentes de las mismas pueden ser considerados según distintas facetas duales, dependiendo del juego de lenguaje en el que participan, y las mismas dan lugar a diferentes procesos cognitivos duales que se consideran fundamentales reconocer en la actividad matemática, entre los que destacamos:

- *Proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo o ideal. A su vez un objeto no ostensivo puede ser materializado mediante un ostensivo.

- *Proceso de particularización-generalización* (dualidad ejemplar-tipo): hace referencia al pasaje de lo particular a lo general y viceversa.

- *Proceso de descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, los objetos (unitarios) intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero, tras el proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.

- *Proceso de representación-significación* (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir significado (contenido) a una expresión. Estos procesos son 'densos' en actividad matemática.

Estos procesos pueden ser fuente de *conflictos semióticos*, es decir, de disparidades o desajustes entre significados atribuidos por dos sujetos, ya sean estos personas o instituciones (Godino, 2002), los cuales permiten anticipar/explicar las dificultades que podrían surgir (o las que efectivamente surgen) en el transcurso de los procesos de instrucción.

El reconocimiento de objetos, procesos y conflictos semióticos forma parte de lo que el EOS denomina *análisis ontosemiótico* y es considerado, en el marco de este enfoque, como una competencia específica del profesor de matemática (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

Además, el EOS reconoce la existencia de un proceso de algebrización en la actividad matemática y ha avanzado en la categorización de diferentes *niveles de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática y se asignan a la actividad que realiza el sujeto que resuelve un problema o tarea matemática, no a las propias tareas, las cuales se pueden resolver de distintas maneras, pudiendo poner en juego una actividad algebraica diferente.

En particular, se toman como criterios para la determinación de los niveles de algebrización:

-La presencia de *objetos intensivos* de diferentes grados de generalidad (entidades generales, abstractas que emergen de objetos perceptibles o no y de las acciones que se realizan con ellos)

-El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades, o basadas en las estructuras algebraicas)

-Los tipos de lenguajes usados (natural, icónico, gestual o simbólico).

En este sentido, se han determinado seis niveles de algebrización de los cuales, para los fines de este trabajo, describiremos brevemente las características principales de los cuatro primeros:

-Nivel 0: Se distingue por la ausencia de algebrización. Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares.

-Nivel 1: Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente.

-Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal.

-Nivel 3: Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia.

-Nivel 4: se caracteriza por el uso de parámetros, articulando sus diferentes significados

Trabajo realizado por la alumna del profesorado en el marco de la beca

El proceso de estudio e investigación llevado a cabo por la becaria le permitió avanzar significativamente en el estudio de los fundamentos teóricos y metodológicos para delimitar su marco teórico y su campo experimental.

En este sentido, se realizó un trabajo de campo donde, a partir de tres muestras de problemas vinculados a la Divisibilidad en Z, se consideraron las resoluciones propuestas por cuatro alumnos avanzados del Profesorado en Matemática de la UNRC y las resoluciones planteadas por quince alumnos de nivel medio de 4to. año de una escuela de la región. Se efectivizó un estudio de casos tomando, en particular, la propia práctica de la becaria y cuatro producciones de alumnos de nivel secundario, llevándose a cabo un análisis ontosemiótico a fin de determinar, en primer lugar, tipos de objetos y procesos duales que se ponen a funcionar en cada una de las producciones mencionadas. Este análisis constituyó la base para delimitar los niveles de algebrización alcanzados en la actividad matemática desarrollada en cada caso y explicitar conflictos semióticos efectivos que se pusieron en evidencia en los alumnos del secundario.

En este trabajo, particularmente, haremos referencia a las dos primeras muestras de problemas, en cuyos enunciados se realiza un juego de variables didácticas que apuntan a tensionar la definición de múltiplo (muestra 1) y la emergencia y validación de propiedades algebraicas de múltiplos (muestra 2).

Primera muestra

1) ¿El producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5?

1') ¿El producto de un múltiplo de 5 por un múltiplo de 7, es siempre un múltiplo de 5? ¿Es siempre un múltiplo de 35?

1´´) ¿Se podrá afirmar en general que: el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos? ¿El producto de un múltiplo de un número natural por el múltiplo de otro número natural es siempre un múltiplo del producto de ambos?

Segunda muestra

2) Justificar que 44+55+77 es un múltiplo de 11, sin necesidad de calcular la suma. ¿Puede mostrar otros divisores, más allá del 11, sin calcular 44+55+77 y usando solamente la definición de múltiplo o divisor de un número? ¿Podría enunciar algo más general?

2') La suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 7 ¿es un múltiplo de 11? ¿Es un múltiplo de 7? ¿Es un múltiplo de 11+7? En caso en que la respuesta sea negativa, dar condiciones para que ocurra. ¿Podrías enunciar algo general?

2'') ¿Y si ahora pensamos en la suma de un múltiplo de 8 más un múltiplo de 24? ¿Y en la suma de un múltiplo de 8 y un múltiplo de 12? ¿Podrías enunciar algo general? En caso en que la respuesta sea negativa, dar condiciones para que ocurra.

Más específicamente, mostraremos las resoluciones de la propia becaria y de dos alumnos de nivel medio a las preguntas subrayadas en los apartados 1), 1´´) y 2´) y el análisis realizado a las mismas con el propósito de ilustrar el proceso de formación vivido por la becaria. En primera instancia mostraremos las resoluciones a las tareas 1) y 1''), seguidas del análisis ontosemiótico correspondiente.

Resolución alumna del profesorado

1) Sean a y b dos múltiplos de 5. Como a es múltiplo de 5, entonces existe k perteneciente a N: $a=5.k$. Como b es múltiplo de 5, entonces existe k' perteneciente a N: $b=5.k'$. Queremos ver si el producto de a por b resulta múltiplo de 5. Para esto planteamos:

$a.b=(5.k).(5.k')=5.(k.5.k')$ utilizando la propiedad asociativa del producto.

Y por ley de cierre del producto en N, existe $k´´= k.5.k'$ perteneciente a N: $a.b=5.k''$, por lo tanto el producto de dos múltiplos de 5 es un múltiplo de 5.

1'') Sean c y d naturales, debemos ver si el producto es múltiplo de ambos.

Queremos ver si existe un k natural tal que $c.d=c.k$. Y tomando $k=d$, esto vale, por lo tanto el producto resulta múltiplo del natural c. De la misma manera, queremos ver si existe un k natural tal que $c.d=d.k$. Tomando $k=c$ y utilizando la propiedad conmutativa del producto en el segundo lado de la igualdad, esto vale. Por lo tanto, el producto de dos naturales es un múltiplo de ambos.

Resolución Alumno 1

(1) Si, porque 5.5 = 25   15.15 = 225 } y al dividirlo por 5 si queda
5.3 = 15   25.25 = 775 } un multiplo de 5

1'') – Si es múltiplos de ambos porque ambos forman parte de la tabla de ambos.
5 x 7 = 35   7 x 5 = 35
6 x 7 = 42   7 x 6 = 42
6 x 8 = 48   8 x 6 = 48

Resolución Alumno 2

1_ si es multiplo de 5 porque seria (x.5).(p.5) ej:
10.5 = 50
35.40 = 1400
150.25 = 3750
230.30 = 6900
555.5 = 2775
295.85 = 25075

1'' = A. dos numeros naturales a ; b
los multiplos de a se escriben (a.algo) y los de b se escriben (b.algo) entonses si se multiplica a.b el resultado es multiplo de a y de b

Análisis ontosemiótico de la producción de la alumna del profesorado

Objetos primarios

Procedimientos	Tomar dos múltiplos de *5* arbitrarios. Aplicar la definición algebrizada de múltiplo. Considerar el producto de ambos, operar algebraicamente, aplicando propiedades generales, para mostrar la existencia a un *k´´* tal que ese producto se puede escribir como *5.k´´*. Tomar dos naturales *c* y *d* cualesquiera y mostrar la existencia de un *k* (= *d*) natural tal que *c.d* se pueda escribir como *c.k* y de un *k* (=*c*) tal que *c.d* =*d.k*.
Definiciones	Definición de suma y producto. Definición algebrizada de múltiplo: *a* es múltiplo de *b* si y sólo si existe *k* perteneciente a *N*: *a*=*b.k*.

Propiedades	Disponibles: Propiedad asociativa del producto en *N*. Propiedad conmutativa del producto en *N*. Ley de cierre del producto en *N*. Emerge la validez de las siguientes propiedades: El producto de dos múltiplos del 5 es siempre un múltiplo de *5*. El producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos.
Argumentos	Validaciones deductivas: demostraciones de las propiedades en 1) y 1”).
Lenguaje	Coloquial y simbólico algebraico.

Procesos duales

Particularización - Generalización	Para demostrar propiedades generales para todo par de múltiplos de 5, por ejemplo, se comienza tomando un par de múltiplos de *5* particulares, aunque arbitrarios.
Descomposición - Reificación	Se reifican las propiedades emergentes a partir del análisis sistémico plasmado en las demostraciones deductivas.
Materialización - Idealización	Se utilizan los ostensivos *a* y *b* para evocar dos múltiplos de *5* cualesquiera. Se materializan a los múltiplos de *5* como *5.k* con *k* natural. Se utiliza el ostensivo *(5.k).(5.k')* para evocar el producto de dos múltiplos de *5* y se representa con *k´´* al natural que se obtiene al multiplicar *k.5.k´*. Se materializa a un múltiplo de *c* como *c.k* con *k* natural y las propiedades que se quieren demostrar con los ostensivos: *(5k)(5k')=5.k''*; *c.d=c.k*.
Representación - Significación	A la representación coloquial “*a* es múltiplo de *b*” se le da el significado (contenido) de que existe un *k* natural: *a=b.k*. Se significa a *k* como el número que existe tal que un múltiplo de *a* se escribe como este número por *~~a~~*. En particular, a la expresión *k.5.k’* se la significa como el número que existe y que multiplica a *5*. A la expresión *(5k)(5k')=5.k''*, por ejemplo, se le otorga el contenido de que el producto de dos múltiplos de *5* es múltiplo de *5*.

Esto es, la alumna del profesorado plantea demostraciones (argumentos deductivos) partiendo de una definición algebrizada de múltiplo (ese es su contenido a la expresión “ser múltiplo de” y utilizando, en consecuencia, un lenguaje simbólico-algebraico para materializar la misma), aplicando propiedades generales y reificando sin dificultad las propiedades emergentes.

Este análisis nos permite afirmar que la producción de la becaria alcanza un **nivel 3 de algebrización**, ya que se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Por ejemplo: *a.b=(5.k).(5.k') =5.(5.k.k')*. Incluso podemos reconocer en estas prácticas un **nivel 4 de algebrización**, dado el uso que se realiza de parámetros.

Análisis ontosemiótico de la producción del Alumno 1

Objetos primarios

Procedimientos	Buscar dos múltiplos de *5* particulares (que estén en la tabla del *5*). Considerar los productos de estos números por ellos mismos. Verificar que los resultados son múltiplos de *5* porque al dividirlos por *5* dan cociente exacto. Plantear casos particulares de productos de dos números observando que los mismos están en la tabla de ambos.
Definiciones	Definición de suma, producto y división de naturales. Definición de múltiplo de un número como aquel que aparece en la tabla del número. También se pone en juego la definición de múltiplo como aquel que, al dividirlo por el número, te da un cociente exacto.
Propiedades	Disponibles: Propiedad conmutativa del producto. Emerge la validez de las siguientes propiedades: El producto de dos múltiplos de *5* es un múltiplo de *5*. El producto de dos naturales es múltiplo de ambos.
Argumentaciones	No deductiva al validar una propiedad general a partir de casos particulares.
Lenguaje	Coloquial y simbólico aritmético.

Procesos duales

Particularización-Generalización	Se consideran casos particulares para validar las propiedades generales.
Descomposición–Reificación	Si bien se da respuesta en 1’’) a partir de trabajar con objetos unitarios, se logra reificar parcialmente a los múltiplos de un número en un sistema representativo de los múltiplos: las tablas de multiplicar.
Materialización – Idealización	Se materializa un múltiplo de *5* con el ostensivo *5x3*. Se utiliza la expresión “y al dividirlo por *5* si da un múltiplo de *5*” para evocar la idea de que, si al dividir el número por *5* da cociente exacto, el número es múltiplo de *5*. Se materializa la idea de que el producto de dos números naturales es un múltiplo de ambos a través de la expresión "ambos forman parte de la tabla de ambos"
Representación – Significación	A la expresión “ser múltiplo de” se le otorga el contenido de aquel número que aparece en la tabla de multiplicar, y de aquel que, al dividirlo por el número te da un cociente exacto. Por otra parte, a la expresión, por ejemplo: “*6.7=42*” se le da el contenido de que *42* es múltiplo de *6*.

Observamos así que, en esta resolución se utilizan una variedad de definiciones diferentes de múltiplos (se asignan distintos contenidos o significados a la expresión “ser múltiplo de”), ya sea para seleccionar múltiplos de un número (si está en la tabla) o para decidir si un número es múltiplo de otro (si el cociente da exacto), que no se ponen en relación. A diferencia de la resolución de la futura profesora, quien claramente dispone de una idea reificada de múltiplo, materializada en la definición algebrizada, este alumno sólo alcanza una reificación provisoria de la misma ligada a sus conocimientos aritméticos. El lenguaje utilizado es predominantemente coloquial y simbólico-aritmético, interviniendo objetos intensivos de grado 2, es decir, clases o tipos de intensivos de primer grado (números naturales), dado que a los números utilizados, por ejemplo, el *225* o el *775* se los considera a partir de la propiedad que poseen de que al dividirlos por 5 tienen cociente exacto. Además, intervienen algunas propiedades de las operaciones aplicadas en objetos intensivos de primer grado, todo lo cual nos lleva a situar esta actividad matemática en un **nivel 1 de algebrización**.

También se observa en esta práctica una dificultad para validar las propiedades generales, dado que las mismas se verifican sólo en casos particulares, considerándose esto suficiente para asegurar que son verdaderas y sin lograr una validación que logre dar cuenta de todos los casos. Esta dificultad, desde nuestra perspectiva teórica, puede ser explicada en términos de existencia de **conflictos semióticos** ligados al proceso de particularización-generalización, pero estrechamente vinculados, tal como se menciona en el párrafo anterior, con otros procesos, particularmente con el de reificación, dado que sólo logran reificar parcialmente la definición de múltiplo y con el de significación y materialización, al no explicitar a un múltiplo cualquiera de *5*, por ejemplo, como *5.k* con *k* natural.

Si bien no presentaremos aquí los cuadros correspondientes a los objetos primarios y procesos correspondientes a la **resolución del Alumno 2**, esbozaremos una síntesis del análisis efectuado. El mismo nos permite ver que, a diferencia del Alumno 1, en la pregunta 1) el Alumno 2 comienza utilizando un lenguaje simbólico algebraico al plantear el producto de dos múltiplos de *5* como *(x.5).(p.5)*. Sin embargo, luego trabaja con casos particulares tomando productos de múltiplos de *5* y comprobando que el resultado también es múltiplo de *5* "porque termina en *0* o en *5*" (esto, si bien no aparece escrito en su producción, lo declaran en una entrevista con el docente). Emplea, por lo tanto, otras definiciones de múltiplo: un natural es múltiplo de *5* cuando se puede escribir como otro natural por *5*; múltiplo de *5* es aquel que termina en *0* o en *5*. En 1´´) se desprenden de la observación de casos particulares, planteando que un múltiplo de "*a*" es de la forma "*a*. algo" y propone así una prueba más cercana a una demostración para validar la propiedad "el producto entre dos naturales *a* y *b* es múltiplo de *a* y de *b*". Podemos decir entonces, que interviene en esta resolución un lenguaje diferente, dado que se utilizan variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque sin poder transformarlas ni operar algebraicamente con ellas. Por lo que consideramos que la práctica de este alumno **bascula entre un nivel 1 y un nivel 2 de algebrización.**

En relación a los **conflictos semióticos**, al igual que en la práctica del alumno 1, se observa, al menos en el punto 1), dificultad ligada al proceso de generalización, dado que no puede pasar de una argumentación basada en casos particulares a una general, a pesar de que en este caso logra materializar a un múltiplo de 5 como $p.5$ o $x.5$. Sin embargo, claramente estos símbolos "p" y "x" están siendo utilizados como *arithmos,* es decir, remiten a números específicos, y no como *símbolos* a los que se les pueden aplicar operaciones y propiedades algebraicas. Esto se transforma en un conflicto semiótico que obstaculiza el desarrollo de una argumentación general, ya que dificulta la realización de transformaciones entre las expresiones en que intervienen los mismos. Es decir, observamos un problema de significación de las expresiones: "$p.5$" o "$x.5$", más allá de lo que se ve: una materialización incompleta. Asimismo, la falta de significación de "múltiplo de 5" como aquel para el cual "existe" un p natural de modo que el número se escribe como $p.5$, dificulta la comprensión de la necesidad de "mostrar" un número natural de modo que $(p.5).(x.5)$ se pueda escribir como 5 por ese número. El tránsito por estos procesos de significación, se tornan necesarios para avanzar en el proceso de generalización (planteo de una argumentación general).

A continuación, mostraremos las resoluciones de la becaria y de los dos alumnos del secundario ante la tarea 2´):

Resolución alumna del profesorado

2': Sean a un múltiplo de 11 y b un múltiplo de 7, entonces: Existe k natural: $a=11.k$ y existe k' natural: $b=7.k'$. **Queremos ver si la suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 es múltiplo de 11**, es decir si existe k'' natural: $a+b=11.k''$. No vale en general, contraejemplo: sean 44 y 28 múltiplos de 11 y 7 respectivamente, pero $44+28=72$ que no es múltiplo de 11, puesto que no existe l natural tal que $72=11.l$. Para que esto valga sería suficiente que el k' sea múltiplo de 11, ya que entonces $a+b=11k+7k'=11k+7.(11.q)=11(k+7.q)$ (utilizando propiedades asociativa y distributiva). Por lo tanto, existe $k''=k+7.q$ natural (por ley de cierre de la suma en N) tal que $a+b=11.\ k''$.

Queremos ver si la suma de un múltiplo de 7 más un múltiplo de 11 es múltiplo de $7+11$, es decir si existe k'' natural: $a+b=(11+7)k''=18\ k''$. No vale en general, contraejemplo: sean 22 y 7 los múltiplos de 11 y 7, entonces: $22+7=29$, y 29 no es múltiplo de 18.

Para que valga podemos establecer algunas condiciones suficientes:

-Si el número que existe tal que el múltiplo de 7 se escribe como este número por 7, y el que existe tal que el múltiplo de 11 se escribe como este número por 11 son iguales ($k=k'$) entonces dicha suma es múltiplo de 18. Justificación: $11k+7k=k(11+7)=k.18$.

- Si los múltiplos de 7 y 11 son múltiplos de 18 entonces la suma es múltiplo de 18: Debe existir un q natural tal que $7.k'=18.q$. Debe existir un s natural tal que $11.k=18.s$. Por lo tanto: $11k+7k'=(18s)+(18q)=18(s+q)$ por propiedad distributiva. Y $s+q$ es natural por ley de cierre de la suma en *N*. Entonces vemos que existe un natural tal que la suma de un múltiplo de *7* más uno de *11* se escribe como dicho natural por *18*.

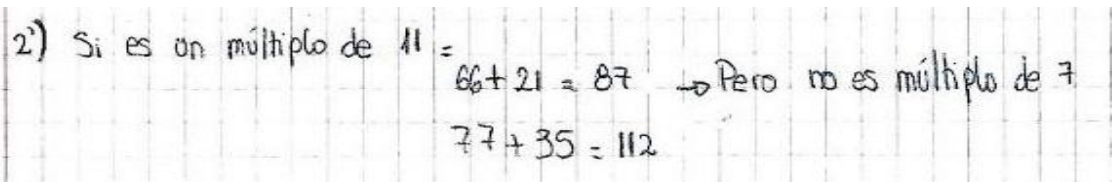
Generalizaciones:

-Dados dos números coprimos *m* y *n*, la suma de un múltiplo de *m* más un múltiplo de *n*, será múltiplo de m si y sólo si, el número que existe tal que el múltiplo de *n* se escribe como ese número por *n*, es múltiplo de *m*.

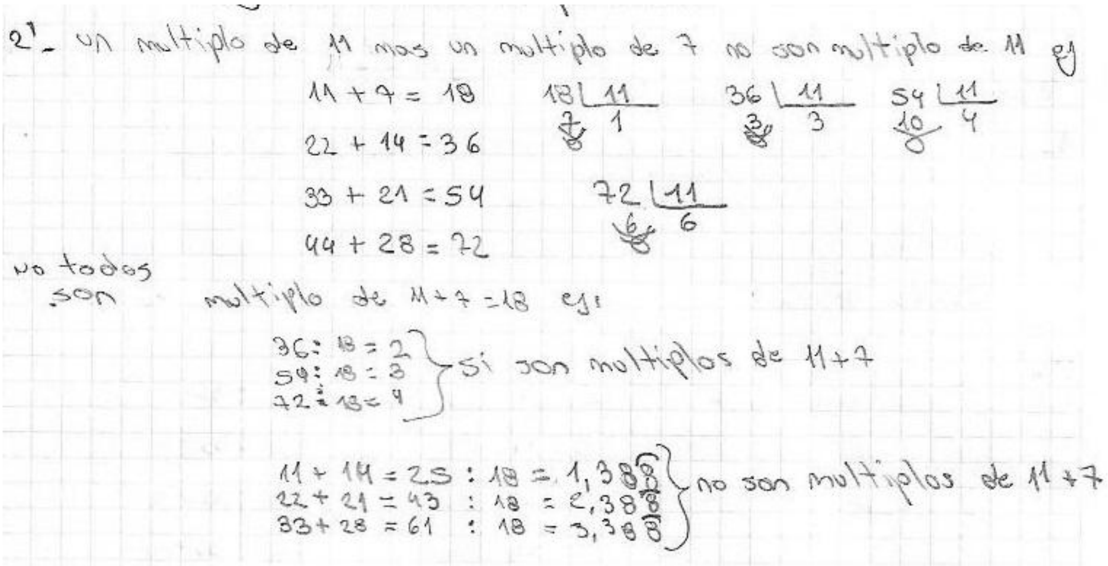
- Si los números que existen tal que un múltiplo de *m* se escribe como este número por *m*, y uno de *n* como este número por *n* son iguales, entonces la suma del múltiplo de *m* más el de *n* resulta múltiplo de *m+n*.

- Si los múltiplos de *m* y *n* son múltiplos de *m+n* entonces la suma resulta múltiplo de *m+n*.

Resolución Alumno 1


2) Si es un múltiplo de 11 = 66+21 = 87 → Pero no es múltiplo de 7
77+35 = 112

Resolución Alumno 2


2)_ un multiplo de 11 mas un multiplo de 7 no son multiplo de 11 ej
11 + 7 = 18   18 | 11   7   1   36 | 11   3   3   54 | 11   10   4
22 + 14 = 36
33 + 21 = 54   72 | 11   6   6
44 + 28 = 72
no todos son multiplo de 11+7 = 18 ej:
36: 18 = 2
54: 18 = 3
72: 18 = 4 } si son multiplos de 11+7
11 + 14 = 25 : 18 = 1,388
22 + 21 = 43 : 18 = 2,388
33 + 28 = 61 : 18 = 3,388 } no son multiplos de 11+7

Dada la extensión del trabajo, no presentaremos aquí el análisis ontosemiótico detallado de estas resoluciones, pero sí haremos referencia a algunos aspectos relevantes de las mismas.

En la resolución de la becaria se puede observar que la argumentación es fundamentalmente deductiva, incluyendo en esta la búsqueda de contraejemplos, aunque también se elaboran propiedades generales (dados dos números coprimos m y n, la suma de un múltiplo de m más un múltiplo de n, será múltiplo de m si y sólo si, …) a partir de un caso particular representativo (*7* y *11*), se emplean nuevas definiciones (números coprimos); se utiliza, además de las propiedades mencionadas en 1) y 1´´), la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en N. Emergen y se reifican propiedades de un mayor nivel de generalidad a partir de un trabajo con los casos particulares; por lo tanto se generan nuevos objetos intensivos de grado dos (dichas propiedades) a través de procesos de generalización, materialización, reificación y significación sobre dichos objetos. Dado que, además, se observa el uso de parámetros, la actividad matemática bascula entre un nivel 3 y un nivel 4 de algebrización.

El Alumno 1 responde que "si es múltiplo de *11*…" refiriéndose a la suma de un múltiplo de 1*1* más un múltiplo de *7*, recurriendo a dos ejemplos de sumas de un múltiplo de *11* más uno de *7*, haciendo referencia a que esas sumas no son múltiplos de 7. Además de un claro conflicto ligado al proceso de particularización-generalización (ya que se validan propiedades generales, incluso una que es falsa, a partir de la observación de un par de casos particulares), observamos aquí una posible dificultad en la asignación de significado o contenido a la expresión "múltiplo de *11*". Esta dificultad, vinculada al proceso de significación, también está asociada al proceso de reificación de una definición de múltiplo que mencionábamos en la resolución de 1) y 1´´).

El alumno 2 comienza expresando que "un múltiplo de *11* más un múltiplo de *7* no son múltiplos de *11*", seguido del planteo de varios casos particulares de sumas donde corroboran que el resultado no es múltiplo de *11* realizando la división por *11* y viendo que el resto no es *0* (declarado en la entrevista). Aquí ya se advierte el uso de otra definición de múltiplo y, por la forma en que materializa la propiedad, nuevamente el conflicto ligado a la sobre generalización, ya que de lo expresado podría interpretarse que "siempre" ocurrirá que la suma no será múltiplo de *11*, lo cual es falso. Por otra parte, expresan que "no todos son múltiplos de *11 + 7 = 18*", mostrando algunos de los casos tomados anteriormente en los que el resultado sí es múltiplo de *18* (dividiendo por *18* y viendo que el cociente es exacto) y planteando otros casos (contraejemplos) donde el resultado de la suma no es múltiplo de *18* (dividiendo por *18* y viendo que el cociente no es exacto). Otra definición de múltiplo está implícita aquí (un número es múltiplo de otro si la división del primero por el segundo da exacto). A pesar de haber podido asegurar que no vale la propiedad planteada, el alumno no puede dar condiciones para que la misma sea verdadera ni esbozar ninguna propiedad más general. Estos conflictos ligados a la significación, reificación y materialización de una idea de múltiplo, como ya se mencionó, se profundizan ante la ausencia de una mirada sistémica de lo realizado que no les permite ver qué es lo que caracteriza a esos primeros casos particulares observados (donde la suma sí es múltiplo de *18*), a diferencia de los otros, por ejemplo que los dos sean múltiplos de *18*.

Reflexiones finales

El proceso de estudio e investigación llevado a cabo por la becaria la habilitó para realizar un uso eficaz de las herramientas que provee el EOS, logrando una mirada diferente de su propia producción y la de los alumnos de la escuela secundaria. Le permitió, entre otras cosas, tomar conciencia de la complejidad de la actividad matemática y de los objetos y procesos que están involucrados en esas prácticas, de los diferentes niveles de algebrización en que puede ubicarse o bascular la actividad matemática en cada caso e identificar y dar explicaciones a las dificultades evidenciadas de los alumnos, desde una perspectiva que pondera la dimensión semiótica. También le permitió tomar conciencia de las "distancias" entre los significados personales del futuro profesor (que se transforman en referenciales al momento de enseñar) y los significados personales de los alumnos del secundario en relación a prácticas matemáticas de Divisibilidad.

En este sentido, como formadores de profesores, podemos decir que este espacio fue sumamente fructífero para la formación de la becaria y consideramos que podría ser de mucha utilidad plantear un uso con sentido de estas herramientas en el ámbito de la formación inicial del profesor de matemática. Por otra parte, nos llevó a observar un hecho que nos parece preocupante: la actividad matemática de los futuros profesores- a partir de cierto nivel- aparece como una actividad plenamente algebrizada que no puede concebirse sin el uso pleno del instrumento algebraico. Esto puede constituirse en un problema para quienes han elegido "enseñar matemática" dado que la actividad matemática de los estudiantes de la escuela secundaria, si las tareas lo permiten, se desarrolla en niveles de algebrización intermedios, lo cual se puede transformar en un obstáculo para el futuro docente al momento del análisis de la producciones de los estudiantes, su entrada en "diálogo con ellos" y de la gestión misma de la clase.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En M. J. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.

Chevallard, Y. (2005). Didactique et formation des enseignants. En B. David (Ed.), *Impulsion*s *4* (pp. 215-231). Lyon, Francia: INRP.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén, España: SEIEM.

Godino, J.D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M.R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 177-142.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educaçao Matemática*, *7*(2), 1-21.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 93-98). Barcelona, España: Graó.

Sessa, C. (Coord.). (2011). *La formación en las carreras de profesorado en matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de la Nación. Recuperado de http://repositorio.educacion.gov.ar:8080/dspace/bitstream/handle/123456789/110038/04_1._La_formacion_en_las_carreras_de_profesorado_de_Matematica_1.pdf?sequence=1

Producción de material con la plataforma moodle para clases de matemática en educación superior. El caso de la FCEIA, UNR

NATALIA LANDALUCE

natalias.landaluce@gmail.com

VALERIA DONATO

valeria.donato.mena@gmail.com

LETICIA PERALTA

prof.leticia.peralta@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA). Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (FCECON). Universidad Nacional de Rosario (UNR)

Resumen

Este trabajo comparte reflexiones respecto a la producción de material para clases de Matemática en Educación Superior mediante plataformas online, en el marco de un Proyecto de Investigación conformado por docentes, egresados y estudiantes del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. Entre las acciones previstas del proyecto, se propone indagar acerca de la significatividad de los materiales producidos en diversos ámbitos educativos y reconocer necesidades formativas en el Profesorado, en materia de entornos de Educación a Distancia. El material producido tuvo como objetivo favorecer el aprendizaje y complementar el cursado presencial de una asignatura de asistencia masiva. La elaboración del material se sostuvo en el espacio Comunidades del Campus Virtual de la Universidad, a través de la plataforma Moodle. El proceso de producción se presentó como un desafío novedoso para las docentes, en el cual fue necesario adquirir conocimientos técnicos específicos respecto al uso de la plataforma, para poder vincularlos y amalgamarlos con decisiones pedagógicas en relación con los contenidos seleccionados. El análisis de esta experiencia permite, en primera instancia, plantear algunas implicaciones en torno a la formación de profesores en Matemática para abordar la producción de materiales en plataformas educativas.

Introducción

El Proyecto de Investigación que enmarca este trabajo se denomina “La Formación del Profesor para desempeñarse en Entornos de Educación a Distancia. El Caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)” (1ING584, 2018-2021) radicado en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la UNR. Su eje principal consiste en estudiar características particulares del conocimiento tecnológico-pedagógico-disciplinar (TPCK por sus siglas en inglés; Mishra y Koehler, 2006), en este caso matemático, cuando se pone en juego a su vez en entornos no presenciales (o semipresenciales).

El equipo de investigación se propone, entre sus acciones, explorar y utilizar variadas plataformas digitales, con el fin de producir diferentes materiales que involucren un trabajo disciplinar de calidad, que diversifique los registros de representación, las puestas en situación y consecuentemente los modos de pensamiento. En consonancia con este propósito, durante el primer año de ejecución de este proyecto se exploró la plataforma Google Classroom y se produjeron materiales relativos al nivel medio y terciario (Sgreccia, Donato y Peralta, 2018) y durante el segundo año se presentaron propuestas en Moodle para favorecer la comprensión matemática en el ciclo introductorio de carreras de Ciencias Económicas de la UNR (Donato, Landaluce y Peralta, 2019), en donde se compartieron específicamente algunas adaptaciones realizadas en los contenidos matemáticos seleccionados para ser abordados con el objetivo de complementar las clases presenciales. En este trabajo se pretende avanzar en la reflexión acerca de los conocimientos que los profesores en Matemática ponen en tensión, para afrontar el desafío de producir materiales a través de plataformas digitales.

Encuadre conceptual

Se adopta el modelo teórico TPCK (Technological Pedagogical Content Knowledge, Mishra y Koehler, 2006), con bases en las categorías propuestas por Shulman (1986) en las que se amalgaman distintos tipos de conocimiento para la tarea de enseñanza de las disciplinas empleando tecnologías. El TPCK supone integrar las TIC criteriosamente en las clases, lo que implica revisar y resignificar los conocimientos pedagógicos y disciplinares que acompañen a ese tipo de actividades.

Por otro lado, la modalidad blended learning promueve a su vez cambios en la forma convencional de aprender y de utilizar los recursos disponibles en la red

(Bartolomé, 2004). En específico, la plataforma Moodle basa su diseño en los principios de la pedagogía constructivista social, con el objetivo de generar un entorno que promueva el aprendizaje a través de cursos y aulas virtuales con variados recursos y herramientas que permiten que el docente diseñe diversas propuestas para guiar el proceso de aprendizaje en este tipo de entorno.

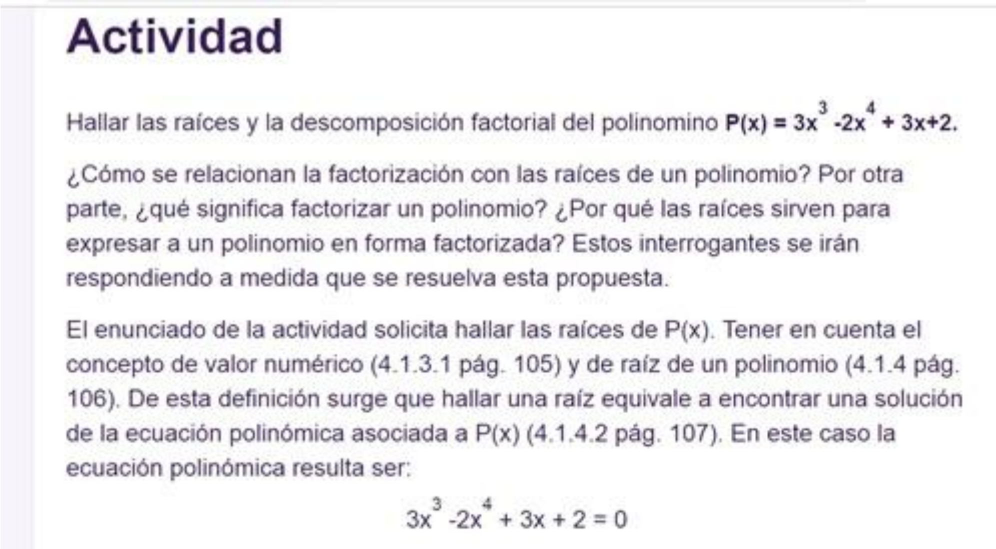
Precisamente "Comunidades" conforma el Campus Virtual de la UNR, que trabaja bajo una plataforma Moodle. Las posibilidades de esta plataforma educativa han permitido sustentar y producir material educativo, utilizando en forma criteriosa los recursos tecnológicos, con el fin de promover aprendizajes superadores.

La experiencia

La asignatura donde se llevó a cabo la experiencia es Matemática I, del primer año del Ciclo Introductorio de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística de la Universidad Nacional de Rosario, correspondiente a las carreras de Contador Público, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía. La cátedra es de dictado cuatrimestral, con una carga horaria total de 96 horas reloj, comprendiendo seis horas semanales de clases presenciales, que se distribuyen en dos encuentros de tres horas cada uno (uno de carácter teórico y el otro práctico). Las sedes donde se dicta dicha asignatura son Rosario, Casilda, Cañada de Gómez, Venado Tuerto, San Nicolás y Marcos Juárez. Las cuatro primeras están en la provincia de Santa Fe y las dos restantes en las provincias aledañas de Buenos Aires y Córdoba, respectivamente. Durante el primer cuatrimestre, Matemática I se dicta en todas las sedes con un total de 37 comisiones. En el segundo cuatrimestre, en cambio, sólo se habilitan cuatro comisiones de la sede Rosario ("recursado"). Alrededor de unos 2500 estudiantes por año cursan esta asignatura, que es correlativa con Matemática II (primer año) y Matemática Financiera (segundo año). En todas las comisiones se utiliza el libro "Álgebra y Geometría Analítica para Ciencias Económicas" (Anido *et al.*, 2012) que fue escrito oportunamente por los docentes de la cátedra. La coordinación general de la cátedra propone una programación predeterminada para el desarrollo de las clases que los docentes de todas las comisiones deben tratar de respetar. Esto, si bien ayuda a ordenar y prever acciones conjuntas entre las comisiones, también implica cierta rigidez en los tiempos y una limitación en las oportunidades para profundizar los aprendizajes durante los encuentros presenciales. En este contexto, consideramos que resulta beneficiosa la generación de materiales complementarios desde la virtualidad, que puedan propiciar una mayor vinculación entre los conceptos abordados dando lugar a procesos de enseñanza y aprendizaje superadores, que se amolden a diferentes ritmos, rutinas y registros.

En esta experiencia, se trabajó con algunos conceptos del contenido matemático "Polinomios" del Capítulo 4 del libro mencionado (Anido *et al.*, 2012, pp.89-117). Se utilizaron las herramientas "Actividad" y "Cuestionario" de la plataforma Moodle, a través de las cuales se propuso la resolución de una guía de trabajo y una evaluación de autocorrección, respectivamente. El material generado se puso a disposición de aproximadamente 100 alumnos, inscriptos en cuatro comisiones del recursado de la cátedra, en la sede de Rosario.

La propuesta diseñada apunta a que los estudiantes autogestionen una revisión de los conceptos trabajados en los encuentros presenciales. Se propuso un problema inicial (Figura 1), cuya resolución permite desarrollar variados procedimientos que se presentan en forma detallada y fundamentada, lo que permite recorrer ampliamente el tópico "Polinomios". A medida que el estudiante resuelve la actividad, encuentra en la guía la explicación (Figura 2) de ciertos procedimientos y las referencias necesarias para ubicar los fundamentos de cada acción realizada en el material bibliográfico utilizado en la materia. Y, a su vez, posibilita una concreta articulación entre los conceptos formales y la aplicación de los mismos. La redacción del desarrollo de la actividad apunta a romper con las típicas y rotundas clasificaciones de "lo teórico" y "lo práctico", invitando a que los estudiantes puedan tejer redes que vinculen y resignifiquen lo aprendido en todas sus clases (Figura 3).



Actividad

Hallar las raíces y la descomposición factorial del polinomino **$P(x) = 3x^3 -2x^4 + 3x+2$.**

¿Cómo se relacionan la factorización con las raíces de un polinomio? Por otra parte, ¿qué significa factorizar un polinomio? ¿Por qué las raíces sirven para expresar a un polinomio en forma factorizada? Estos interrogantes se irán respondiendo a medida que se resuelva esta propuesta.

El enunciado de la actividad solicita hallar las raíces de P(x). Tener en cuenta el concepto de valor numérico (4.1.3.1 pág. 105) y de raíz de un polinomio (4.1.4 pág. 106). De esta definición surge que hallar una raíz equivale a encontrar una solución de la ecuación polinómica asociada a P(x) (4.1.4.2 pág. 107). En este caso la ecuación polinómica resulta ser:

$$3x^3 -2x^4 + 3x + 2 = 0$$

Figura 1. Actividad propuesta y extracto de su resolución

Se podría utilizar cualquier herramienta que permita resolver esa ecuación polinómica. Por ejemplo, si el polinomio es de grado 2, la ecuación polinómica asociada a él podría resolverse aplicando la fórmula resolvente y de esa manera obtener las raíces (reales o complejas) del polinomio. Pero en este caso, la ecuación resulta ser de grado 4 y no es bicuadrática, por lo que no se cuenta con herramientas para resolverla de manera directa. ¿Entonces, cómo avanzar? Es posible elegir valores y verificar si satisfacen o no la ecuación. Por ejemplo:

P(0)= 2, por lo que 0 no es raíz del polinomio.

P(1)=6, entonces 1 no es raíz del polinomio.

P(-1)=-6, tampoco -1 es raíz del polinomio.

P(2)=0, por lo tanto **2 es una raíz del polinomio**.

Figura 2. Explicación acerca de la resolución de una ecuación polinómica

¿Existen otras raíces? El Teorema de las n raíces (4.1.5.1 pág. 108) permite asegurar que este polinomio tiene a lo sumo 4 raíces distintas (reales o complejas) por ser un polinomio de grado 4. Este teorema muestra a su vez, una forma de expresar un polinomio de manera factorizada y permite comprender la relación entre las raíces y la factorización de un polinomio.

Por lo tanto $P(x) = 3x^3 - 2x^4 + 3x + 2$ tiene a lo sumo 4 raíces distintas. ¿Cómo hallar las restantes? Evidentemente probar valores no será una metodología eficaz, ya que las raíces pueden asumir cualquier valor real, inclusive pueden ser números complejos. ¿Es útil saber que 2 es una raíz del polinomio? El Teorema del factor (4.1.4.1 pág. 107) garantiza que (x-2) es factor de P(x), siendo posible reescribirlo de la siguiente manera:

P(x)=(x-2).C(x), donde C(x)=P(x):(x-2) es el cociente de esta división.

Figura 3. Extracto relativo a la factorización de polinomios

En cuanto a la evaluación elaborada, se diseñó un cuestionario con opción de respuestas múltiples, con la posibilidad de realizarlo en varios intentos (Figuras 4 y 5). La corrección del instrumento se realiza en forma automática, pregunta a pregunta, ofreciendo a la vez retroalimentaciones en el caso de que las respuestas no sean correctas, con el objetivo de que los estudiantes puedan revisar sus resoluciones.

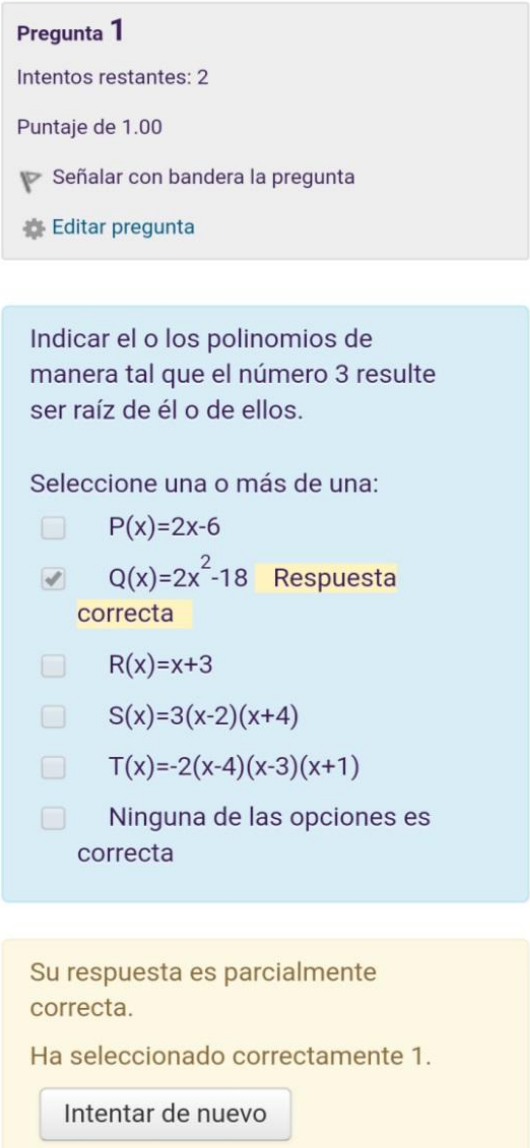


Figura 4. Ejemplo de pregunta y respuesta con retroalimentación

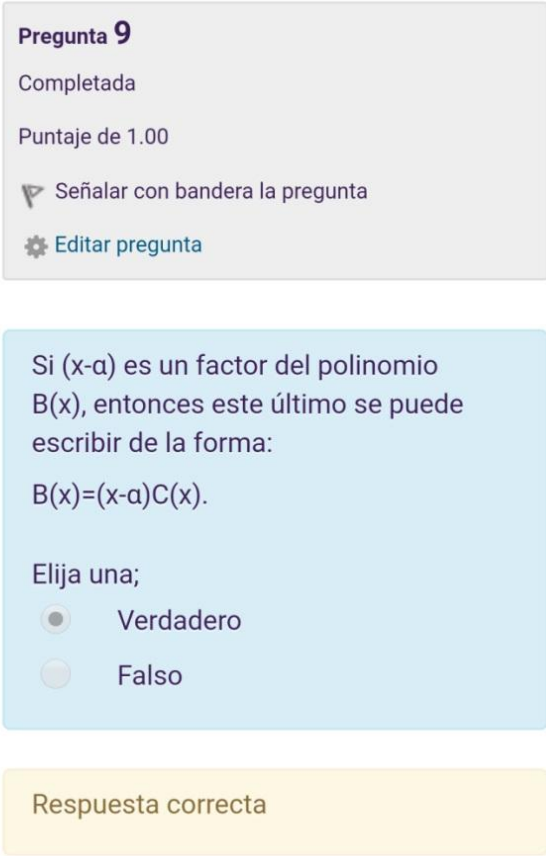


Figura 5. Ejemplo de pregunta y validación de respuesta

Al finalizar el cuestionario, el alumno obtiene un informe de su desempeño que incluye, entre otra información de interés. el puntaje obtenido (Figura 6).

Intentos	1, 2
Comenzado en	sábado, 31 de agosto de 2019, 13:09
Estado	Terminado
Finalizado en	sábado, 31 de agosto de 2019, 13:20
Tiempo empleado	10 minutos 52 segundos
Puntos	15.00/20.00
Calificación	**7.50** de un total de 10.00 (**75**%)
Comentario de retroalimentación	Muy buen trabajo

Figura 6. Ejemplo del detalle del informe final

Resulta importante resaltar que durante el proceso de elaboración surgieron varios interrogantes, muchos acerca de cuestiones técnicas, pero también sobre aspectos pedagógicos y didácticos, ya que todos se encuentran vinculados y tensionados entre sí, como muy pertinentemente indica el TPCK. En primer lugar, se reflexionó acerca de cuáles tópicos matemáticos ameritan una profundización mayor mediante encuentros presenciales. Se planteó el objetivo de generar una propuesta en la plataforma que permita complementar de manera significativa el proceso de aprendizaje de un modo integral, superando las tradicionales dicotomías que surgen entre las “clases de teoría” y las “de práctica” (incluso estando separadas así en la cursada presencial). También se pensó en una propuesta que los estudiantes puedan abordar de manera autónoma.

Se consideraron algunas alternativas en cuanto al tratamiento de ciertos contenidos matemáticos para cumplir los objetivos planteados, que se fueron adaptando y ajustando a medida que se avanzó en la exploración de las herramientas disponibles en la plataforma. Fue necesario realizar varias pruebas para comprobar las prestaciones, el alcance y el potencial de las mismas, con el fin de analizar luego cuál de ellas podría resultar accesible y pertinente para las propuestas esbozadas.

Es decir que, acorde al TPACK, para poder generar aprendizajes superadores a través del uso de la tecnología, fue necesario tomar decisiones pedagógicas, didácticas y técnicas, en torno al tratamiento de determinados contenidos, ubicándonos en el contexto específico. Resultó indispensable para el diseño del material que esas decisiones sean meditadas y consensuadas, a partir de la planificación, revisión, reflexión y el análisis holístico de las propuestas que se fueron ensayando.

En varias de las clases presenciales se destinó un espacio tanto para la matriculación de los estudiantes en Comunidades como para el ingreso al Aula Virtual de la asignatura. Además, en varias oportunidades se evacuaron dudas de carácter técnico y disciplinar, y los alumnos pudieron realizar consultas con el propósito de avanzar en las actividades planificadas. Pese a ello, y a que se mostraron interesados por la propuesta en todo momento, varios no realizaron todas las actividades de la plataforma. Cabe destacar, que al ser un material complementario -no obligatorio- muchos priorizaron resolver lo propuesto únicamente por la bibliografía de referencia indicada en el libro de cátedra.

La plataforma arroja un reporte de Resultados para cada cuestionario donde se detalla de forma general la cantidad de intentos de resolución en progreso, atrasados, terminados y nunca enviados de los alumnos (Figura 7).

Figura 7. Reporte de Resultados del cuestionario "AUTOEVALUACIÓN Polinomios 1° parte"

Además, dicho reporte brinda información particular y detallada por pregunta y por alumno. Aproximadamente un 50% de los alumnos registrados en el Aula Virtual al comienzo de la cursada intentó resolver el cuestionario "AUTOEVALUACIÓN Polinomios 1° parte", y sólo la tercera parte de ellos lo terminó, obteniendo así un informe de su desempeño, detallado por pregunta, una calificación y un comentario de retroalimentación (Figura 8).

UNR Comunidades

Descargar datos de tabla como Valores separados por comas (.CSV) Descargar

Nombre / Apellido(s)	Dirección de correo electrónico	Estado	Calificación/10.00	Comentario de retroalimentación	Respuesta 1	Respuesta 2	Respuesta 3	Respuesta 4	Respuesta 5	Respuesta 6
Victoria [redacted] Revisión del intento	[redacted]@hotmail.com.ar	Nunca enviados	-	-	-	-	-	-	-	-
Sol [redacted] Revisión del intento	[redacted]@gmail.com	Terminados	9.50	Excelente trabajo	✔ P(x)=2x-6 ; Q(x)=2x2-18 ; T(x)=-2(x-4)(x-3)(x+1)	✔ 3 raíces distintas	✔ P(x)=(x-4)(x-2)(x+1) ; P(x)=(x-2)(x+1) ; P(x)=-4(x-2)(x+1)	✔ 3 y -2	✔ P(x)=5(x-2)(x+1) ; P(x)=(x-2)(x+1)(x+5)	✔ A(x)=(x-1)2
Melanie [redacted] Revisión del intento	[redacted]@gmail.com	Nunca enviados	-	-	R(x)=x+3	-	-	-	-	-
Gimena [redacted] Revisión del intento	[redacted]@hotmail.com	Nunca enviados	-	-	-	-	-	-	-	-
Santiago [redacted] Revisión del intento	[redacted]@gmail.com	Terminados	7.00	Muy buen trabajo	✔ P(x)=2x-6 ; Q(x)=2x2-18 ; T(x)=-2(x-4)(x-3)(x+1)	✔ 3 raíces distintas	✔ P(x)=(x-4)(x-2)(x+1) ; P(x)=(x-2)(x+1) ; P(x)=-4(x-2)(x+1)	✔ 3 y -2	✔ P(x)=5(x-2)(x+1) ; P(x)=(x-2)(x+1)(x+5)	✘ Ninguna de las anteriores

Figura 8. Algunos resultados del cuestionario por alumno y por pregunta

Cabe destacar que el acompañamiento brindado a los alumnos en lo presencial y virtual a través de mensajes y/o correos electrónicos por parte del docente se puede fortalecer utilizando otras vías de comunicación, en las que participan otros integrantes. Por tal motivo, un espacio de socialización a través de un foro de consultas por cada actividad o tópico en la asignatura, es fundamental para favorecer el trabajo colaborativo y aprendizaje entre pares. La implementación de este recurso, entre otros, está previsto para el cursado en el 2020 (Figura 9).

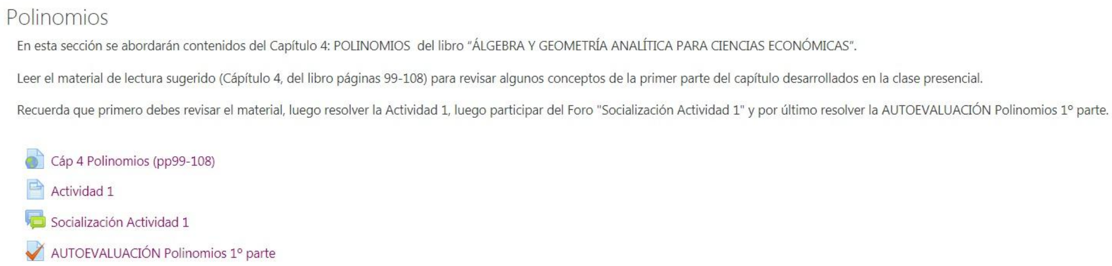


Figura 9. Foro de socialización de actividades

Algunos resultados y reflexiones

Luego de realizar el relevamiento de algunos datos, se observaron ciertas inconsistencias entre la información que brinda la plataforma y la que se esperaba obtener, por lo que fue necesario realizar consultas técnicas a la Secretaría de Educación a Distancia de la Facultad. Esta situación evidenció falta de experticia por parte de las autoras en cuanto al manejo de las herramientas del Campus. La información obtenida a través del Aula virtual fue escasa, por lo que no se pudo realizar un análisis cuantitativo de los datos. Pese a esta realidad, al ser Comunidades el único espacio con el que cuenta la Facultad donde se realizó el estudio para desarrollar actividades que involucran la educación a distancia, y que no existen antecedentes de trabajos de investigación vinculados al uso del Campus Virtual en la cátedra de referencia, la experiencia realizada resultó, además de innovadora, valiosa y significativa para la comunidad educativa.

La experiencia descripta resultó ser altamente desafiante y también enriquecedora. Las autoras reconocen que en su formación inicial como docentes, el contacto con recursos tecnológicos fue escaso y ninguna instancia fue mediada por aulas virtuales. Esto más que marcar un déficit de la propuesta formativa, indica el devenir de las TIC que se han incorporado gradualmente en los distintos espacios curriculares, sobre todo en la última década -período en que las autoras ya no eran estudiantes de Profesorado-. Actualmente en algunas asignaturas del Profesorado en Matemática de la UNR se trabaja con aulas virtuales y en su plan de estudios (2018) existen espacios que contemplan el uso de recursos tecnológicos.

El ejercicio de la profesión advierte que en la actualidad resulta muy importante saber trabajar con este tipo de recursos. Inclusive, en muchas instituciones el uso de las plataformas educativas es obligatorio. Particularmente, y ante situaciones que exceden al ámbito educativo como una pandemia a nivel mundial, la modalidad a distancia (por distintos medios) es la única opción para continuar con los procesos de enseñanza-aprendizaje. Es por ello que la capacitación en este campo en la carrera de grado desde los primeros años es fundamental, ya que no se trata solo de utilizar las aulas virtuales como repositorios de documentos, sino de aprender a generar materiales didácticos para enseñar y aprender Matemática en ese tipo de aulas, aprovechando recursos que son exclusivos de esos entornos digitales y promueven procesos de aprendizaje superadores.

En este sentido, cabe destacar que las unidades académicas y la propia Universidad han ido ofreciendo capacitaciones en cuanto al uso de la plataforma Moodle. Estas instancias formativas han resultado muy valiosas para que los docentes se capaciten en servicio, vayan adquiriendo experticia en el manejo de la plataforma y en la confección de propuestas específicas para el año 2020. En la actualidad existen varias plataformas, aplicativos y software que pueden enriquecer, complementar y potenciar las clases presenciales. Y, a su vez, abren el horizonte de las posibilidades para los procesos de aprendizajes virtuales o completamente a distancia. Todos esos recursos se actualizan y proliferan al vertiginoso ritmo en el que las tecnologías evolucionan. Es por ello que resaltamos la importancia de tomar conciencia de la necesidad de una capacitación inicial y continua para los profesores, en cuanto al uso de las TIC en sus prácticas y también en cuanto a los procesos dialógicos de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática en entornos no presenciales. Se trata, entonces, de un uso tanto didáctico específico como comunicacional (Sgreccia y Carranza, 2017) de las herramientas que tenemos a disposición, y cada vez con mayor proliferación. Aprovecharlas significativamente depende de nosotros.

Referencias bibliográficas

Anido, M., Bella, R., Copello, S., Craveri, A., Cuciarelli, L., Fascella, M., Galván, C., Giorgetti, H., Gómez, M., Koegel, L., Lardone, M., Mansilla, S., Mugherza, M., Nieto, L., Nieto, M., Pérez Parachú, M., Pluss, I., Sacristá, R., Semitiel, J., Spengler, M., Spinelli, A. y Terán, T. (2012). *Álgebra y Geometría Analítica para Ciencias Económica.* (2da. edición). Rosario, Argentina: Foja Cero.

Bartolomé, A. (2004). Blended Learning. Conceptos básicos. Píxel-Bit. *Revista de Medios y Educación*, (23), 7-20.

Donato, V., Landaluce, N. y Peralta, L. (2019). Propuesta en plataforma Moodle para favorecer la comprensión matemática en el Ciclo Introductorio de Ciencias Económicas de la UNR. En C. Russo, L. Garbarini y M. Quiroga (Coords.), *8º Seminario Internacional Red Universitaria de Educación a Distancia RUEDA*. Tilcara, Argentina.

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Sgreccia, N. y Carranza, P. (2017). Comunicación promovida entre profesores de matemática al interactuar mediante grupos Facebook. En G. Fioriti (Comp.). *Recursos tecnológicos en la enseñanza de la Matemática. Reflexiones de docentes e investigadores* (pp.107-139). Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de San Martín y Miño y Dávila.

Sgreccia N., Donato V. y Peralta L. (2018). Posibilidades de la plataforma Google Classroom para el trabajo matemático en entornos no presenciales. En C. González (Org.), *XIII Congreso Argentino de Educación Matemática CAREM*. La Plata, Argentina.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Reflexiones didáctico-matemáticas en torno a la desigualdad triangular

JORGE EZEQUIEL ALMIRÓN
ezequielalmrone@gmail.com
GUSTAVO FERNANDEZ LEZCANO
gustavoflezcano@gmail.com
Facultad de Ciencias Exactas Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste

Resumen

En este trabajo se hace un recorrido de lo que fue la elaboración de una secuencia de actividades durante el cursado de la materia Didáctica de la Matemática y Pasantía en la FaCENA –UNNE. El contenido fue Desigualdad Triangular y se desarrolló en 7°/1° año de un colegio secundario común de la ciudad de Corrientes.

Realizamos una búsqueda y análisis de bibliografía específica tanto en libros utilizados durante nuestra formación docente como en organizaciones matemáticas de distintos autores en libros de textos del secundario. A partir de este análisis, se construyó una propuesta de trabajo en la que problematizamos el contenido a abordar con los alumnos.

Nos propusimos que sean los alumnos los que construyan la propiedad geométrica para validar la existencia de un triángulo dada las medidas de tres segmentos. Esta construcción involucró un conjunto de actividades que permitió que discutan, reflexionen, elaboren conjeturas y las validen a partir de argumentos generados por ellos mismos.

Introducción

En el año 2018, durante el cursado de la materia Didáctica de la Matemática y Pasantía en la FaCENA-UNNE se nos propuso elaborar una secuencia didáctica que nos permita trabajar el concepto de "*Desigualdad Triangular*" con alumnos del 1°/ 7° año de Educación Secundaria. A partir de esta demanda iniciamos una búsqueda de información sobre el tema, así como discusiones sobre actividades posibles con distintos interlocutores (compañeros, profesoras de la materia y profesor del aula del secundario).

En el Diseño Curricular Jurisdiccional del Ciclo Básico de la Secundaria Orientada de la Provincia de Corrientes (s.f.) se sugiere, en relación al Teorema de la Desigualdad Triangular, para 1°/7° año "Proponer situaciones problemáticas que requieran: Conjeturar y argumentar acerca de las propiedades: triangular y de la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros" (p.107). Más adelante para 2°/1° año se sugiere "Proponer situaciones problemáticas que requieran: Construir triángulos que posibiliten la exploración de condiciones necesarias y suficientes para alcanzar dicho objetivo" (p.113).

En la bibliografía con la que trabajamos durante nuestra formación docente en la FaCENA-UNNE nos encontramos con diferentes enunciados del Teorema de la Desigualdad triangular. Según Tirao (1978): "En todo triángulo la longitud de un lado es menor a la suma de las longitudes de los otros dos" (p. 36). Según Puig Adam (1980): "Todo lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos. Corolario: Todo lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros" (p. 61).

Como se puede observar lo que afirman ambos autores es que, si la figura de la que se trata es un triángulo, se cumplen ciertas condiciones sobre los lados. Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

En particular, del segundo enunciado se pueden establecer 6 desigualdades. Con lo cual se tiene:

Enunciado 1: *Dado un triángulo ABC se verifican las siguientes relaciones*

$$AB-BC<AC<AB+BC \wedge AC-BC<AB<AC+BC \wedge AB-AC<BC<AB+AC.$$

En el primer enunciado se habla de *"suma de longitudes"* y en el segundo se puede entender que refiere a segmentos. Desde el punto de vista matemático operar con segmentos supone conceptos de la geometría "pura", en cambio al hablar de longitudes refiere a introducir una métrica en los objetos geométricos.

En Baldor (2004): “Se admite el siguiente postulado: La distancia más corta entre dos puntos es el segmento que las une” (p. 12). El cual se encuentra en el apartado posterior a la definición de segmento.

En este último libro la Desigualdad Triangular es un caso particular del postulado citado y se puede observar en el texto que el autor utiliza este postulado en las demostraciones de las propiedades y teoremas que posteriormente enuncia.

En síntesis, los autores consultados dan cuenta de afirmaciones sobre triángulos que ya existen, tal como mencionamos más arriba y, por otro lado, los conocimientos en lo que se apoyan varían en función de la organización que proponen.

Este recorrido por la bibliografía que forma parte de las referencias matemáticas como futuro profesor, nos conduce a ciertas reflexiones al momento de pensar la enseñanza: ¿deberíamos arribar con los alumnos del secundario a alguno de estos enunciados? o ¿deberíamos partir de estos conceptos a modo de teoría previa? ¿Habría que realizar adaptaciones? ¿Incluir la métrica o no? etc.

Ahora bien, en una revisión de las propuestas de libros de textos para el secundario sobre construcción de triángulos podemos observar distintos recortes. Por un lado, están las propuestas que enuncian las propiedades de los triángulos (Figura 1).

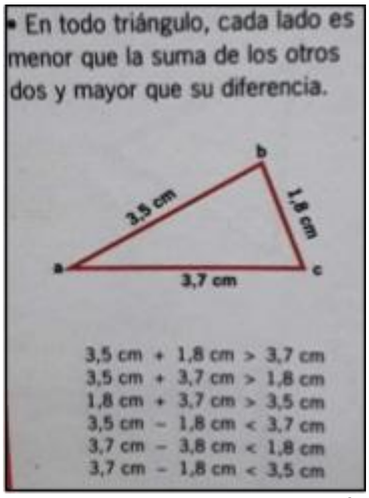


Figura 1. Propiedad del libro Matemática 7. Editorial Estrada (2003)

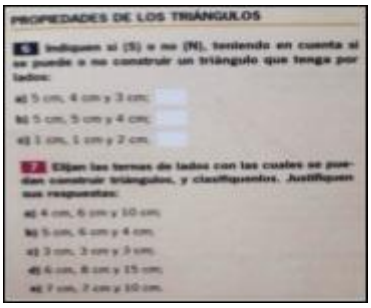


Figura 2. Actividad del Libro Matemática 7. Editorial Estrada (2003)

Este tipo de propuestas guarda relación con la bibliografía de referencia analizada anteriormente, en el sentido de que se inicia el estudio del tema por el enunciado de las relaciones que verifican los lados de un triángulo. Posteriormente se incluyen actividades (Figura 2) en la que no queda claro la relación entre lo que verifica todo triángulo (aporte teórico) y el análisis en términos de condiciones de existencia del triángulo que deben realizar los alumnos. Esto último supone una interpretación de la teoría -así enunciada- en términos de equivalencia con el contrarrecíproco: "si alguna de las longitudes dadas es mayor que la suma de las otras dos, entonces no existirá un triángulo con esas longitudes". Esta "traducción" de la propiedad al contrarrecíproco representa para ellos un salto informacional importante que habrá que analizar al momento de tomar decisiones en relación con la enseñanza.

Alejados de recortes como los anteriores y siguiendo a Saiz y Parra (2012), Sessa, Borsani, Lamela y Murúa (2015a, 2015b) nos ubicamos en una perspectiva constructivista del aprendizaje.

¿Cómo posicionarnos como profesores de tal manera que los alumnos construyan una condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo y en dónde la validación esté al alcance de ellos? ¿Cuáles son las actividades que nos ayudarán a esta construcción?

La decisión de empezar por preguntar a los alumnos sobre las condiciones de existencia de un triángulo sin ningún aporte teórico previo, ¿qué relación tiene con los enunciados anteriores? en todos los casos se enuncian relaciones dado un triángulo, como es el caso del "*Enunciado 1*".

Y si se verifican primero esas relaciones entre las longitudes, ¿podríamos establecer que se puede construir un triángulo? Esto equivale a preguntarnos por el recíproco del teorema de la desigualdad triangular:

Enunciado 2: *Dado los segmentos AB, AC, BC, si se verifica que:*

$$AB-BC<AC<AB+BC \wedge AC-BC<AB<AC+BC \wedge AB-AC<BC<AB+AC$$

Entonces ABC es un triángulo.

Ahora bien, para establecer la existencia de un triángulo ¿es necesario verificar estas 6 desigualdades? Frente a esto encontramos las siguientes "condiciones mínimas" para la existencia de un triángulo:

Enunciado 3: *Dado los segmentos AB, AC, BC:*

Hipótesis (cada una se considera suficiente para obtener la tesis):

1. $AC \leq BC \leq AB \wedge AB < AC+BC$.
2. $AC \leq BC \leq AB \wedge AB-BC < AC$.
3. $|AB-AC| < BC < AC+AB$.
4. $AC < BC+AB \wedge BC < AC+AB \wedge AB < AC+CB$.

Tesis: ABC es un Triángulo.

A continuación presentamos la propuesta diseñada para alumnos del secundario, que permitió arribar a la "*Hipótesis 1*" como condición para la existencia del triángulo.

Propuesta de trabajo: descripción e implementación en el nivel secundario

Actividad 1: a. Construí un triángulo *ABC*, en el cual el lado *AB* mide 5 cm y el lado *AC* mide 3 cm \b. Compará la construcción que hiciste con la que realizó tu compañero. ¿Dibujaron triángulos iguales? \ c. Encontrá una manera que te permita determinar todos los posibles lugares del vértice *C* para construir el triángulo *ABC*. \d. A partir de todos los posibles triángulos obtenidos en el ítem c ¿Qué otro dato se podría considerar para que al construir el triángulo ABC sea único?

Objetivos: 1) Problematizar la construcción de un triángulo a partir de 2 lados.\ 2) Concluir que a partir de 2 lados se pueden construir muchos triángulos.\ 3) Introducir la técnica del trazado de una circunferencia para determinar el lugar geométrico que en el plano puede ocupar el tercer vértice (con excepción de cuando los puntos *A*, *B* y *C* quedan alineados).\ 4) Validar esta técnica con el concepto de circunferencia como lugar geométrico (conjunto de puntos que equidistan de uno fijo llamado centro) tomando como radio la longitud de uno de los lados. \ 5) Determinar qué condición agregar para hacer único el triángulo a construir a partir de 2 lados.

Que los alumnos se enfrenten a estas actividades no es suficiente para el logro de los objetivos señalados. Fue necesario socializar -a medida que se ponían en juego- qué entienden ellos por cada objeto matemático involucrado en las consigas, en la narrativa de sus procedimientos y argumentaciones ya que se evidenciaban ideas diferentes, significados distintos. Por ejemplo, sus conocimientos sobre los elementos de un triángulo (base, lado, vértice, ángulo, etc.).

Acordamos con ellos cómo llamar a cada objeto matemático (lenguaje coloquial) y también cómo anotar, es decir cómo se escriben matemáticamente estas ideas (lenguaje simbólico).

También es de advertir que existe un gran salto entre el ítem a y el b, con lo cual el profesor deberá ir dando más información a los alumnos conforme ellos avancen en las actividades. Por ejemplo, tomando dos biromes simbolizando los lados del triángulo cuya medida es fija, se construyen distintos triángulos. Esta representación permite identificar cómo hallar los distintos puntos que pueden ser el vértice *C* del triángulo dado que permite visualizar que al tener solo dos lados la amplitud del ángulo puede variar y en consecuencia el lado opuesto.

Para resolver el ítem c, los alumnos trazaron el segmento *AB* de 5 cm y con la regla marcaron desde el extremo *A* un punto a 3 cm para representar el vértice *C*. De esta forma obtuvieron distintos puntos a 3 cm de *A*. Otros, trazaron con el compás una circunferencia de centro *A* y radio 3 cm (Figura 3).

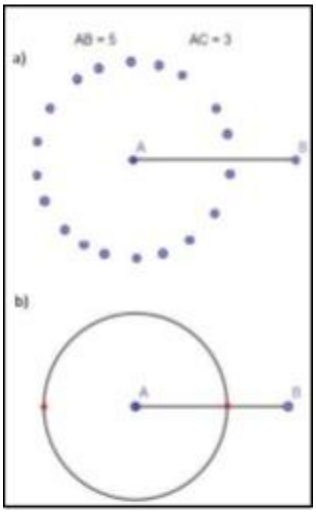


Figura 3a. Distintos puntos como posibles lugares del vértice *C*.
Figura 3b. La circunferencia C(*A*,3 cm) determina todos los posibles lugares del vértice *C*.

Surge aquí la necesidad de validar ambas técnicas. Los puntos señalados de una y otra forma ¿son posibles vértices del triángulo? ¿En ambas se establecen todos los posibles lugares del vértice? ¿Todos los puntos de la circunferencia pueden ser un posible lugar donde ubicar el vértice *C*? O el vértice *C*, ¿podrá ubicarse en otro lugar que no sea la circunferencia? es decir ¿podría no ser un punto de la circunferencia?

Es necesario que los alumnos concluyan que la circunferencia C(*A*, 3 cm) es el lugar geométrico de los puntos que verifican estar a 3 cm de *A*. Con lo cual, el vértice *C* del triángulo *ABC* puede ubicarse en cualquier punto de esta circunferencia y formar así el lado *AC*, salvo en los puntos donde queda alineado con *A* y *B* (puntos de color rojo en Figura 3b).

También que cualquier otro lugar del plano no puede ser un posible lugar para el vértice *C*, ya que si está por fuera de C(*A*, 3 cm) el segmento tendrá una longitud mayor a 3 cm y si está por dentro de la C(*A*, 3 cm) tendrá una longitud menor a 3 cm. Se torna imprescindible así usar la noción de la circunferencia como lugar geométrico para avanzar en la secuencia.

Actividad 2: Construí, si es posible, un triángulo cuyas longitudes de sus lados sean: *AB*=6cm, *AC*=4cm y *BC*=3cm.

Objetivos: 1) Determinar en los procedimientos empleados, las propiedades geométricas en las cuales se apoya la construcción del triángulo.\ 2) Producir mediante el uso de circunferencias la construcción del triángulo.\ 3) Usar la noción de circunferencia como lugar geométrico para justificar la construcción del triángulo sobre otros procedimientos que buscan la precisión y no se apoyan en conceptos geométricos.

Los alumnos desarrollaron diferentes **procedimientos para construir el triángulo** como se describe a continuación:

I. Trazaban un segmento *AB* y con la regla iban acomodando los otros lados (con las medidas correspondientes) hasta que coincidan formando el mismo vértice *C*.

II. Trazaban un segmento *AB* y con el compás dibujaban una circunferencia de centro en *A* (o en *B*) de radio 4 cm (o de 3 cm), luego el lado restante lo trazaban desde el vértice *B* (o el *A*) a la circunferencia trazada.

III. Trazaban un segmento *AB* y con el compás trazaban dos circunferencias que tengan como centro los extremos del segmento *A* y *B*, de radios 4 cm y 3 cm respectivamente. Luego el tercer vértice queda determinado por la intersección de ambas circunferencias (Figura 4).

El trabajo realizado en cada una de las técnicas de construcción permitió discutir: los alcances y límites de los instrumentos geométricos como la regla y el compás (en qué caso conviene utilizar uno y en qué caso otro); la manera de usar el compás para lograr el objetivo (donde lo apoyamos, sobre el segmento, sobre cualquier vértice, con cualquier amplitud o medida); por qué trazamos una circunferencia y luego por qué utilizamos otra. En este punto, se retoman las ideas anteriores sumando nuevas preguntas y argumentos:

- Al trazar las dos circunferencias ¿cómo saber si es posible construir el triángulo?
- Las circunferencias se intersectan en dos puntos, ¿el vértice *C* puede ser cualquiera de esos puntos? ¿Por qué? ¿Los dos triángulos que se forman son distintos?
- ¿El triángulo construido es único? ¿Cómo sabemos que no es posible construir triángulos distintos con estas tres medidas?

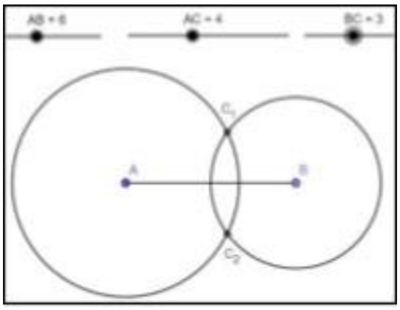


Figura 4. Técnica para construir el triángulo cuyos lados miden (6, 4, 3)

Como el lado *AC* debe medir 4 cm, consideramos la circunferencia C(*A*, 4 cm) conjunto de todos los puntos que están a 4 cm del punto *A*, entonces el vértice *C* deberá ser alguno de esos puntos. Por otro lado, el lado *BC* debe medir 3 cm, trazando C(*B*,3cm) tenemos el conjunto de todos los puntos que están a 3 cm del punto *B*, entonces *C* tendrá que ser algún punto de dicha circunferencia.

Del ejercicio anterior podemos observar que el vértice *C* cumple solo con una condición, estar a 3 cm del vértice *A*. Para esta actividad el punto *C* debe satisfacer, en simultáneo, dos condiciones, estar a 4 cm del vértice *A* y a 3 cm del vértice *B*. Por lo tanto, el vértice *C* es algún punto que esté en ambas circunferencias, es decir, en la intersección (Figura 4).

De esta actividad los alumnos concluyeron que: dada la longitud de los segmentos *AB*=6cm, *AC*=4cm y *BC*=3cm, es posible construir un único triángulo. Si se fija uno de los segmentos y en cada uno de sus extremos se trazan circunferencias que tengan por radio la longitud de los otros 2 segmentos restantes, se tiene que la intersección entre las circunferencias determina dos puntos, donde cualquiera de ellos es el vértice restante.

Esta técnica carece de sentido cuando las circunferencias son tangentes, es decir, el triángulo no se puede construir. A continuación, se analizarán los distintos casos que se pueden presentar con las dos circunferencias (Posiciones relativas de dos circunferencias).

Actividad 3. A continuación, se dan varias opciones para las medidas de los 3 lados de un triángulo. Usando regla y compás, construí cada triángulo o explicá por qué no se puede construir:
a) *AB*=4cm; *AC*=3cm; *BC*=5cm.\ b) *AB*=6cm; *AC*=2cm; *BC*=3cm.\ c) *AB*=4cm; *AC*=3cm; *BC*=7cm.
Actividad 4, ¿Qué relación debe haber entre las medidas de los segmentos *AB*, *AC* y *BC* para que sea posible construir el triángulo? Explicar.
Actividad 5. Inventá medidas para 3 segmentos *AB*, *AC* y *BC* (distintas a las que trabajaron anteriormente), de manera que con ellos se pueda construir un triángulo *ABC*.\ Dada la longitud

del segmento AB= 6cm, inventá medidas para el lado AC y el lado BC para que la construcción sea posible.\ Dada la longitud del segmento AB=6cm, inventá medidas para el lado AC y el lado BC para que la construcción no sea posible.

Objetivos: 1) Determinar mediante el uso de circunferencias (en las construcciones) la existencia o no del triángulo.\ 2) Reflexionar sobre los resultados obtenidos en el papel: Posiciones relativas de dos circunferencias.\ 3) Indagar y establecer (enunciar) las condiciones que deben cumplir 3 longitudes para que con ellas se pueda construir un triángulo.\ 4) Proponer ternas de longitudes con las que se pueda construir un triángulo y con las que no.\ 5) Validar la condición enunciada para la construcción de triángulos, mediante los conceptos de circunferencia, distancia entre los centros, posiciones relativas de dos circunferencias.

Del ítem 3b) de la construcción resultan 2 circunferencias que no se intersectan, sin importar la base que se fije (Figura 5).

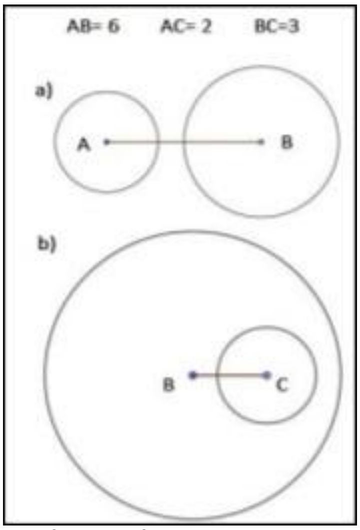


Figura 5a. Construcción en el ítem 3b) tomando como base *AB*.
Figura 5b. Construcción en el ítem 3b) tomando como base *BC*.

Frente a esto, matemáticamente nos preguntamos: ¿lo podían haber anticipado? ¿Qué explicaciones dan los alumnos frente a este hecho?

Llegados a este punto, los alumnos comienzan a enunciar verbalmente que con esas medidas no se puede construir un triángulo, ya que "*los lados no son lo suficientemente largos para que las circunferencias se toquen o que la base debe ser más corta"* (Figura 5.a). Este es uno de los primeros antecedentes de la conclusión a la que se quiere arribar en esta secuencia. Es importante mencionar aquí que los alumnos están "mirando" si las circunferencias se intersectan tomando como separación entre sus centros el segmento mayor (en caso de poder construir el triángulo la base será el lado mayor).

En el ítem 3.c) después de realizar las construcciones con la Técnica antes señalada, los alumnos elaboran distintas respuestas (Figura 6), con la terna (7, 4, 3): se puede construir un único triángulo, se puede construir más de uno, no se puede construir ningún triángulo. Se pone en discusión la respuesta a este ítem llegando a la conclusión de que para estas ternas de longitudes no alcanza con solo mirar si hubo o no intersección entre las circunferencias.

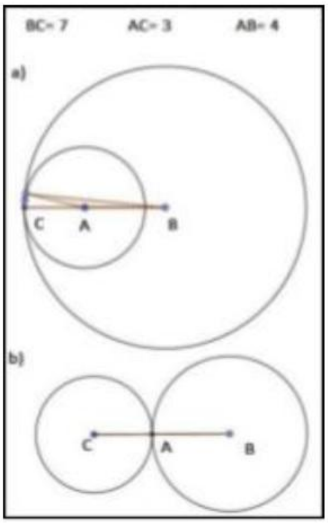


Figura 6a. Construcción en el ítem 3c) con las medidas (7,4,3) en la que se forma un triángulo.}
Figura 6b. Construcción en el ítem 3c) con las medidas (7,4,3). Circunferencias tangentes.

Surgen aquí nuevos interrogantes con respecto a la existencia del triángulo, una nueva problematización: ¿Cómo determinamos -dadas estas 3 longitudes- la existencia o no del triángulo? ¿Cuál es el problema en este caso? En clase planteamos a los alumnos cuestiones como las siguientes: “Hubo ternas con las cuales pudieron construir un triángulo y otras con las que no y en ambas situaciones no tuvieron problemas en determinar esto. ¿Cuál es el problema aquí?”

Claramente la terna particular en donde un lado es igual a la suma de los otros dos, los obligó a profundizar en las relaciones que deben cumplir las tres longitudes de los segmentos para garantizar que sea posible construir un triángulo por fuera de la constatación a través de la técnica. La técnica permite construir un triángulo, pero no validar su existencia. Son las propiedades geométricas las que aseguran, como veremos más abajo.

En la actividad 4, los alumnos pudieron elaborar las siguientes conjeturas: *“La unión de los segmentos tiene que ser mayor que la base”, “la suma de los lados debe ser más grande que la medida de la base”, “la suma de los lados más cortos debe ser más grande que el lado más largo”*. Llegado a este punto se puso en discusión el trabajo realizado con circunferencias (en las construcciones del triángulo) y las conjeturas elaboradas. Esto permitió avanzar a la siguiente conclusión en la clase: Dados tres segmentos de longitudes AB, AC y BC y sabiendo que $AC \leq AB$ *y* $CB \leq A$B (es decir que el lado AB es el de mayor longitud). Si $AB<AC+BC$ entonces es posible construir un triángulo cuyas medidas de los lados son AB, AC y BC. Esta propiedad de denomina: “Desigualdad Triangular”.

La anterior conclusión atrapa las relaciones establecidas en la *Hipótesis 1* del *Enunciado 3 (*página 3). Se debatieron cuestiones de notación (desigualdad entre segmentos, suma entre segmentos), para que sea matemáticamente correcto y que esté al alcance de ellos.

Luego de enunciar esta propiedad y validarla, la secuencia se enfoca en hacer uso de la misma, sin necesariamente realizar la construcción del triángulo.

Conclusión

La propuesta que describimos permitió problematizar las cuestiones involucradas en la construcción de triángulos y de este modo que los alumnos se involucren en una tarea de construcción de conocimientos relativos a las condiciones de existencia.

Ellos establecen una propiedad, dada por la relación entre 3 longitudes, que al verificarse les permite decidir que con ellas se puede construir un triángulo. Esta propiedad la enunciaron desde la construcción misma.

Ahora bien, si no se verifica esta propiedad, matemáticamente podríamos decir que no se puede afirmar nada sobre la existencia del triángulo, ya que no se verifica la hipótesis. Sin embargo, por el conocimiento construido, los alumnos pudieron validar que: si no se verifica la hipótesis, no existe el triángulo. Esto corresponde a decir que el “contrario” de la propiedad enunciada por los alumnos también es verdadero (el cual queda validado desde las construcciones geométricas realizadas). Decir que una afirmación y su contraria son verdaderas, es lo mismo que decir que la propiedad enunciada es un sí y solo sí (tanto el directo como su recíproco son verdaderos).

Es importante destacar que, el recíproco de la propiedad enunciada por los alumnos es lo que figura en los libros citados como “Desigualdad Triangular”.

Referencias bibliográficas

Aragón, M., Laurito, L., Net, G. y Trama, E. (Eds.). (2003). *Matemática 7 Carpeta de Actividades*. Buenos Aires, Argentina: Estrada.

Baldor, J. (2004). *Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría*. México DF, México: Publicaciones Cultural.

Clementín, V. (2017). *Un estudio didáctico matemático de la desigualdad triangular: elaboración y análisis de una secuencia didáctica para alumnos de nivel secundario* (Tesis de grado). Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.

Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica I*. Madrid, España: Euler Editorial.

Saiz, I. y Parra, M. (2012). *Hacer Matemática en 5°*. Buenos Aires, Argentina: Estrada.

Sessa, C., Borsani, V. Lamela, C. y Murúa, R. (2015a). *Hacer Matemática 7/1*. Buenos Aires, Argentina: Estrada.

Sessa, C., Borsani, V. Lamela, C. y Murúa, R. (2015b). *Hacer Matemática 1/2*. Buenos Aires, Argentina: Estrada.

Tirao, J. (1979). *El Plano*. Buenos Aires, Argentina: Docencia.

Representación gráfica de funciones afines en un sistema de ejes paralelos

FABIAN ESPINOZA
rrfespinoza@gmail.com
ITATÍ SOSA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste

Resumen

De acuerdo con los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, definidos para todo el territorio nacional en 2011, los alumnos del ciclo básico del nivel secundario deben abordar el estudio de la función afín, en distintos registros de representación.
En base a este estudio previo, llevado a cabo en referencia a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, este trabajo intenta profundizar la comprensión de objetos y relaciones constitutivas de la noción de Función Afín, tomada como objeto de enseñanza en la escolaridad media. Para ello, se propone como herramienta la representación gráfica de estas funciones en un sistema de ejes paralelos. Se trata de explorar una representación menos convencional de las funciones afines, en la que conceptos conocidos, tales como pendiente, ordenada al origen, crecimiento, decrecimiento, puedan identificarse y caracterizarse desde otro ámbito. Asimismo, se presenta un avance en la determinación y caracterización de un nuevo objeto, el foco, un punto característico de la representación de este tipo de funciones en ejes paralelos.
El artículo persigue el propósito de orientar al profesor del nivel medio en la conformación de un marco matemático respecto de la temática en cuestión.

Acerca de la representación gráfica de funciones afines en un sistema de ejes paralelos

Además de las habituales representaciones cartesianas y algebraicas, existen otras formas de representar funciones, por ejemplo, en un sistema de ejes paralelos. Este sistema es una herramienta de visualización que permite representar n-dimensiones en un sistema bidimensional. Cada eje vertical representa un atributo (dimensión) que puede ser continuo o discreto y tener su propia escala o normalizarse y definirse todos con una misma escala. A partir del cero de cada eje, hacia arriba del mismo se incluyen las abscisas positivas, mientras que por debajo del mismo, se indican las abscisas negativas.

La poligonal determinada al unir los n puntos ubicados en cada uno de los ejes con segmentos, representa un punto del espacio n-dimensional. Asimismo, un punto en un espacio n-dimensional se identifica a partir de n ejes paralelos con n-1 segmentos, o sea, a través de una poligonal abierta de n-1 lados. Usualmente, el punto (0, ... ,0) se identifica con una poligonal cuyos lados están alineados y resulta perpendicular a los ejes paralelos.

Una función, representada en el plano cartesiano por un conjunto de puntos (en general una curva), toma la forma de un conjunto de líneas de mapeo en la representación en ejes paralelos.

En el plano R^2, conformado por los ejes paralelos x e y, el punto (a, b) de la gráfica de una función afín queda determinado por un segmento, denominado línea de mapeo, que une el valor de la preimagen "a", ubicada en el eje de abscisas, con el valor de su imagen "b", posicionado en el eje de las ordenadas. El eje "x", ubicado a la izquierda, es usado para representar los elementos del dominio de la función, mientras que el eje "y" se emplea para representar los del codominio.

Cabe aclarar que la misma exploración que se da cuenta en este trabajo, con ejes verticales paralelos, puede realizarse con ejes horizontales paralelos.

Prácticas matemáticas alrededor de la representación gráfica de funciones afines en un sistema de ejes paralelos

Seguidamente se propone la tarea de la representación gráfica de funciones afines en un sistema de ejes paralelos, realizando una exploración, identificación y caracterización de algunos objetos y relaciones constitutivos de esta noción.

La propuesta gira alrededor de las tareas que se indican seguidamente y de algunas reflexiones sobre las respuestas a los problemas que ellas involucran.

Tarea A: Representar gráficamente funciones afines en un sistema de ejes paralelos.

La pregunta involucrada en esta tarea es ¿cómo representar gráficamente funciones afines en un sistema de ejes paralelos?

Para abordar esta cuestión, se comienza trazando los gráficos de dos funciones: $y=2x$ (Figura 1), $y=-x+1$ (Figura 2). Cabe aclarar que la primera es una función afín y también lineal o proporcional, mientras que la segunda es afín, pero no lineal, considerando que las funciones lineales son transformaciones lineales del espacio vectorial real usual en él mismo.

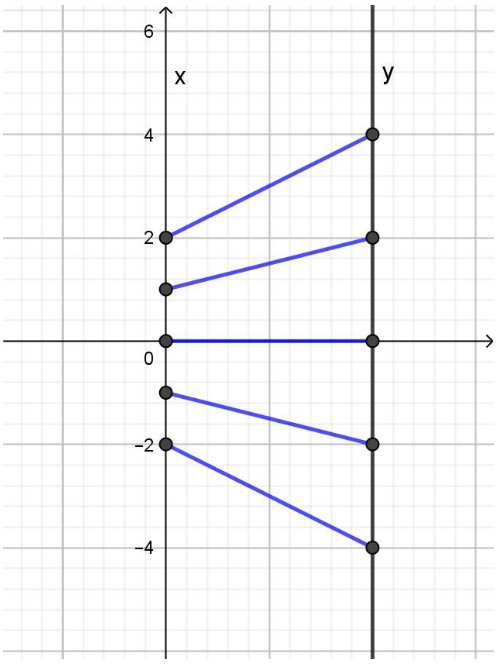


Figura 1. Gráfico de *y=2x*

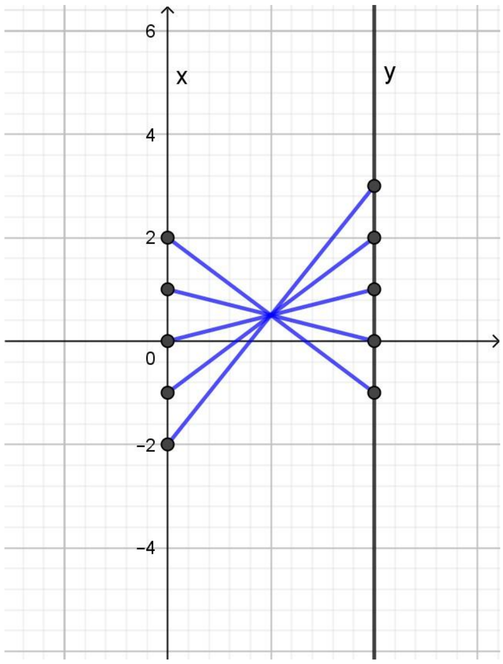


Figura 2. Gráfico de y=-x+1

Las líneas de mapeo que constituyen sus gráficas están formadas por segmentos que tienen sus extremos en dos puntos situados uno sobre el eje x y otro sobre el eje y.

En este trabajo se considera un conjunto discreto, el de los números enteros, como dominio de las funciones. Si en cambio, se tomara como dominio el conjunto de los números reales, ¿cómo sería la gráfica?, pues es una región del plano (Figura 3), estableciendo la convención de que para realizar la representación gráfica de funciones de dominio real basta solamente relacionar los elementos de un intervalo del dominio con sus correspondientes imágenes.

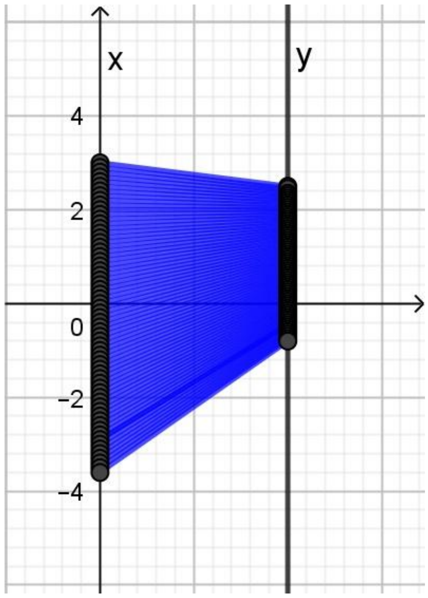


Figura 3. Gráfico de una función con dominio en *R*

Avancemos ahora con la pregunta, conociendo la gráfica de una función afín en un sistema de ejes paralelos, ¿es posible identificar su fórmula? La respuesta afirmativa a esta cuestión involucra la siguiente:

Tarea B: Identificar la fórmula de una función afín conociendo su representación gráfica en un sistema de ejes paralelos. Se exponen a continuación cuatro funciones expresadas en el registro gráfico:

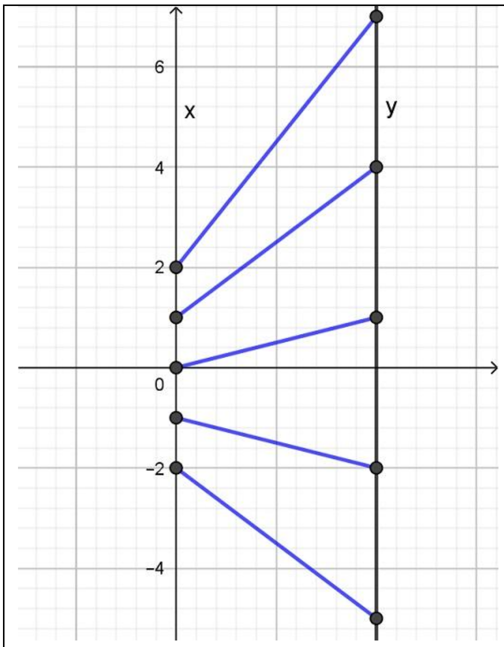


Figura 4

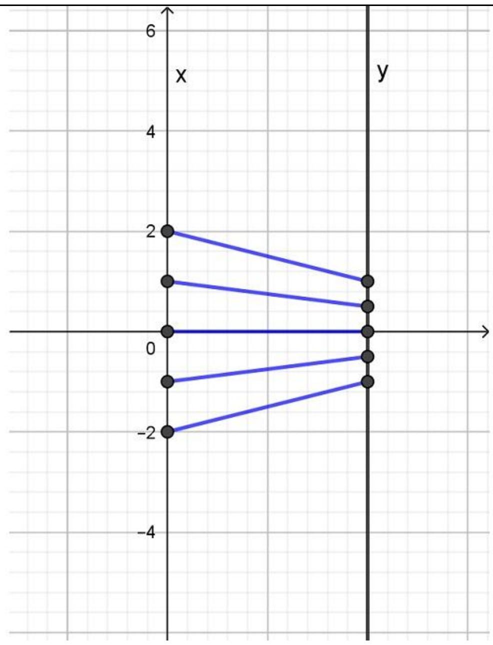


Figura 5

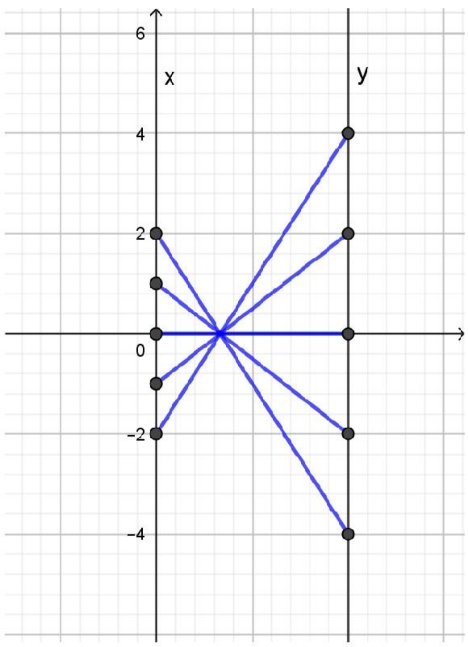


Figura 6

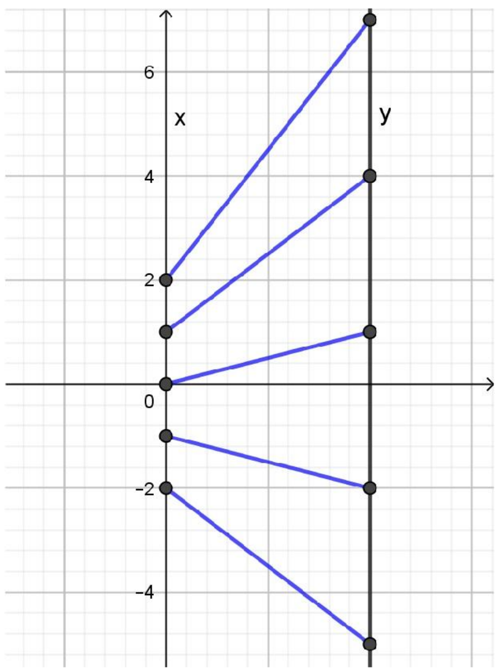


Figura 7

Para avanzar en la resolución de estas tareas se comienza por recordar que en el plano cartesiano la representación de la función afín $y=ax+b$ es una recta, siendo a y b dos parámetros que reciben el nombre de pendiente y ordenada al origen respectivamente.

Asumiendo las *mismas* denominaciones, en el caso de la función de la figura 4, una mirada cuidadosa de su gráfico permite determinar que la pendiente es igual a 3, dado que por cada unidad de variación en el eje x, hay 3 unidades de variación en el eje y. Es decir, si se incrementa "x" en una unidad, se tiene $y=3(x+1)$; luego, aplicando la propiedad distributiva, queda $y=3x+3$, expresión que permite ver que "y" aumenta en tres unidades. Además, como la línea de mapeo de origen 0 en el eje x, tiene como extremo 0 en el eje y, la ordenada al origen es 0. Por lo tanto, la fórmula de la función es $y=3x$.

En el sistema de ejes paralelos, a diferencia de la representación en coordenadas cartesianas ortogonales, generalmente la pendiente de una recta queda a la vista; basta contar las unidades de aumento o disminución en el eje y, por cada unidad de variación registrado en el eje x. Este es el significado de pendiente de uso más pertinente en este caso. La ordenada al origen queda al descubierto en ambos sistemas.

A partir de la gráfica de la función de la figura 5, es posible determinar que la pendiente es $0{,}5$, la ordenada al origen es 0 y, por lo tanto, la fórmula de la función es $y=0.5.x$.

En la gráfica de la función de la figura 6 se puede notar que la pendiente es -2 y la ordenada al origen, 0. Por ello, la función es $y=-2x$.

Una apreciación visual llamativa es el hecho de que las líneas de mapeo de la gráfica de esta función de pendiente negativa se cortan en un punto f, llamado foco, perteneciente a la línea de mapeo $(0,1)$. Esto ocurre porque por cada unidad de incremento en el eje x, hay dos unidades de disminución en el eje y, mientras que, por una unidad de disminución en el eje x, hay dos unidades de aumento en el eje y.

La fórmula de la función de la figura 7 es $y=3x+1$. Desde el gráfico se puede determinar la pendiente de la misma manera que en los casos anteriores y la ordenada al origen a través de la identificación de la línea de mapeo $(0,1)$.

Anteriormente se caracterizó brevemente un punto particular, el foco, perteneciente a todas las rectas que contienen las líneas de mapeo de una función lineal $y=ax$, de pendiente negativa. Se aborda ahora la siguiente:

Tarea C: Identificar y caracterizar el foco, para el caso de funciones lineales con distintas pendientes, centrando la atención en sus aportes para la representación gráfica.

En esta tarea, la exploración con *GeoGebra* juega un rol muy importante, pues la realización de varias representaciones gráficas puede ayudar a identificar el lugar geométrico (recta) a la cual pertenecen los distintos focos.

Retomando el caso de pendiente negativa, se tiene que si $a=-1$ las líneas de mapeo se cortan en el punto medio de la línea de mapeo *(0,0)* (Figura 8), mientras que el foco estará más cerca del eje *x* cuando $a<-1$, y más cerca del eje y en el caso de $-1<a<0$. En todos estos casos hay una relación entre la propiedad de crecimiento y la posición del foco: gráficamente se puede determinar que la familia de funciones lineales $y=ax$, $a<0$, es decreciente cuando las líneas de mapeo se interceptan en un punto comprendido entre los ejes *x* e *y*, salvo en los extremos de la línea de mapeo *(0,0)*. Así, el foco no puede ubicarse sobre el eje *x*, pues es este caso hay una relación no funcional y, en el caso de ubicarse sobre el eje *y*, la pendiente es *0*, y la función no es decreciente sino constante (Figura 9).

Si, en cambio, $a>1$, las rectas que contienen las líneas de mapeo se cortan sobre la recta que contiene la línea de mapeo *(0,0)*, a la izquierda del eje *x* (Figura 10), dado que la imagen de cualquier segmento unitario es mayor que el mismo. En este caso, una exploración con *GeoGebra*, ¿qué permite apreciar?; pues que los rayos que contienen las líneas de mapeo de los elementos de un conjunto discreto y acotado se van separando cada vez más, a medida que se recorre visualmente el gráfico de izquierda a derecha.

Si $0<a<1$, el foco se ubica también sobre la recta mencionada, a la derecha del eje *y* (Figura 11), pues la imagen de cualquier segmento unitario es menor que el mismo. Contrariamente al caso anterior, aquí la visión geométrica da cuenta de que los rayos que contienen las líneas de mapeo de los elementos de un conjunto discreto y acotado se van juntando, hasta interceptarse en el foco.

Ahora bien, ¿todas las funciones lineales tienen foco? La respuesta es negativa, pues en el caso de que la pendiente fuera la unidad, las líneas de mapeo de la función identidad son paralelas, es decir, no se cortan en un punto.

¿Por qué es importante la identificación del foco? Porque a partir de este punto se puede representar cualquier función lineal con ciertas características; basta con trazar rectas que pasen por el foco y por cualquier punto del eje *x*, pudiéndose obtener así las líneas de mapeo.

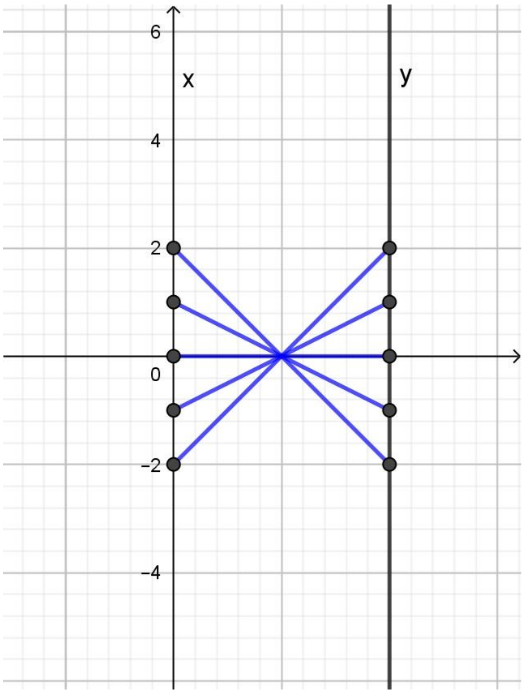


Figura 8. Pendiente a=-1

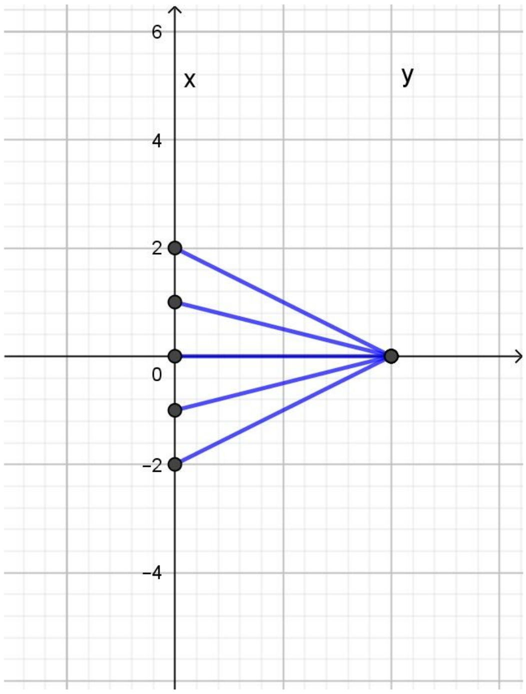


Figura 9. Pendiente a=0

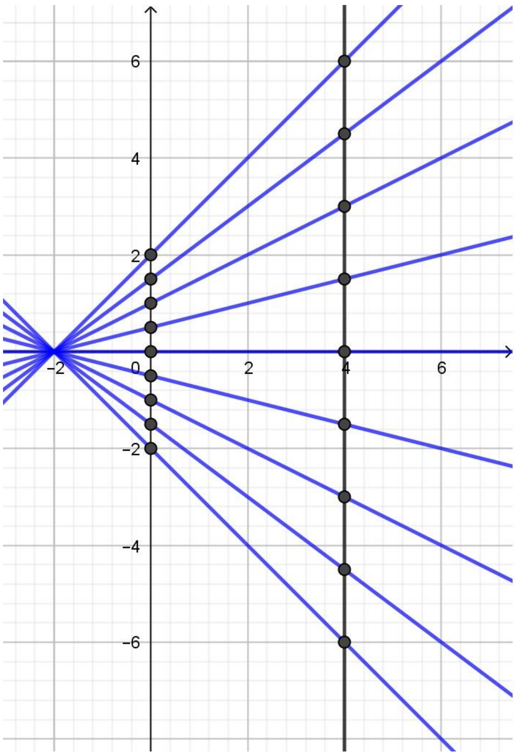


Figura 10. Pendiente a>1

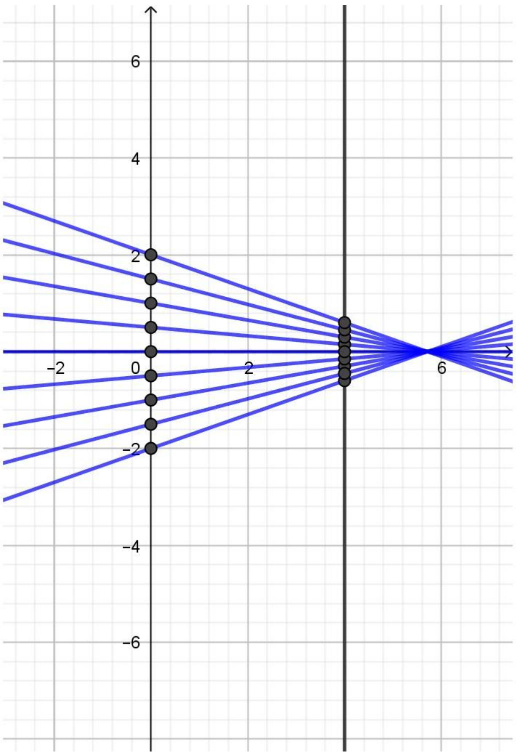


Figura 11. Pendiente 0<a<1

A continuación, se presenta la deducción de una fórmula que permite determinar la posición del foco.

Se considera un sistema de ejes paralelos “*x y*”, y un sistema de ejes cartesianos ortogonales tal que el eje “*x*” del sistema de ejes paralelos coincide con el eje de las ordenadas (vertical), el que se designa con “*v*”, siendo “*u*” el eje de las abscisas (Figura 12). El origen de coordenadas del sistema “*u v*” coincide con el *0* del eje “*x*”.

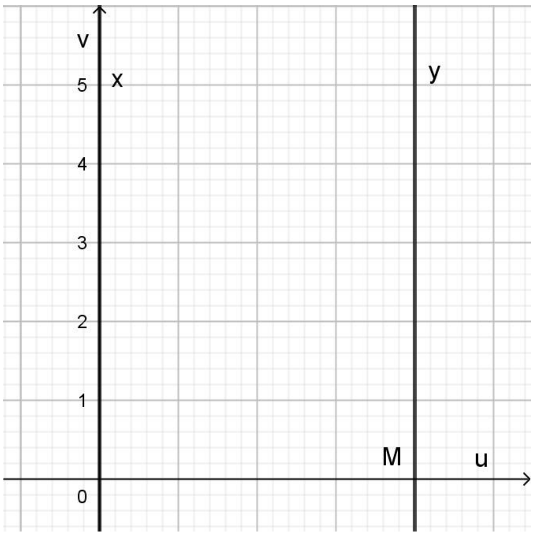


Figura 12. Sistemas de ejes paralelos “*x y*” y de ejes cartesianos ortogonales “*u v*”

De esta manera en el sistema “*u v*”, el eje *x* tiene ecuación $u=0$ y el eje *y*, la ecuación $u=M$.

Luego se considera una función lineal de ecuación $y=ax$. A “x_1” le corresponde por imagen “ax_1" y este punto tiene por línea de mapeo en el sistema “*x y*” el segmento cuyos extremos en el sistema “*u v*” son $(0, x_1)$ y (M, ax_1); análogamente a “x_2” le corresponde por imagen “ax_2" y este punto tiene por línea de mapeo en el sistema “*x y*” el segmento cuyos extremos en el sistema “*u v*” son $(0, x_2)$ y (M, ax_2) (Figura 13).

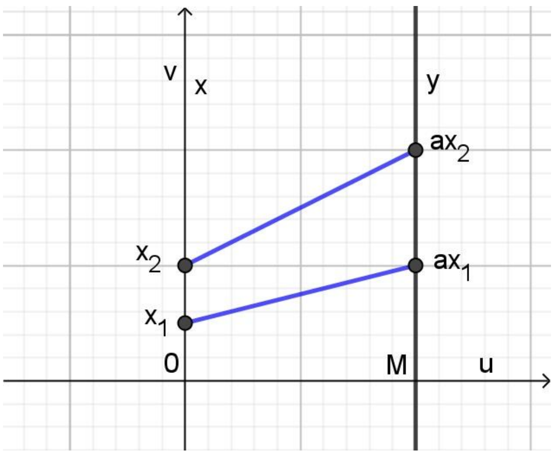


Figura 13. Gráfico de $y=ax$

Los rayos que contienen estas líneas de mapeo tienen por ecuación: $v = \frac{a-1}{M} x_1 u + x_1$, $v = \frac{a-1}{M} x_2 u + x_2$ respectivamente.

Para buscar la intersección de estas rectas, se procede a igualar los segundos miembros de las igualdades indicadas anteriormente:

$$\frac{a-1}{M} x_1 u + x_1 = \frac{a-1}{M} x_2 u + x_2$$

De esta expresión se obtiene que: $u = \frac{M}{1-a}$, con $a \neq 1$.

Luego, reemplazando este resultado en alguna de las ecuaciones de los rayos, por ejemplo en la que contiene la línea de mapeo correspondiente a x_1, se tiene: $v = \frac{a-1}{M} x_1 \frac{M}{1-a} + x_1$, con lo cual $v=0$.

Estas rectas se interceptan en el punto $\left(\frac{M}{1-a}, 0\right)$ del plano "u v", es más, todos los rayos que contienen las líneas de mapeo de la función $y=ax$ se interceptan en este punto, pues las coordenadas del mismo no depende de los valores x_1 y x_2 elegidos, sino de a (la pendiente de la función lineal), y de M (distancia del eje y al eje x).

Si $a=0$, la función lineal correspondiente es la función identidad y las líneas de mapeo son paralelas.

Si además se tiene en cuenta que una función afín $y=ax+b$, $b \neq 0$ se puede obtener de una función lineal $y=ax$, como imagen de esta por la transformación rígida "traslación de vector $(0,b)$", resulta que para las funciones afines, las rectas que contienen las líneas de mapeo correspondientes a dicha función se cortan en un único punto, el foco. Esto permite identificar a toda función afín, excepto a la identidad, con dicho punto.

Para finalizar, se presenta la siguiente:

Tarea D: Caracterizar las gráficas de las funciones afines no lineales, en lo que respecta a la determinación del foco.

Es necesario comenzar por fijar la pendiente.

Consideremos la familia de funciones afines de la forma $y=5x+b$, con $b \neq 0$, e intentemos caracterizar sus gráficas.

Una pregunta posible es, ¿si la línea que contiene los focos de las funciones lineales es horizontal, al considerar un desplazamiento de las líneas de mapeo de funciones afines, no lineales, los focos se ubicarían sobre una recta vertical?

Para avanzar en la respuesta, el trabajo de exploración con *GeoGebra* se torna muy enriquecedor. Varias representaciones gráficas pueden ayudar a identificar el lugar geométrico de los focos.

En las figuras 12, 13 y 14 se presentan las gráficas de las funciones afines $y=5x+1$, $y=5x+2$ e $y=5x-1$, respectivamente:

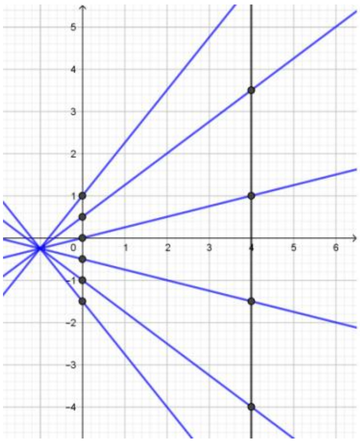


Figura 12. Gráfico de $y=5x+1$

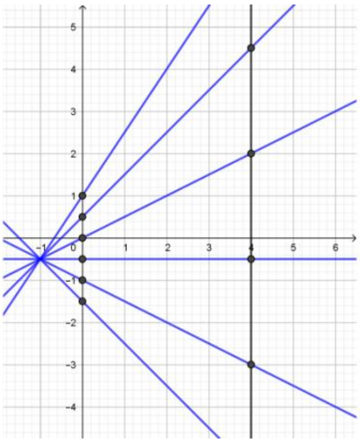


Figura 13. Gráfico de $y=5x+2$

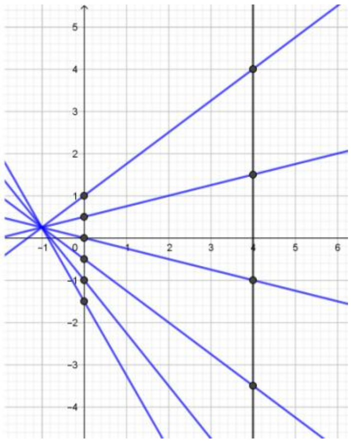


Figura 12. Gráfico de $y=5x-1$

Observando estas gráficas se puede apreciar que los focos de las tres funciones se ubican sobre la misma recta, paralela al eje “x” y ubicada a su izquierda. Esta posición puede explicarse teniendo en cuenta lo señalado recientemente, acerca de que el foco de una función lineal de pendiente mayor que 1, y en general de una función afín, se encuentra a la izquierda del eje x. En general, es fácil probar que a los focos de toda la familia $y=5x+b$ les pasa lo mismo.

A partir de este resultado, graficando cualquier función afín de pendiente igual a 5 (incluso la función lineal $y=5x$), e identificando el foco f (tan solo a partir del trazado de dos líneas de mapeo), luego es posible graficar toda la familia $y=5x+b$, teniendo en cuenta que sus focos pertenecen a la recta paralela a los ejes x e y, que pasa por el foco hallado para una de las funciones de dicha familia.

Reflexiones finales

Con este trabajo se pretende aportar algunos elementos que permitan orientar al profesor del nivel medio en la conformación de un marco matemático respecto de la representación gráfica de funciones afines en un sistema de ejes paralelos, recuperando y afianzando la comprensión de objetos y relaciones constitutivas de esta noción, estudiados en el marco representacional de un sistema cartesiano.

Se han abordado distintos tipos de problemas, cuyas resoluciones hacen posible identificar y caracterizar conceptos tales como pendiente, ordenada al origen, crecimiento y decrecimiento, en un sistema representacional de las funciones afines para nada habitual, como lo es el de ejes paralelos. La resignificación de estos objetos en otro contexto permite mejorar la comprensión de los mismos.

Además, se presentan situaciones que promueven la emergencia de un nuevo concepto, el foco, particularmente interesante en este tipo de representación.

En la mayoría de las tareas el trabajo con *GeoGebra* se torna muy enriquecedor, dado que este programa dinámico se constituye en una herramienta que favorece la exploración y la formulación de conjeturas, fundamentalmente en lo que respecta a la identificación del foco, cuando cambian permanentemente la pendiente y la ordenada al origen.

Referencias bibliográficas

Andrienko, G. y Andrienko, N. (2001). Constructing Parallel Coordinates Plot for Problem Solving. En A. Butz, A. Krueger, P. Oliver y M. Zhou (Eds.), *1st International Symposium on Smart Graphics*, (pp.9-14). New York, USA: ACM Press.

Arcavi. A. y Nachmias, R. (1989). Re-exploring Familiar concepts with a new representation. En G, Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp.71-78). París, Francia: PME.

Hauser, H. y Novotry, M. (2006). *Outlier - Preserving Focus + Context Visualization in Parallel Coordinates. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, *12*(5), 893-900.

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico, Educación Secundaria*. Recuperado de http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL004315.pdf

Un espacio de producción compartido como posibilidad para construir “con sentido” y resignificar herramientas didácticas

DAYANA CANALE

EUGENIA FERROCCHIO

mferrocchio@exa.unrc.edu.ar

CLAUDINA CANTER

MARIANELA SOSA

SILVIA ETCHEGARAY

Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

La conformación de un espacio de discusión y análisis compartido, en el marco de una práctica investigativa de grado, se constituyó en una posibilidad de reflexión y producción didáctico-matemática sobre herramientas didácticas en el ámbito de la formación de profesores en Matemática. En este trabajo nos proponemos compartir los resultados de un proceso de estudio e investigación educativa en el área de conocimiento de la Didáctica de la Matemática que permitió: por un lado, la conformación de un equipo cooperativo de trabajo de investigación y; por otro, la construcción de nuevos sentidos de herramientas de análisis didáctico que, particularmente para la estudiante protagonista de la práctica, contribuyeron a problematizar la planificación y gestión de una clase de matemáticas lo que conllevó a reflexionar sobre su futura práctica profesional. Específicamente, en dicho proceso se ha trabajado en torno a un tipo de problema aritmético-algebraico que habitualmente forma parte de la formación matemática de los estudiantes del Profesorado en Matemática; avanzando en el análisis de los significados personales emergentes de los diferentes sistemas de prácticas realizados por los integrantes del equipo de investigación. Esto con la intencionalidad de indagar cómo las herramientas didácticas -particularmente los niveles de algebrización- ayudan a pensar y planificar decisiones docentes que apunten a “poner en diálogo” una variedad de prácticas matemáticas.

Contextualización de la experiencia

El presente trabajo se enmarca en el desarrollo de una práctica investigativa de grado, propuesta institucional cuyo propósito es que los estudiantes de grado puedan recuperar los conocimientos adquiridos durante su formación, tomen contacto con el ámbito de investigación y extensión de la UNRC y se integren en un grupo de trabajo. En este marco, se propuso iniciar un proceso de estudio e investigación educativa en el área de conocimiento de la Didáctica de la Matemática con el propósito de desarrollar un trabajo cooperativo que permita -a la estudiante protagonista de la práctica- construir nuevos sentidos sobre herramientas de análisis didáctico que contribuyan a la planificación y gestión de una clase de matemáticas lo que conlleva a reflexionar sobre su futura práctica profesional.

El proyecto de investigación en el que se inscribe esta práctica tiene como eje "el análisis de prácticas, objetos y procesos en la actividad matemática que se desarrolla en la educación superior", con el propósito de promover con idoneidad estudios didácticos-matemáticos. Estos estudios tienen como meta describir y analizar las prácticas institucionales y personales para incidir en su transformación, reconociendo su complejidad, esencialmente ontosemiótica, asumiendo para ello perspectivas sistémicas y tratando de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas en dichos estudios, a saber: ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural y la ligada a la enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de instituciones escolares. Es en este marco que se reconoce y plantea la necesidad de reflexionar sobre la propia experiencia matemática y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje recorridos por la estudiante en su formación inicial; no obstante, no es posible generar verdaderos procesos de análisis y reflexión didáctica-matemática si no se construyen y utilizan herramientas teóricas-metodológicas adecuadas (Godino y Batanero, 2011).

En tal sentido, para el desarrollo de este proceso se propuso un trabajo de resolución, análisis y reflexión en torno a un tipo de situación -perteneciente a espacios elementales de Teoría de Números- que "vive" en las disciplinas correspondientes a la formación matemática de los futuros profesores. Específicamente, se trabajó a partir de los significados personales emergentes de los diferentes sistemas de prácticas realizados por todos los integrantes del equipo con la intencionalidad de indagar cómo las herramientas didácticas -particularmente los niveles de algebrización- ayudan a pensar y planificar decisiones docentes que apunten a "poner en diálogo" prácticas matemáticas diversas.

Algunos aportes teóricos que regularon el trabajo

La Didáctica de la Matemática proporciona herramientas de análisis a través de diferentes aproximaciones teóricas que permiten llevar a cabo ciertos estudios, aportando a la necesaria problematización de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), aporta herramientas teóricas para analizar en forma conjunta el pensamiento matemático, los ostensivos asociados a él, las situaciones donde se ponen en juego y las técnicas, definiciones y argumentos que condicionan su desarrollo, siempre teniendo como regulador de estos elementos al uso operativo y discursivo del lenguaje matemático.

El EOS considera como noción primitiva la de situación-problema, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, y se pone en evidencia que la construcción del conocimiento matemático en tanto personal como institucional es a través del proceso dialéctico entre ambas dimensiones. En este marco se consideran los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto, por las personas o en el seno de una institución, ante tipos de situaciones problemáticas como respuesta a ¿qué significa o representa un objeto matemático? Con esta formulación del significado, el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista propuesta por Faerna (1996, p.14) “las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceder su lugar privilegiado a la categoría de acción” (Citado en Godino, 2017, p.7). En este sentido, el enfoque aporta herramientas metodológicas que permiten "operativizar" el análisis didáctico-matemático haciendo foco en la dialéctica discurso-acción. Específicamente, cuando una persona o institución realiza y/o estudia una práctica matemática pone en juego un conjunto de objetos primarios, es decir, entidades que se pueden observar en un texto matemático. Godino et al., (2007) proponen una tipología de objetos matemáticos primarios (situación-problema, procedimientos, argumentos, definiciones, proposiciones, lenguaje) cuya identificación permite un primer nivel de análisis de una práctica matemática. A su vez, estos objetos primarios funcionan de manera articulada formando configuraciones (redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos) que pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Además, en el marco del EOS (Godino, 2002) los objetos matemáticos que intervienen en los distintos sistemas de práctica, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal-institucional, ostensivo-no ostensivo, expresión-contenido, extensivo-intensivo y unitario-sistémico. Estas dualidades dan lugar a los siguientes procesos: Personalización-Institucionalización, Materialización-Idealización, Representación-Significación, Generalización-Particularización, Descomposición-Reificación, respectivamente. El reconocimiento explícito de objetos y procesos, intervinientes y emergentes de prácticas matemáticas, permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje que ayudan, por un lado, a explicar el juego de relaciones que sostiene las prácticas personales de los estudiantes y por el otro, aportan a la anticipación de conocimientos a sostener en la clase. Cabe mencionar que estas herramientas formaron parte de contenidos mínimos de uno de los espacios de Didáctica de la Matemática del Profesorado. En este espacio de investigación se re significan estas herramientas al analizar en las prácticas matemáticas desarrolladas los diferentes niveles de algebrización (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Aitzol, 2015).

Desarrollo del proceso de investigación

El problema seleccionado para la práctica de investigación, extraído de Becker, Pietrocola, y Sanchez (2001, p.23), fue el siguiente:

> En cada uno de los siguientes casos, determine los números naturales n que satisfacen la relación planteada:
>
> i) $n|n+1$ ii) $n-2|n+2$ iii) $n-3|n^2+1$
>
> ¿Qué generalización se puede enunciar? Valida tu respuesta.
>
> Deja registrado todo lo que pensaste.

En primer lugar, la estudiante realizó un análisis didáctico de su propia práctica matemática a partir de herramientas que reconocía como funcionales desde su formación de grado. Como una segunda tarea, en el marco del trabajo cooperativo que fue conformándose en torno a esta práctica, se decide discutir sobre cada una de las prácticas matemáticas llevadas a cabo por el equipo, intentando avanzar hacia una comparación de significados emergentes. En este sentido, se plantearon algunos interrogantes, siempre bajo la hipótesis de intentar que se "pongan a dialogar" las diferentes prácticas para seguir avanzando en la comprensión de la actividad matemática desarrollada. ¿Cómo articular estas producciones, en principio, tan diferentes? ¿Alcanza con entender lo "correcto" de la práctica matemática para desvelar su valor formativo o hay que explicitar las relaciones que sostuvieron los por qué y los para qué de esa práctica?

Estas preguntas requirieron de nuevas acciones didácticas que se "materializaron" en los dos niveles de análisis ontosemiótico mencionados en los fundamentos teóricos. El primero de ellos, se desarrolló a partir de la identificación de objetos primarios en las diferentes prácticas matemáticas de cada uno de los integrantes del equipo y de la elaboración de las correspondientes configuraciones. Luego, se avanzó en un segundo nivel de análisis a partir de la identificación y estudio de los procesos duales de Materialización-Idealización, Generalización-Particularización, Descomposición-Reificación que se pusieron de manifiesto en cada práctica, lo que aportó elementos para identificar diferentes niveles de algebrización de la actividad matemática desarrollada. Esta explicitación de la complejidad ontosemiótica de los sistemas de prácticas enriquece el conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor. Específicamente,

> El análisis focalizado en el reconocimiento de objetos y procesos propios del pensamiento algebraico, puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. (Godino et al., 2015, p.137)

A continuación, dada la extensión permitida para este trabajo, se plantea una síntesis delo realizado. En primer lugar, se presenta un análisis realizado longitudinalmente a cada configuración, comparando las configuraciones de sólo dos de los sistemas de prácticas desarrollados en este estudio, a los que llamamos Sistema de Práctica 1 y 2 y que notaremos de acá en adelante como SP1 y SP2 respectivamente. En segundo lugar, se comparte un segundo nivel de análisis centrado en el reconocimiento y estudio de procesos.

Primer nivel de análisis

En el esquema que se presenta como Figura 1, se utilizan diferentes colores para identificar elementos de significado/relaciones/estrategias en las configuraciones que forman parte de un mismo sistema de práctica y que han regulado el análisis realizado. A continuación se explicitan las respectivas referencias:

Verde: relatividad personal del significado de un objeto en un mismo inciso o a lo largo de toda la situación problema

Lila: relatividad contextual del funcionamiento de un objeto en un mismo sistema de práctica.

Rosa: relaciones que cambian de estatus cognitivo pues son emergentes en un inciso y luego funcionan como disponibles en los siguientes para seguir enriqueciendo el sistema de conocimientos de la persona que resuelve.

Amarillo: una misma relación que va ampliando su campo de aplicabilidad.

Celeste: un mismo elemento de significado que funciona a lo largo de todo el Sistema de Prácticas sin variar su estatus ontológico.

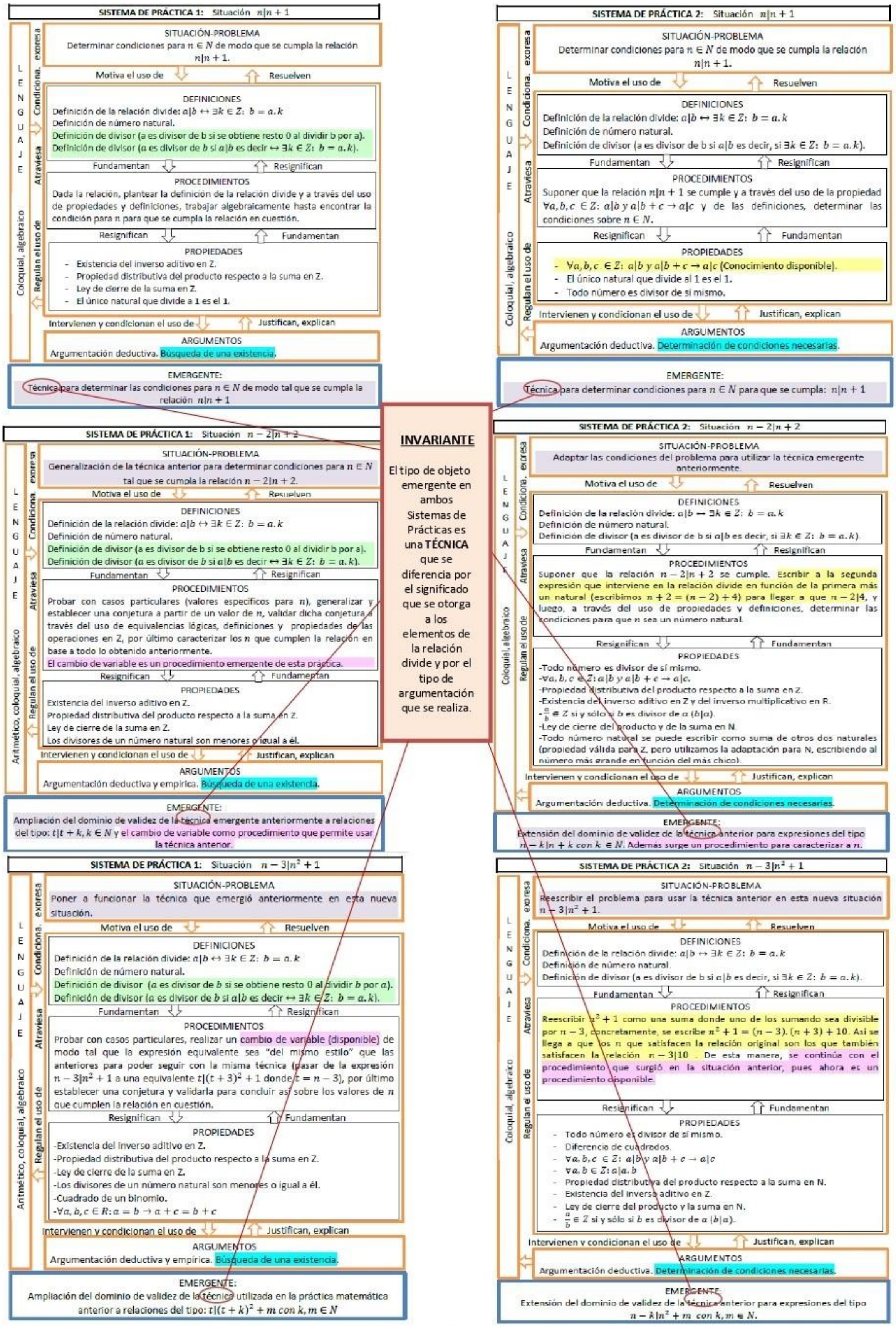


Figura 1. Análisis longitudinal de las configuraciones de SP1 y SP2

A partir de estas configuraciones, es posible concluir respecto al SP1 -en primer lugar- que si bien algunos de los objetos intervinientes en la resolución de los diferentes incisos son los mismos, no siempre "funcionan" de la misma manera. Por ejemplo, la relación *divide* se pone a funcionar a partir de su definición de la misma manera en los diferentes incisos, mientras que la definición de *divisor* interviene asociada a la división entera (resto cero) cuando se trata de "verificar" si ciertos números son divisores de otros y como relación (*a es divisor de b si y sólo si existe un k entero tal que b=a.k*) cuando se trata de determinar condiciones para *k*. Además, el análisis de las relaciones intervinientes y emergentes entre los diferentes objetos primarios de cada una de las tres configuraciones, sumado a una mirada sistémica de las mismas, permite objetivar las diferencias en su funcionamiento; por ejemplo, lo emergente en la primera situación funciona como situación-problema en la segunda. Y la técnica emergente en ésta como situación problema en el tercer inciso. Este cambio en el funcionamiento de los objetos, pone en evidencia su relatividad personal y contextual (Godino et al., 2007), desvelando la dependencia del significado de los objetos matemáticos con los juegos de lenguaje en que los mismos participan. En síntesis, se evidencia en este primer análisis del SP1 que, si bien la consigna original de la situación-problema es la misma para todos los incisos, lo que en realidad "funciona" como situación-problema para quien la resuelve, varía de acuerdo al juego de relaciones personales disponibles y emergentes, en cada caso.

Por su parte, la configuración respecto del SP2, revela que la estrategia de resolución -en los tres incisos- está sostenida por una única propiedad ($a, b, c \in Z$: $a|b$ *y* $a|b+c$ *entonces* $a|c$) que aparece como disponible en la situación 1 y se transforma en procedimiento útil que se recontextualiza en cada uno de los dos siguientes incisos, razonando por condiciones necesarias. Justamente este conocimento disponible es el que caracteriza la situación problema en cada inciso que enriquece su campo de aplicación. En efecto, tal como se refleja en las correspondientes configuraciones, en todos los casos se busca que el segundo elemento de la relación divide sea la suma de dos términos en donde uno de los sumandos es un número natural y donde el primer elemento de la relación divida al otro sumando, para poder sacar conclusiones usando la propiedad antes mencionada. Esta gran diferencia de significado del segundo elemento de la relación “divide a” respecto al SP1, es la razón principal por lo cual se eligieron estos dos ejemplos para mostrar su análisis ontosemiótico.

Si ahora realizamos un análisis comparativo entre ambos Sistemas de Prácticas, observamos que: la “entrada” al problema, que se hace en el SP2, mediante las propiedades de la relación permite que las conclusiones que se puedan obtener cuenten con un mayor grado de generalidad y la técnica es validada en un amplio dominio. En el caso del primer sistema de práctica, la "entrada" elegida al problema condiciona en gran medida el alcance del grado de generalización que tienen las conclusiones obtenidas, así como el alcance o el dominio de validez de las técnicas intervinientes.

Entre los objetos matemáticos que intervienen en ambos sistemas de práctica podemos destacar la definición de la relación divide y la definición de divisor usadas en distintos momentos y de diferentes modos acorde al tipo de sub problema que quieren resolver. Asimismo, la argumentación en ambos casos se manifiesta esencialmente como argumentación deductiva, sin embargo, una busca la existencia de un número, mientras que la otra se desarrolla por condiciones necesarias. En ambas prácticas lo emergente es una técnica (no la misma), la cual se aplica reiteradamente, en ambos SP, para ampliar su dominio de validez. Estos elementos invariantes son potenciales objetos a tener en cuenta para iniciar un "diálogo matemático" entre ambos sistemas de prácticas que tensione diferencias, similitudes, grados de generalidad.

Segundo nivel de análisis

A continuación se plantea una síntesis de los resultados obtenidos en este segundo nivel de análisis de la actividad matemática desarrollada, para ello se incluye una descripción del análisis de los procesos de Generalización-Particularización, Descomposición-Reificación y Materialización-Idealización, puestos a funcionar en cada una de las prácticas:

- Proceso de Generalización-Particularización: en el enunciado de la situación-problema se presentan expresiones generales como $n|n+1$ y $n-2|n+2$, donde n puede tomar valores naturales. En el momento en que se asigna valores concretos a n como en los incisos 2 y 3 del SP1, se está "particularizando", como también se "particulariza" en el procedimiento que se utiliza en el SP1 para la resolución del problema, cuando se plantea la "particularización" (sea $t \in N$) de un cuantificador universal ($\forall t \in N$). Vale resaltar que si bien en ambos casos en este SP1 se identifica un proceso de particularización-generalización, los extensivos intervinientes funcionan de manera diferente puesto que, en el primer caso, el particular es un número natural concreto mientras que en el segundo, es un representante de un conjunto que funciona a partir de las propiedades que representa. Otro momento en esta práctica donde se puede evidenciar este proceso es cuando se concluye la demostración ya que, a partir de la validez de una propiedad para un t particular, y mediante reglas lógicas, fue posible generalizar esta propiedad para todo t natural.

En el SP2 el particular con el que se trabaja es el segundo elemento de la relación divide de cada uno de los incisos, el cual pretende ser modificado para poder "leerlo" en términos del primer elemento de la relación y sacar conclusiones sobre este particular, utilizando la propiedad de divisibilidad que si un número divide a una suma y a uno de los sumandos, entonces divide al otro. Esta técnica logra en el tercer inciso ser generalizada para cualquier expresión del tipo $n^2 +m$, con m un número natural.

- Materialización-Idealización: Un proceso de idealización que se identifica en ambos sistemas de prácticas, tiene que ver con el reconocimiento de una generalización que se pone en evidencia en la relación existente entre los valores numéricos considerados anteriormente cuyo ostensivo ($t|t+a$, con $t \in N$ y a un natural fijo) permite avanzar en la construcción y demostración de una conjetura. La propiedad de infinitud de los números naturales es otro elemento de significado que se idealiza y que no se explicita de manera literal en los sistemas de práctica, sino que se materializa a partir de la consideración conjunta de las dos instancias de resolución en el SP1, es decir con la exploración de casos particulares, incluyendo algunos valores naturales, y la construcción y demostración de una conjetura, abarcando al resto de los valores naturales a partir del análisis de propiedades de los elementos de dicho conjunto. En el SP2 esta propiedad de la infinitud se mantiene en el plano de lo implícito al argumentar por condiciones necesarias. De esta manera, la dualidad ostensivo-no ostensivo sostiene también al proceso de Generalización-Particularización explicitado anteriormente.

-Proceso de Descomposición-Reificación: el enunciado de la situación-problema, que en principio podría considerarse como un unitario implica, para comenzar a trabajar en su resolución, un proceso de descomposición a partir de la consideración de cada uno de los tres incisos. A su vez, cada uno de ellos funciona como un nuevo unitario que es necesario descomponer para abordar el problema y que, simultáneamente, requiere de una reificación para construir una respuesta. Específicamente, la actividad matemática desarrollada en diferentes incisos del SP1, estuvo regulada por la exploración de casos particulares cuya mirada conjunta posibilitó la construcción de una conjetura (proceso de reificación) que junto a su prueba formal constituyen elementos de un sistema que permitió la completa determinación de los números naturales que cumplen las distintas relaciones (entidad unitaria). Para determinar las relaciones invariantes, es necesario llevar adelante un proceso de reificación a partir de una mirada conjunta de ellos que, en un primer momento, funcionaban como elementos de un sistema. Esto último se observa con claridad en el segundo sistema de práctica elegido.

Por último, el análisis de los procesos intervinientes en las prácticas matemáticas permitió, por un lado, profundizar la desnaturalización de la complejidad onto-semiótica de los objetos matemáticos, intervinientes y emergentes de ambos sistemas de prácticas, y por otro, para la estudiante del profesorado reconocer el valor epistémico y cognitivo de estos dos niveles de análisis. De esta manera fue posible iniciar un estudio referido a los complejos niveles de algebrización a los que se somete la actividad matemática desplegada, sobre el cual se obtuvieron algunas conclusiones que se exponen a continuación.

Algunas conclusiones sobre el proceso de investigación

Este tipo de estudio permitió, en primer lugar, visibilizar cómo en un mismo problema que puede admitir una gran diversidad de estrategias de resolución, que se nutren del uso y establecimiento de relaciones con diferentes sentidos y usos de las mismas, existe un "conjunto de factores invariantes" que viene determinado por la misma naturaleza del problema, independientemente de la estrategia por la que se opte y sobre el cual hay que trabajar colectivamente. Esto podría transformase en un criterio heurístico para problematizar una práctica en un momento colectivo. En el momento de planificar una clase es muy importante considerar estas cuestiones, es decir, la explicitación del juego de relaciones que intervienen en un sistema de práctica se constituye en una herramienta de análisis potente para pensar y gestionar discusiones en la clase. En otras palabras, la identificación de los elementos intervinientes y su funcionamiento dentro de la práctica matemática con el objetivo de identificar lo invariante, aportarían indicios para generar un posible diálogo entre las distintas producciones.

Por otro lado, con estos dos niveles de análisis realizados, fue posible avanzar en la identificación-en cada sistema de práctica personal-de distintos niveles de algebrización. Además, permitió objetivar cambios en el grado de algebrización de las citadas prácticas que se producen en la actividad matemática desarrollada por cada una de las personas involucradas en este estudio. Por ejemplo en el SP1 podemos visibilizar que:

- Cuando se explora numéricamente en el funcionamiento de la relación intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante un lenguaje numérico. (Nivel 1)

- El reconocimiento de una generalidad que evidencia la relación existente entre los valores numéricos considerados, le permite avanzar en la construcción de una conjetura. (Nivel 2)

- La materialización de dicha relación mediante el ostensivo $t|t+a$ (con $t \in N$ y a un natural fijo), habilita un avance hacia una demostración que implica un trabajo con objetos intensivos de mayor nivel de algebrización, representados de manera simbólica, realizando transformaciones con ellos sin referir a la información del contexto. (Nivel 3)

La identificación de los niveles y la descripción de cómo se bascula entre ellos ayudó a entender la complejidad ontosemiótica de las transformaciones matemáticas que caracterizaron los respectivos razonamientos algebraicos desarrollados en cada sistema de prácticas. Asimismo, la visualización de los cambios de niveles permite al futuro docente ayudar a entender la complejidad de la progresión del aprendizaje individual y colectivo.

Por último, y a modo de cierre, se transcriben algunas reflexiones realizadas por la estudiante protagonista de esta práctica de investigación, respecto a los propios significados construidos a lo largo del recorrido:

> Durante el recorrido realizado en esta práctica de investigación fue posible avanzar en la construcción de un espacio cooperativo de trabajo que nos habilitó la posibilidad de discutir, problematizar y resignificar la fortaleza de algunas herramientas teóricas propuestas por el EOS; explicitando la necesaria producción de conocimiento que implica ponerlas a funcionar en un análisis didáctico específico. Desde un punto de vista personal, como futura profesora en Matemática, puedo decir que transitar por este nuevo contexto de aprendizaje, me permitió problematizar tanto el funcionamiento de las tareas como mi futuro rol docente, en el sentido de que logré formular otro tipo de interrogantes a la hora de escoger, resolver o proponer una tarea matemática; por ejemplo, ¿qué significado de los conocimientos que la tarea moviliza, espero que se construyan? ¿Qué conocimientos disponibles se deben reconocer como posibles, para abordarla? ¿Qué significados de números y expresiones algebraicas se podrían poner en juego a partir de su resolución? ¿Qué relación hay entre los objetos que posiblemente intervengan en diferentes prácticas matemáticas que solucionan la tarea? ¿Cuáles emergen? ¿Qué estatus ontológico pueden adquirir? ¿Son los que esperaba que emerjan? ¿Cómo articulo lo que "se muestra" con lo que "se idealiza" por parte de los estudiantes? ¿Qué niveles de algebrización puedo identificar? ¿Cuáles quiero potenciar? ¿Es posible detec-

tar elementos invariantes? Estas son sólo algunas preguntas que creo que, como futura profesora, debería tener muy presente a la hora de planificar, gestionar y reflexionar mis posibles clases. Con esto no quiero decir que cada actividad que proponga requiera del despliegue profundo de los distintos niveles de análisis como los mencionados, pero sí considero que ameritan una constante reflexión acerca de su complejidad ontosemiótica y consecuentemente, la problematización de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Además, la incorporación de estas nuevas herramientas me permitió leer, interpretar y tensionar algunas de las relaciones que se dan entre los objetos, intervinientes y emergentes, de un sistema de práctica que se solicita que se escriba, y de esta manera, fortalecer el marco referencial en el que se basará mi práctica profesional, problematizando -particularmente en esta tarea- aspectos de la actividad matemática necesarios de desentrañar para avanzar en la construcción del conocimiento. *(D. Canale, comunicación personal, diciembre 19 de 2019)*

Referencias bibliográficas

Becker, M. E, Pietrocola, N. y Sanchez, C. (2001). *Aritmética*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 9-33). Melilla, España: Facultad de Humanidades y Educación.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 117-142. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_RAE-PRI-SEC.pdf

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Eje 5
Educación matemática en carreras no matemáticas

Gamificar la enseñanza del cálculo en carreras de ingeniería: una propuesta innovadora

MARIO GARELIK

mgarelik@gmail.com

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Este trabajo se desarrolla en el ámbito de un proyecto de investigación referido al análisis del discurso de la ciencia en matemática y las distintas estrategias a trazar en torno a él que tienen por objetivo mejorar la comprensión para conseguir buenos aprendizajes.

Se contextualiza a estudiantes de la asignatura Cálculo I, del primer año de las distintas carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral. En la actualidad, el protagonismo de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje es innegable: una alta disponibilidad tecnológica actualmente se hace presente en la mayoría de los escenarios educativos. El presente trabajo describe una experiencia áulica consistente en la implementación de una propuesta didáctica vinculada a la *gamificación*, en un modo de enseñanza no lineal, alternativo al tradicional, que recupera valores de colaboración y autoevaluación en los aprendizajes a través de una práctica motivadora, entretenida, desafiante y enriquecedora que pretende estimular el alcance, por parte del alumno, de saberes ricos en significación, favoreciendo así una mejora en su rendimiento académico.

Introducción

El desempeño académico del alumno ingresante a la universidad en los inicios de su vida universitaria resulta fundamental para el joven estudiante, en tanto incide de manera directa en sus eventuales avances o retardos en los tiempos de carrera e incluso, en ocasiones, en el abandono de la misma. Desde la comunidad educativa son incesantes los esfuerzos por revertir el actual estado de situación al respecto, que dista de ser el esperado.

Por otra parte, en la actualidad resulta insoslayable la influencia de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la vida social de las personas en general y en el ámbito de la educación en particular, en el que prácticamente todos los procesos didácticos se encuentran mediados por algún tipo de tecnología. Una extensa literatura a nivel universal procura dar cuenta de la complejidad y riqueza del tema.

En particular, este estudio aborda la mencionada situación contextualizada, en tiempo y espacio, a los alumnos del primer año de la asignatura Cálculo I de las distintas carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.

Específicamente, se describe la implementación de una estrategia didáctica consistente en la incorporación de la tecnología digital, que se plasma en la inclusión de una instancia lúdica durante el dictado de clases. El trabajo inicia con una descripción del ámbito en el que se desarrolla la experiencia, que justifican su diseño y puesta en práctica. Posteriormente, se brindan los lineamientos teóricos que dan marco a la propuesta, se detallan las cuestiones metodológicas, en cuanto a diseño y desarrollo, para finalizar con conclusiones de la investigación y enumeración de ciertas limitaciones identificadas.

Aspectos contextuales y justificación de la propuesta

El abordaje de la incorporación masiva y sin pausa de las tecnologías a la vida cotidiana, y muy especialmente a la educación, resulta, hoy en día, ineludible. Indagando en las posibles causas de este avance de las TIC sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, podrían mencionarse: una alta disponibilidad tecnológica para los actores del proceso de enseñanza, nativos o inmigrantes digitales, y una generación de estudiantes, residentes digitales, que inclina sus preferencias de consumo de información a canales multimediales en sus matices más variados, desplazando (no sustituyendo), así, el lugar central que el libro ostenta desde hace siglos como ordenador natural de saberes, entre otras.

No desvinculado de lo anterior, se asiste en educación al impulso y desarrollo de una decidida vocación de reforma del currículum universitario como estrategia para mejorar las competencias cognitivas básicas: aprender a aprender, aprender a procesar información, aprender a aplicar los conocimientos en la resolución de problemas, virando desde la tradicional valoración de las funciones enciclopédicas y refuerzo de habilidades mecanicistas hacia el fortalecimiento de las funciones cognitivas de los aprendizajes.

Sin embargo, tales cambios todavía distan mucho de haberse logrado: diversos problemas que se observan en el sistema universitario pueden ser consecuencia de la ausencia o insuficiencia de acciones que concreten en la práctica las metas declaradas.

En relación a este tema, persiste desde hace varios años la preocupación por el rezago y la repitencia en los cursados, la relación entre los bajos índices de retención del primer año y los resultados de aprendizaje de las asignaturas iniciales de las carreras universitarias.

La situación de desgranamiento de las matrículas en los primeros años de las universidades nacionales se evidencia, en particular, en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, en cuyos informes institucionales se puede constatar que los resultados obtenidos en las distintas instancias de evaluación por los estudiantes de las asignaturas de matemática del ciclo inicial no pueden ser calificados de satisfactorios, dado que la cantidad de alumnos libres excede largamente la suma de promocionados más regulares.

No puede desecharse, entonces, la hipótesis de que tanto el rezago, indicador del atraso y rendimiento académico de los estudiantes que tiene como referente el momento de la inscripción a las materias, como el abandono de los estudios universitarios durante los primeros años, estén asociados a las dificultades que el ingresante encuentra en esas asignaturas iniciales.

Indudablemente, el origen de tal situación radica, en aspectos tanto sociales, educativos, políticos y económicos de los más diversos, como otros que se vinculan, según investigaciones como las de Peña (1999) y Ochoa (2004), con una inadecuada selección de la carga académica, la falta de selección de cursos esenciales o con seriación académica, la reprobación y los horarios inapropiados de las clases. En particular, las competencias previas en matemática con las que el alumno inicia su vida universitaria están muy lejos de resultar suficientes. De ello dan cuenta las encuestas y pruebas diagnósticas realizadas todos los años a los ingresantes, en tanto indican que los mismos comparten un marcado déficit en su formación en la disciplina.

Además, los alumnos manifiestan problemas en la construcción de significados de conceptos clave que subyacen en los distintos temas de las matemáticas del año inicial.

Esta situación se hace evidente, particularmente, en Cálculo I, asignatura que cursan los alumnos del primer año de las carreras de Ingeniería Ambiental, Ingeniería en Recursos Hídricos e Ingeniería en Informática de la facultad, y en la que resultan comunes las dificultades de los estudiantes para alcanzar aprendizajes satisfactorios en términos de significación.

El currículum de la materia se constituye por los tres ejes típicos de Cálculo de una variable: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Sucesiones y Series numéricas y de funciones. El presupuesto horario consta de 75 horas cuatrimestrales, que semanalmente se plasman en tres comisiones de teoría de dos horas cada una y 6 comisiones de práctica de tres horas cada una. En cuanto al régimen de regularización y promoción, se dispone de dos parciales distribuidos equidistantes en el cuatrimestre, según los cuales un alumno alcanza la categoría de cursado *regular* si en ambos parciales obtiene un puntaje de, al menos, 40 puntos. Quien no alcance este umbral, queda en la condición de *libre*. Aquel estudiante que obtiene un mínimo de 60 puntos en ambos parciales y promedio 70 entre ambos, resulta en la categoría *Coloquio Pendiente*, debiendo rendir un breve Coloquio Final Integrador y no el examen final completo.

Los escasos tiempos disponibles para la enseñanza redundan en aprendizajes intensivos que, en la mayoría de las oportunidades, se contraponen con los tiempos de estudio que necesita un ingresante promedio para asimilar y procesar tanta información de manera significativa.

Esta situación, junto con la posición primaria de la materia en los distintos currículos de las ingenierías, cobra relevancia si se tiene en cuenta que un mal desempeño en la misma repercute negativamente en el desarrollo académico y se erige, entonces, en un obstáculo para el avance en la carrera.

A partir de lo expuesto, se consiguió incorporar un Taller de Síntesis Teórica (TST), de una hora adicional a cada clase de teoría, al término de la misma. El taller es de asistencia voluntaria y, en su marco, se llevó adelante la presente propuesta didáctica.

Esta experiencia de cátedra se fundamenta así en la necesidad de implementar una línea de acción concreta para abordar la problemática anteriormente descripta, partiendo del binomio Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) - procesos de enseñanza, circunscribiendo su alcance al marco de la asignatura Cálculo 1.

Los objetivos planteados tuvieron distintos focos de interés:

- Estimular una participación activa en los temas de la materia en un formato distinto, de carácter lúdico, que motivara a los alumnos, sacándolos del natural letargo de una clase unidireccional, en oportunidades magistral.
- Favorecer el trabajo en equipo, permitiendo, por una parte, dar lugar a un aprendizaje de naturaleza colaborativa y, por otra, aumentar el flujo de vínculos de sociabilidad entre los alumnos permitiéndoles, simultáneamente a reconocer-

se como parte de un grupo, desarrollar y entrenar hábitos de pluralidad y respeto por el pensamiento de sus pares.
- Fomentar la creatividad, el desarrollo del pensamiento crítico y la capacidad de resolución de problemas.
- Promover, a partir del espíritu lúdico la motivación personal y adquisición de buenos aprendizajes, ricos en significación.
- Debatir enfoques y consolidar saberes abordados en clase.

La experiencia tuvo lugar durante el desarrollo del cursado completo de la asignatura en los segundos cuatrimestres de los años 2018 y 2019, y los detalles de su implementación y puesta en práctica se brindan en la cuarta sección.

Lineamientos teóricos

Tanto los antecedentes sobre el tema como el marco teórico se organizan según los ejes temáticos siguientes: impacto de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje, registros de representación semiótica, importancia de la autoevaluación y el problema de la significación en los aprendizajes. Se realiza a continuación un breve detalle sobre ellos.

Como se mencionó en la segunda sección, se asiste en la actualidad a un corrimiento del libro como eje central de toda fuente de conocimiento e información. No significa, sin embargo, un reemplazo del mismo, sino más bien relativizar su enorme centralidad como ordenador natural de saberes, proponiendo una diversidad de fuentes multimediales como alternativa para los jóvenes de hoy, residentes digitales, ávidos de adquirir la información de otro modo. (Martín-Barbero, 2003).

Por su parte, los adultos de hoy, la mayoría de ellos visitantes digitales, miran con asombro el alto grado de afinidad existente entre los jóvenes y adolescentes con los medios audiovisuales, los videojuegos y las computadoras.

En sintonía con lo anterior, la reformulación de las prácticas docentes en la universidad evidencia un giro a centrarse en el aprendizaje y no sólo en la enseñanza y, en ese marco, la implementación de las TIC desempeña un rol destacado, como sostienen Delgado y Oliver (2006), en tanto hacen factible "... el acceso a todo tipo de información actualizada, (...) posibilitan el proceso y almacenamiento de datos de forma inmediata, y, finalmente, constituyen canales de comunicación rápida para difundir o intercambiar información o para contactar con otras personas o instituciones" (p.2).

Este trabajo describe, precisamente, una propuesta didáctica que contempla la incorporación de tecnologías a la enseñanza universitaria de una tradicional asignatura, Cálculo I, del primer año de los currículos de carreras de ingeniería, con alumnos de entre 17 y 19 años.

A partir de lo expuesto en párrafos anteriores, resulta un punto de importancia no menor a tener en cuenta para la actividad docente el apego e identificación de los estudiantes de esa franja etaria, en tanto residentes digitales, para con los medios alternativos de captación de información y conocimientos: internet, textos electrónicos, teléfonos inteligentes, aplicaciones, etc. Cada alumno es un universo propio, con sus propias capacidades y habilidades para acceder y producir conocimiento, resolver problemas y desarrollar nuevas competencias.

Es así que surge la idea de una propuesta de *gamificación* como herramienta que propone técnicas, reglas y dinámica de funcionamiento propias de los videojuegos, adaptadas convenientemente a la dinámica áulica y que, como narrativa didáctica, compromete la selección y/o producción de contenidos motivadores que se integran de manera armoniosa para responder a una nueva modalidad de aprendizaje.

Implica, por ejemplo, no necesariamente reemplazar el tradicional material de estudio, pero sí complementarlo y alternarlo con la inclusión de videos (que no remitan sólo a una trama expositiva o explicativa como videoconferencias o charlas magistrales sino también producciones cinematográficas), literatura académica y de ficción, animaciones, videojuegos, aplicaciones educativas disponibles para teléfonos celulares inteligentes, etc. Resulta, así, una alternativa a los tradicionales recorridos de aprendizaje que implican casi con exclusividad el formato de libro, apuntes de cátedra y, en el mejor de los casos, evaluaciones y foros de discusión disponibles en entornos virtuales, que a menudo no logran revertir la lineal y monótona experiencia de cursado, proponiendo, en su reemplazo, un entorno dinámico, placentero, participativo y motivador, vinculado con el carácter lúdico y creativo asociado con los videojuegos.

En términos de Gee (2003), los juegos no son solamente una fuente de entretenimiento, sino también un modelo a seguir para el funcionamiento escolar y, en particular, acerca de cómo debería encararse todo proceso de aprendizaje.

La propuesta de *gamificar* pone énfasis en que la estructura de la clase y los repertorios cognitivos puestos en juego en el proceso de aprendizaje se vean modificados sustancialmente, desautomatizando las prácticas tradicionales y posicionando al alumno en un lugar más activo en donde pueda escoger qué camino tomar en función a sus preferencias o necesidades.

Esta adaptación en el proceso de enseñanza pretende que la propuesta resulte más atractiva, entretenida, en comparación con el diseño tradicional sustentado en el triángulo profesor–estudiante–contenido, favoreciendo incluso, en ocasiones, que conceptos de difícil abordaje para los estudiantes desde la explicación convencional puedan ser alcanzados ahora de una manera más sencilla y comprensible a través del uso de herramientas interactivas.

En definitiva, y según sostiene Morales (2009), la incorporación de adecuados instrumentos que utilizan el juego con intencionalidad educativa permite aprender y desarrollar diferentes tipos de habilidades y estrategias, dinamizar las relaciones entre los componentes del grupo, no sólo desde la socialización sino también en la práctica de aprendizaje, promoviendo la reflexión en la toma de decisiones a través de un aprendizaje activo y crítico, no pasivo.

Cariaga (2014) propone que la promoción del trabajo colaborativo "las capacidades de enfrentar, comprender y asimilar las situaciones reales, con la posibilidad de elaborar respuestas adecuadas en diversas situaciones y la posterior toma de decisiones, individuales o grupales para resolver situaciones específicas" (p.9).

Sin embargo, como se menciona en Rodríguez Illera (2001), esta mirada no individualista de los procesos de enseñanza y aprendizaje también evidencia ciertas desventajas que, aunque menores con relación a los beneficios, deben ser tenidas en cuenta: la no colaboración por parte de algunos integrantes, miembros del grupo que utilizan el trabajo del resto, la apropiación indebida del trabajo del otro.

Basado en el principio dual de aprender a colaborar y colaborar para aprender, la teoría del Aprendizaje Colaborativo ha dado lugar, desde hace una década aproximadamente y a partir de la inserción en él de las herramientas informáticas a una interesante variante: el Aprendizaje Colaborativo Apoyado por Computadora (CSCL), área emergente en tecnología educativa que procura dar cuenta de cómo las personas pueden aprender de manera conjunta con la ayuda de los ordenadores, mediación que ha ido progresivamente sofisticando la noción de aprendizaje y conduciendo a nuevos desafíos acerca de cómo implementar este proceso. Según Rodríguez Illera (2001), si bien el CSCL retoma distintos aspectos de las teorías de cognición situada, compartida y distribuida y de los enfoques sociocultural y constructivista del conocimiento, rescata una cuestión común de todos ellos como es la oposición al individualismo y el énfasis en lo social como punto de partida para todo proceso cognitivo.

El desarrollo y aplicación de herramientas informáticas, todavía muy limitadas en cuanto a su funcionalidad, como instrumento mediador para el proceso de aprehender saberes basado en la colaboración dio origen a numerosas investigaciones, las cuales proponen varios modos de abordaje del CSCL que van desde considerarlo como un mero aporte en lo tecnológico, hasta un nuevo paradigma de instrucción.

Desde otro plano de análisis, la implementación de las TIC en la enseñanza permite contar con distintas representaciones semióticas, concebidas desde la teoría de Duval, como un conjunto de signos que resultan el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros individuos. (Duval, 1993). Particularmente, en matemática, los registros semióticos de representación son fundamentales, en tanto los objetos matemáticos no son alcanzables sino por medio de sus representaciones, dado su carácter abstracto que los diferencia de los objetos palpables del mundo físico. (Duval, 1993). En relación a ello, Gee (2003) señala que en la *gamificación* de la enseñanza se cumple lo que el mismo autor denomina *principio de los ámbitos semióticos*, esto es, el proceso se desarrolla en un registro semiótico de signos que representan distintos significados y que facilitan un aprendizaje activo, crítico y reflexivo, lo cual, desde la teoría de Duval, resulta una contribución destacada, en tanto, por un lado, una condición que debe satisfacer un sistema semiótico es la conversión o transformación de la representación en otra, de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial y, por otro, el cambio y la coordinación de los registros resultan fundamentales en la fase de aprendizaje para la correcta conceptualización de los objetos (matemáticos). (Duval, 1993).

Por otra parte, un aspecto esencial de la práctica docente, es el de evaluar los aprendizajes. La extensa literatura que refiere al tema refuerza, por un lado, la importancia de considerar a la evaluación como un proceso continuo e integral y no como un producto o resultado y, por otro, la idea de promover a través de la misma, la autonomía en el aprendizaje, de modo que sea el mismo alumno quien compruebe su nivel de aprendizaje y, en caso de ser necesario, sea capaz de reorientarlo. Según Pérez (1997, citado en Cruz Núñez y Quiñones Urquijo, 2012), en la autoevaluación sólo participa el estudiante de forma directa, y, por ende, él mismo se convierte en protagonista indiscutible de su aprendizaje, aumentando su motivación, compromiso y responsabilidad. En Castillo y Cabrerizo (2003) se asegura que, si bien el docente es siempre el responsable de la calificación del estudiante, un buen proceso de autoevaluación debe ser *objetivo* en el sentido de la conveniencia de comparar la producción del alumno tanto con la de sus compañeros como con la posición sobre el tema del mismo docente, de modo que todos cuenten con los criterios contra los que se contrastarán las distintas situaciones. De manera complementaria, es menester tener en cuenta la *periodicidad* de la autoevaluación, respecto de la cual, investigaciones como la de Delgado y Oliver (2006) sugieren la necesidad de proponer con cierta frecuencia actividades evaluativas que contemplen tanto los contenidos del currículum como las competencias a alcanzar. “De esta forma, la evaluación se convierte en continua o progresiva, y el profesor puede realizar un mayor y mejor seguimiento del progreso en el aprendizaje” (p.2).

En contraposición a lo desarrollado hasta aquí, la enseñanza tradicional, basada en el paradigma del contenido, propone actividades que, en su mayoría, miden la cantidad de conocimiento retenido por el alumnado en un momento en concreto, el día del examen, pero que no ahondan en los procesos de razonamiento o de comprensión de herramientas deductivas básicas que los conducen a su adquisición. Así, la incorporación de nuevos saberes a los anteriores, resulta compleja en términos de significación en los aprendizajes alcanzados.

El problema de la construcción de significados se torna muy frecuente en las asignaturas iniciales de los currículos de ingeniería, cuyos contenidos se apoyan correlativamente en otros anteriores de manera sistemática. En tales situaciones se presenta, a manera de problemática transversal, el conflicto de la significación del aprendizaje. En el marco de la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 2002) y considerando trabajos anteriores sobre el tema, puede pensarse que el alumno aloja en su estructura cognitiva saberes de manera atomizada que no logra interrelacionar con otros nuevos de manera fluida. Precisamente, y respecto de conseguir un buen ensamble con conocimientos anteriores ya apropiados por el alumno, Sáenz Adán sostiene que “produce en él una actitud inicial positiva en cuanto a motivación y atención, puesto que no le resulta un conocimiento aislado e inconexo” (Sáenz Adán, 2015, p. 31).

Cuestiones metodológicas. Implementación y desarrollo

Con el comienzo mismo del cursado del segundo cuatrimestre de los años 2018 y 2019, dio inicio la presente experiencia, cuyos detalles de implementación se detallan a continuación.

La propuesta tuvo un marcado rasgo de interdisciplinariedad: participaron de la misma: Asesoría Pedagógica de la facultad, el Departamento de Educación a Distancia, un representante del Área de Redes como soporte técnico y el Equipo Docente de la cátedra. Esta situación hizo que las distintas áreas involucradas pudieran obtener insumos de variada naturaleza que resultaron de valía para futuras decisiones.

Iniciado el cursado de la asignatura, durante la primera semana de ambas cohortes (2018 y 2019), se realizó un relevamiento en las distintas comisiones referido a la disponibilidad de teléfonos inteligentes y datos que permitió considerar viable la implementación de la actividad. Se solicitó a los alumnos que descargaran para la siguiente clase, en sus teléfonos móviles, la aplicación gratuita Kahoot!, de escasos requerimientos en cuanto al tipo de dispositivo, memoria, espacio etc.

Utilizando la página que dispone la asignatura en el entorno virtual Moodle, un día antes de la segunda clase se les envió un recordatorio para que llevaran todo lo solicitado en tiempo y forma.

Finalizada la clase de teoría correspondiente a la segunda semana, se hicieron presentes en el aula los representantes de los distintos departamentos antes mencionados, conjuntamente con el equipo docente completo de cátedra.

Es importante remarcar que, pese al carácter voluntario de la asistencia al taller, asistieron al mismo casi la totalidad de los alumnos que habían tomado la clase teórica inicial en ambas cohortes, 2018 y 2019.

Los alumnos fueron agrupados en equipos de, como máximo, 5 alumnos. El agrupamiento se hizo a voluntad de los estudiantes, sin seguir un criterio determinado para el mismo. Los grupos fueron estables a lo largo de todo el cuatrimestre.

El equipo de Asesoría Pedagógica se encargó del registro inicial de la constitución de los grupos, mientras el resto de los docentes en el aula colaboraba con la tarea y, asimismo, chequeaba que todo estuviera de acuerdo a lo preparado. Así se dio inicio al Taller de Síntesis Teórica que, como se indicó anteriormente, tuvo lugar en dos etapas, que se describen a continuación.

Etapa 1: Construcción conjunta de un esquema relacional integrador

En este espacio, que tuvo lugar, semana a semana, durante los primeros 30 minutos, se diseñó en la pizarra, de manera interactiva entre los distintos grupos, un esquema relacional de los conceptos que habían abordado recientemente en la clase. Si bien existió una *línea guía* para tal fin, que estuvo a cargo del docente de teoría, no resultó para nada rígida. Más aún, los esquemas construidos en las tres comisiones resultaron distintos entre sí en los talleres a lo largo del cuatrimestre. Mientras el mapa relacional era confeccionado, el resto del equipo de profesores tomaba registros referidos a la intervención, tanto *entre* como *intra* grupos.

El grado de contribución de los alumnos fue considerablemente bueno, lográndose una participación activa de la mayoría de ellos en forma de aportes, refutaciones, ejemplificaciones, etc.

El ambiente resultó, en ambos años, si bien un tanto desordenado, propicio para el debate y, por qué no, para risas y expresiones divertidas que tornaron el ambiente muy cálido y entretenido. Concluidos los 30 minutos de esta etapa, los estudiantes solicitaron autorización para tomar fotos del esquema resultante, a lo que el equipo docente accedió sin inconvenientes.

Etapa 2: Kahoot! El juego como herramienta de aprendizaje

La segunda etapa se inscribió en el marco de una propuesta de *gamificación*, cuyo encuadre teórico se explicitó en el tercer apartado del presente trabajo.

Ya dispuestos los grupos desde el inicio mismo del TST, se dio inicio a la segunda parte del taller, consistente en un conjunto de preguntas (entre 8 y 12 en promedio) acerca de los temas tratados en la clase de teoría y sintetizados en el esquema relacional confeccionado en la etapa anterior.

Cada grupo era un jugador (*kahooter*) y, en él se elegía un *representante*, que era quien aportaba el teléfono inteligente para jugar. Entre los componentes del grupo realizaban tal designación, como era de esperar, a quien tenía el mejor equipo en cuanto a requerimientos técnicos.

La denominación de los equipos estuvo a cargo de sus propios integrantes, que promovieron nombres que se destacaron por lo ocurrente y simpático.

La aplicación *Kahoot!*, disponible para dispositivos portátiles, requiere un escaso uso de datos móviles, cuestión que fue satisfecha sin ningún tipo de inconvenientes por parte de los participantes.

Una vez en el entorno de la aplicación, el docente a cargo, en el rol de moderador, iba proyectando, una a una, las preguntas que conformaban la actividad diseñada, de manera secuencial y administrada según los tiempos que él mismo creía necesarios. Las consignas integradas en cada juego, todas configuradas con cuatro alternativas de respuestas posibles, fueron preparadas previamente por el mismo docente de teoría y tenían como objetivo afianzar los conceptos vistos en la clase. El tiempo disponible asignado para responder oscilaba entre los 30 a 120 segundos (tiempo máximo que otorga *Kahoot*), de acuerdo al grado de complejidad de la consigna. Los desafíos propuestos no mostraban un alto grado de dificultad, sino que ponían en juego saberes *básicos* que el propio docente estimaba como indispensables de consolidar por parte de los estudiantes. Las situaciones fueron entonces presentadas en pantalla, a través de un proyector que reflejaba en la pared lo que el mismo moderador iba operando desde su notebook.

Conforme el tiempo asignado para responder transcurría, era notorio observar la motivación por jugar por parte de los alumnos, así como la ansiedad por responder dentro del tiempo estipulado, ya que, en caso contrario, la respuesta no era considerada como válida por Kahoot!

Paralelamente, el responsable de soporte técnico se mostraba siempre atento a cualquier eventualidad que pudiera presentarse y acudía en ayuda del equipo participante en caso de ser necesario. No se registraron mayores problemas de conectividad durante el transcurso de las sesiones, y cuando surgieron dificultades mínimas referidas al ingreso a la sesión de juego por parte de los alumnos (debían cargar un PIN de acceso), las mismas fueron solucionadas de manera instantánea.

Por su parte, los docentes de la Asesoría Pedagógica y del equipo de cátedra, se mostraron siempre atentos a tomar los registros pertinentes referidos al nivel de participación, protagonismo dentro de cada grupo, consistencia en la elaboración de las respuestas, etc., evidenciando, todos ellos, un alto grado de compromiso para con la experiencia.

Una vez finalizado el tiempo disponible para responder, el docente moderador mostraba en pantalla los registros de respuestas correctas, incorrectas y no aceptadas por haber sido enviadas fuera del rango de tiempo permitido.

Esta puesta en común para todos los grupos fue de considerable importancia ya que, en su marco, se producía un interesante *feedback* entre los profesores y los alumnos, que se tomaban un tiempo razonable para justificar sus respuestas, saliendo así a la luz eventuales dificultades de aprendizaje que eran dirimidas en ricos debates en los que participaban los alumnos y docentes de la asignatura.

Finalizado el tiempo de intercambio de ideas referidas a la consigna que había sido recientemente expuesta, tenía lugar la siguiente pregunta.

Cada sesión de juego o *trivia* constaba de entre 8 a 12 consignas, que fue, al momento del diseño, lo que se consideró como razonable para que el taller no se extendiese más de lo estipulado. Al final de cada juego, la aplicación otorgaba un puntaje a cada equipo, conformando la tabla de posiciones o *scoreboard* correspondiente a la sesión.

Así, a lo largo del cuatrimestre, semana a semana, en la página que la asignatura dispone en el entorno virtual Moodle se exhibió una *tabla de posiciones* de los distintos grupos de cada comisión. La misma se actualizaba con los scoreboards semanales que los estudiantes consultaban ávidos de conocer sus posiciones en la tabla.

Premios para los ganadores

En virtud de ser la exposición previa de las reglas de juego un aspecto clave de la *gamificación*, se estipuló al inicio mismo del cursado de cada año (2018 y 2019) que cada uno de los tres equipos ganadores (uno por cada comisión) de la competencia cuatrimestral recibirían como premio un puntaje adicional del 10% en el Coloquio Final Integrador para cada integrante del grupo que hubiera alcanzado la categoría de cursado Coloquio Pendiente.

En dos de los tres equipos de 2018, dos integrantes en cada uno pudieron acreditar un 10% extra al puntaje obtenido en el coloquio, mientras que en el tercer equipo ganador un solo alumno logró la mencionada condición de cursado y pudo adicionar un extra del 10% a su coloquio. En 2019, en cambio, los tres equipos ganadores, sumaron tres alumnos *Coloquio Pendientes* en cada equipo. En todos los casos, los estudiantes mostraron su satisfacción por haber conseguido el campeonato y así subir su nota final de la asignatura.

Impacto y primeras conclusiones. Limitaciones observadas

Para una evaluación inicial de la experiencia, se proponen dos planos de análisis.

Por un lado, como apreciación cualitativa, las opiniones relevadas en encuentros informales con los alumnos al término de cada taller dieron cuenta de un impacto positivo en ellos. Manifestaciones del tipo "¡Estuvo muy bueno!", "Profe, de ahora en más en clase tengo que estar atento… si no me pongo las pilas en eso, en el juego no sumo", "Es algo nuevo que te obliga a no distraerte porque sinó perdés", "No veo la hora que llegue el próximo así me recupero", "Está muy bueno porque nos divertimos un rato y, de paso, repasamos la clase vista", entre otras, evidenciaron un alto grado de aceptación de la propuesta por parte de los estudiantes.

Concluida la experiencia al final del cuatrimestre, en 2018, desde el Área de Educación a Distancia en conjunto con Asesoría Pedagógica de la facultad solicitaron a quienes así lo desearan un encuentro de asistencia voluntaria en un horario extra al de cursado, sin la presencia de los docentes de la cátedra, en el que pudieron explicitar sus opiniones acerca de la propuesta. Los 22 alumnos asistentes a tal encuentro se considera una cantidad satisfactoria, dado el carácter no obligatorio de la cita. Durante la entrevista, ratificaron la cálida aceptación de la experiencia y resaltaron la participación activa, dinámica, el carácter lúdico y entretenido de la misma que, a la vez, los estimulaba a estudiar más y llevar más al día la materia para alcanzar un mejor desempeño en el *campeonato*.

Por otra parte, y desde una visión más ligada a lo cuantitativo, merece mencionarse que, concluido el cursado, las estadísticas mostraron que los alumnos regulares durante el año 2018 y 2019 aumentaron en un 16% y 18%, respectivamente, contrastado con 2017, año hasta el cual no se llevó adelante la experiencia. Los *Coloquio Pendiente* aumentaron en un 5% (2018) y 8% (2019), con la consecuente baja en la cantidad de alumnos libres, siempre en referencia a 2017. Esta mejora en las categorías alcanzadas en el cursado puede considerarse como satisfactoria si se tienen en cuenta los aspectos de contexto detallados en la sección 2 de este trabajo.

Lo expuesto, tanto desde el positivo impacto en el alumnado como la mejora en las estadísticas de cursado, augura repetir la experiencia atendiendo a potenciar los aspectos favorables y procurando subsanar las fallas detectadas, de las cuales se brinda un detalle a continuación.

Como propuesta para 2020, se propondrán premios también para los segundos puestos en cada comisión, con el fin de mantener aún más la motivación por competir hasta finalizar el cursado.

En lo que refiere a las limitaciones presentadas, fueron mínimas y se relacionaron con problemas de conectividad que el personal de soporte técnico se encargó de solucionar de la manera más pronta posible. Sin embargo, como se hizo constar en una nota escrita en 2018 enviada al área técnica de la facultad y firmada por el equipo interdisciplinar a cargo de la experiencia, es de esperar que las condiciones de conectividad mejoren en términos de estabilidad. Merece señalarse que la nota fue bien recibida y desde el ámbito de la gestión de la facultad se asumió el compromiso de mejorar la situación.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona, España: Paidós.

Cariaga, R. (2014). Grados de hibridación del binomio enseñanza/tecnologías. En J. Asenjo, O. Macías y J. C. Toscano (Coords.). *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires: OEI. Recuperado de http://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/903.pdf

Castillo, S. y Cabrerizo, J. (2003). *Evaluación educativa y promoción escolar*. Madrid, España: Pearson Education.

Delgado, A. y Oliver, R. (2006). La evaluación continua en un nuevo escenario docente. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 3*(1), 1-13. Recuperado de http://rusc.uoc.edu/rusc/ca/index.php/rusc/article/download/v3n1-delgado-oliver/266-1183-2-PB.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, (5), 37-65.

Gee, J. P. (2003). *Lo que nos enseñan los videojuegos sobre el aprendizaje y el alfabetismo*. Málaga, España: Ediciones Aljibe.

Martín-Barbero, J. (2003). Saberes hoy: diseminaciones, competencias y transversalidades. *Revista Ibero-Americana de Educación, (*32), 17-34.

Morales, E. (2009). El uso de los videojuegos como recurso de aprendizaje en educación primaria y Teoría de la Comunicación. *Diálogos de la comunicación. Revista Académica de la Federación Latinoamericana de Facultades de Comunicación Social,* (78), 1-12.

Cruz Núñez, F. y Quiñones Urquijo, A. (2012). Importancia de la evaluación y autoevaluación en el rendimiento académico. *Zona Próxima. Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte,* (16), 96-104. Recuperado de http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/zona/article/view/3062/2760

Ochoa, B. (2004). *Determinación de factores que influyen en el rezago y deserción escolar en las carreras de licenciado en Economía y Finanzas (generación 2000) y Contador Público (generación agosto 1999)* (Tesis de maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Peña, S. (1999). *Factores que influyen en el rezago escolar de los Ingenieros Químicos.* (Tesis no publicada). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Rodríguez Illera, J. (2001). Aprendizaje colaborativo en entornos virtuales. *Anuario de Psicología, 32*(2), 63-75.

Sáenz Adán, C. (2015). *Apoyo del aprendizaje significativo en matemáticas a través de la gamificación* (Tesis de maestría). Universidad de La Rioja, España. Recuperado de https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE000914.pdf

Implementación de una experiencia sobre la definición de transformación lineal en una clase mediada por TIC desde APOE

FABIANA MONTENEGRO
montenegrofg@gmail.com
ALEJANDRA GAGLIARDO
alejandragagliardo@gmail.com
LORENA PODEVILS
podevilslorena@gmail.com
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

El trabajo que se presenta corresponde a una experiencia áulica desarrollada en la asignatura 'Álgebra Lineal' durante el 2019, en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, a partir del concepto de transformación lineal. La propuesta está integrada por actividades en las que se empleó GeoGebra, a fin de promover la conversión entre los registros gráfico y algebraico, ayudar a los estudiantes a superar dificultades derivadas de la abstracción propia de los tópicos de la asignatura y aprovechar la incorporación de las nuevas tecnologías en tareas matemáticas. Tanto el diseño de las actividades como el análisis de los resultados están basados en la Teoría APOE. La definición de TL adoptada en la bibliografía básica de la asignatura está expresada en el registro algebraico. No obstante, para R^2 y R^3, el tratamiento gráfico de la definición contribuye a reforzar el esquema de las operaciones binarias presentes en ellos y aporta a la caracterización de las propiedades gráficas de los objetos involucrados (Romero, 2016). La carencia, en los libros de texto, de un tratamiento gráfico de la definición de TL en los espacios vectoriales mencionados, motivó esta experiencia. En términos de APOE, un porcentaje aproximado al 30% de los alumnos que participaron de la experiencia se encuentran en una concepción Acción en la construcción de la definición de transformación definida en R^2 o R^3 y sólo una estudiante en una concepción Proceso. Nos resta, aún, decidir las modificaciones para implementar esta experiencia en el presente año.

Introducción

El trabajo que se presenta se origina en la búsqueda de ajustes que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura 'Álgebra Lineal' en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) a través de la implementación de una experiencia áulica. En dicha unidad académica se cursan cuatro carreras de grado: Ingeniería en Informática, en Agrimensura, en Ambiental, en Recursos Hídricos y dos de pregrado: Analista en Informática y Perito Topocartógrafo. Salvo en la última, en las otras carreras el currículo prevé en el segundo cuatrimestre de primer año la asignatura 'Álgebra Lineal' con una carga horaria de 5 horas semanales (dos de teoría y tres de práctica).

Dos factores han influido en la decisión de implementar esta experiencia: la abstracción propia de los tópicos de la asignatura y el desafío de incorporar las nuevas tecnologías en tareas que propicien la exploración, visualización, búsqueda de argumentaciones, etc.

Por un lado, Álgebra Lineal es una de las primeras materias de carácter formal a las que se enfrenta un estudiante universitario de ingeniería. Debido a las dificultades de los alumnos para construir y utilizar los conceptos de esta área, en los últimos 20 años distintos grupos de investigadores han estado trabajando sobre una didáctica específica. Diversas razones son esgrimidas para explicar las dificultades de los alumnos universitarios en esta área. Entre ellas, se encuentran la naturaleza epistemológicamente sofisticada y abstracta de los conceptos del álgebra lineal (Chargoy, Oktac y Cordero, 1999; Chargoy, Oktac y Cordero, 2000; Farfán, Oktac y Rivera, 2001) y que, a diferencia del cálculo, no "es frecuente motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos presentados previamente". (Costa y Vacchino, 2007, p.2).

Por otro lado "la enseñanza en entornos tecnológicos constituye hoy una problemática esencial para la enseñanza de la matemática por muchas razones y es estudiada por una comunidad de investigadores desde diferentes áreas de la educación" (Duarte, 2014, p.1). La gratuidad y su fácil empleo hace que el software *GeoGebra* sea uno de los más empleados, tal como lo evidencian la gran cantidad de ponencias, artículos e investigaciones de los últimos años (Catunta, 2015; Bermeo Carrasco, 2017).

Desde el año 2014 el grupo docente de Álgebra Lineal inició el estudio de investigaciones referidas a la didáctica del Álgebra Lineal. Fruto de esta autocapacitación, una de las profesoras está desarrollando su tesis de Maestría en Didácticas Específicas de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL, investigando la implementación de una secuencia mediada por TIC en la definición de transformaciones lineales en R^2 y R^3. Entre las actividades de dicha tesis, la maestranda elaboró applets en GeoGebra que favorecen la exploración libre de las manifestaciones de las condiciones de linealidad en el registro gráfico de transformaciones en R^2 y R^3 que son lineales y que no lo son. Una adaptación de tales applets es el puntapié de la experiencia que describimos a continuación.

En Grossman (2012), bibliografía de esta asignatura, se clasifica como transformación lineal (TL) a las funciones entre espacios vectoriales que satisfacen dos condiciones, en adelante condiciones de linealidad, cada una de las cuales está asociada a una de las operaciones binarias involucradas en los espacios vectoriales: suma de vectores y multiplicación por un escalar.

D Definición 7.1.1

Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \qquad (7.1.1)$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \qquad (7.1.2)$$

Figura 1. Definición de TL (Grossman, 2012, p. 481)

Por su carácter general de referirse a dos espacios vectoriales cualesquiera, la definición anterior expresa las condiciones de linealidad en el registro algebraico. No obstante, para el caso de R^2 y R^3, acordamos con Romero (2016) que el tratamiento gráfico de dichas condiciones contribuye a reforzar el esquema de las operaciones binarias presentes en los espacios vectoriales implicados y, al mismo tiempo, aporta a la caracterización de las propiedades gráficas de los objetos involucrados favoreciendo el desarrollo de construcciones mentales robustas.

La interpretación geométrica de la condición 7.1.1 de la Figura 1 se refiere a que, en las TL, la diagonal del paralelogramo cuyos lados son T(u) y T(v) coincide con el vector imagen de u+v a través de T. Mientras que la condición de linealidad relacionada con la operación producto de un vector por un escalar real, igualdad 7.1.2, indica que las TL son aquellas que cumplen las siguientes características gráficas:

- las imágenes de vectores colineales son también vectores colineales,
- el cociente de las normas de los vectores T(αv) y T(v) es igual al valor absoluto del escalar α.

La carencia de un tratamiento gráfico de las condiciones de linealidad en dichos espacios vectoriales en la mayoría de los libros de texto, motivó la implementación de esta actividad centrada en la interpretación geométrica de las condiciones que constituyen la definición de TL, en un principio en R^2 y R^3, para luego extender las conclusiones al resto de los espacios vectoriales.

Registro teórico

Entre las diversas corrientes de la Didáctica de la Matemática, la presente experiencia considera como registro teórico y metodológico a la Teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso-Objeto-Esquema).

La Teoría APOE, desarrollada por Ed Dubinsky (1991) y el grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC), se instituye considerando básicamente el concepto de Abstracción Reflexiva de Piaget para describir cómo un individuo comprende un concepto matemático. APOE se ocupa de los fenómenos observados cuando los alumnos están tratando de aprender conceptos matemáticos. Se utiliza el análisis de dichos fenómenos en términos de las construcciones mentales de los alumnos para sugerir acciones didácticas que apoyen el proceso de aprendizaje (Arnon et al., 2014).

Según APOE, un estudiante muestra una concepción Acción de un determinado concepto matemático cuando requiere de estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso cómo llevar a cabo cada operación de un procedimiento; no es capaz de realizar las transformaciones sobre el objeto por sí solo. Una Acción es por naturaleza, algorítmica. Por ejemplo, Roa-Fuentes y Oktac (2012) mencionan que un estudiante con una concepción Acción de las TL puede determinar la imagen de vectores particulares dada la expresión algebraica de la función y, con ello, considerar que la preservación de las operaciones (suma vectorial y producto por un escalar) para dichos vectores del dominio y algunos escalares implica que se satisfacen las condiciones de linealidad.

Cuando la acción o las acciones se repiten, el alumno puede reflexionar sobre ellas de tal forma que ya no requiere de las instrucciones externas, las puede imaginar o llevar a cabo sin seguir el orden específico dado por las Acciones. En este caso, se considera, que las Acciones han sido interiorizadas en un Proceso. Un alumno con una concepción Proceso efectúa acciones sin necesidad de algún estímulo externo o de seguir pasos memorizados; en otras palabras, el alumno tiene más control sobre la transformación o transformaciones que requiere aplicar. En el caso de las TL, por ejemplo, se dirá que un estudiante posee una concepción Proceso si puede verificar las condiciones de linealidad para elementos genéricos del espacio vectorial dominio o si puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente tales condiciones.

Cuando un alumno reflexiona sobre la necesidad de hacer Acciones sobre un Proceso y se da cuenta de su totalidad, encapsula el Proceso en un Objeto cognitivo. Este alumno ha construido una concepción Objeto de un concepto matemático si es capaz de trabajar con él como una entidad, la cual puede transformar mediante nuevas Acciones o analizar sus propiedades.

El paso por las etapas de Acciones, Procesos y Objetos no es necesariamente lineal, y la concepción de un estudiante puede estar en una etapa en ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros.

En la Teoría APOE, un Esquema se define como la colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están vinculados de manera consciente o no en la mente de un individuo en una estructura coherente y que están disponibles para la solución de una situación problemática.

APOE plantea un ciclo de investigación que involucra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y la recolección y análisis de datos. El análisis teórico consiste en el diseño de una descomposición genética preliminar la cual describe las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para comprender un concepto matemático. Asimismo, Hernández y Trigueros (2012) definen la descomposición genética como:

> […] un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requieren para el aprendizaje de dicho concepto. En ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de tal forma que se posibilite el encapsulamiento del concepto […] (p. 71)

La descomposición genética contempla las formas de conocer: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación, etc. Aunque en esta ponencia se mencionan otros constructos propios de APOE, no es posible conceptualizarlos atendiendo a la extensión solicitada para este escrito.

Relato de la experiencia

La propuesta de enseñanza ha sido aplicada a los estudiantes que cursaron Álgebra Lineal en el segundo cuatrimestre del 2019. La experiencia bajo estudio, siguiendo los registros teóricos y metodológicos de APOE, buscaba identificar y analizar las construcciones mentales que realizan los estudiantes asociadas a las condiciones de linealidad que constituyen la definición de TL en R^2 y R^3.

Como se mencionó, los applets fueron construidos por la docente tesista con las siguientes características: representan por separado los planos del dominio y contra-dominio de las transformaciones a manera de dynagraph, se puede manipular un vector del dominio mientras *GeoGebra* calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación mostrando la imagen en el contra-dominio y, opcionalmente, mostrando el rastro del vector manipulado así como el de su imagen o la imagen de alguna región del dominio. A modo de ejemplo presentamos una imagen de uno de los applets (Figura 2):

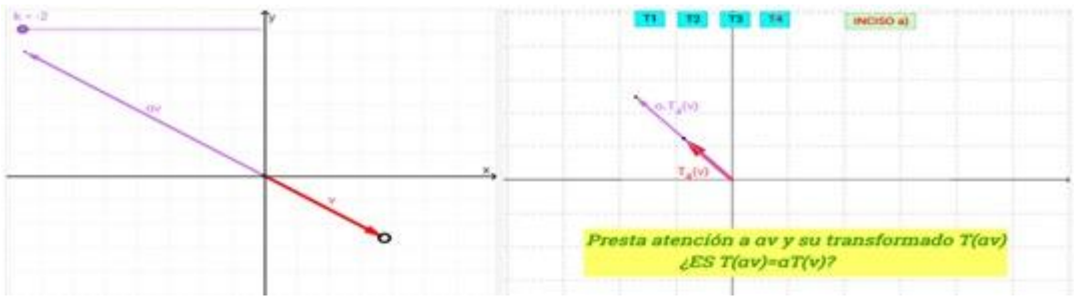


Figura 2. Ejemplo de visualización de los applets

Los applets estuvieron basados en la descomposición genética adoptada en la tesis mencionada y están constituidos por un conjunto de Actividades/Ejercicios, que involucran Acciones y Procesos que buscan ayudar a los estudiantes a construir el concepto TL. Cabe aclarar que las actividades propuestas sólo contemplan las etapas de Acción y Proceso del concepto TL entre los espacios vectoriales y en el registro algebraico y geométrico, además de sus respectivas coordinaciones. No se aborda la construcción de Objeto ni Esquema ya que para alcanzar esos niveles el individuo debe trabajar situaciones donde el concepto de interés se relacione con otros conceptos, incluso en otros contextos, que escapan a los objetivos del programa analítico de la asignatura.

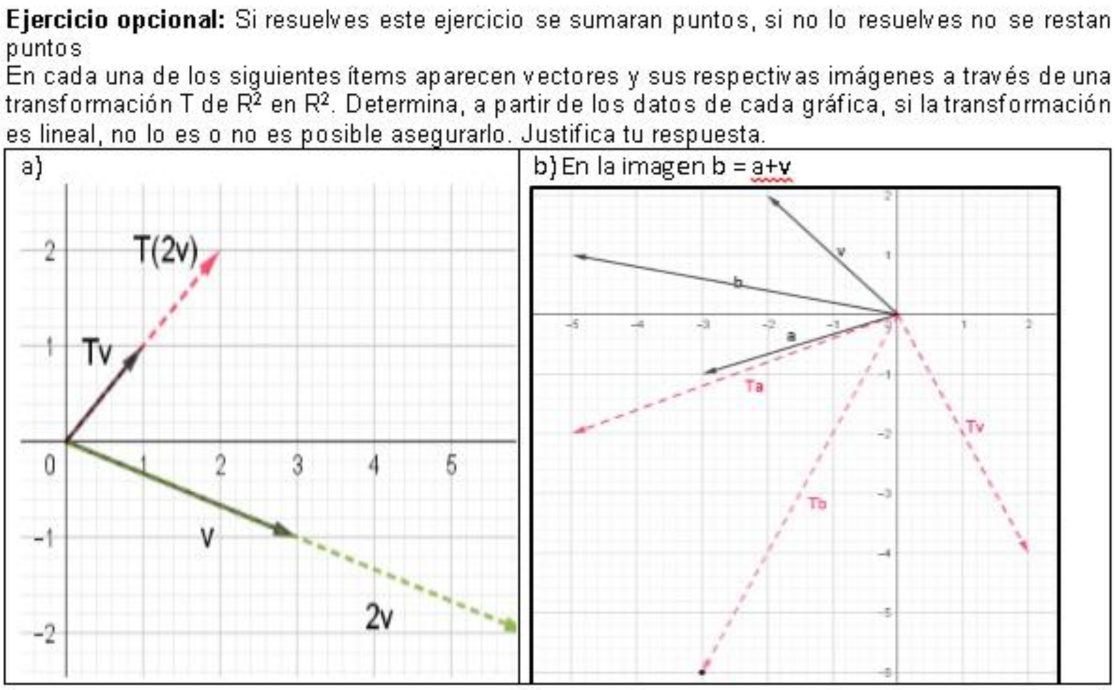
La experiencia que presentamos consta de dos fases. En la primera, durante una clase de práctica llevada a cabo en un laboratorio de informática de la facultad, los estudiantes completaron una Guía de Actividades -a partir de la manipulación de los applets antes mencionados- que consistía, básicamente, en la presentación de situaciones que involucraban TL y no lineales, apoyadas en la interacción con construcciones dinámicas. Cada interacción presentaba, del lado izquierdo a los vectores dados y del lado derecho sus imágenes bajo una transformación. Observado el applet, se debía responder preguntas en formato papel, evaluando la linealidad de las transformaciones propuestas y justificando cada respuesta.

Esta Guía de Actividades estaba conformada por dos ejercicios. En los cuatro ítems del Ejercicio 1, los alumnos sólo disponían de los applets para visualizar, explorar y determinar, justificando si se trataba de una TL o no. En los dos ítems del Ejercicio 2, además de los applets, contaban con la definición algebraica de la transformación.

Al inicio de la Guía de Actividades, se invitaba a los alumnos a recordar cuestiones de vectores trabajadas en la asignatura anterior a ésta, tales como regla del paralelogramo, colinealidad, etc. En el ejercicio 1, al no disponer de la expresión algebraica de la transformación, se esperaba que los estudiantes apelarán a la interpretación geométrica de las condiciones de linealidad. Por otro lado, en el Ejercicio 2, se solicitaba la justificación algebraica y geométricamente de su respuesta.

La Guía de Actividades y los applet se presentaron días previos a la clase, en la plataforma Moodle de la cátedra a fin de permitir a los alumnos la posibilidad de tener un primer acceso a dichos materiales.

La segunda fase de la experiencia fue desarrollada en el segundo parcial de la asignatura a modo de ejercicio opcional. Si elegía resolverlo, cada alumno decidía y justificaba, a partir de una imagen, si la transformación T era o no lineal.



Ejercicio opcional: Si resuelves este ejercicio se sumaran puntos, si no lo resuelves no se restan puntos
En cada una de los siguientes ítems aparecen vectores y sus respectivas imágenes a través de una transformación T de R^2 en R^2. Determina, a partir de los datos de cada gráfica, si la transformación es lineal, no lo es o no es posible asegurarlo. Justifica tu respuesta.

Figura 3. Ejercicio Opcional del segundo parcial

En ambos ítems se esperaba que los alumnos afirmaran que no es posible determinar si se trata de una TL o no pues a través de la imagen sólo se evidencia la verificación de una de las condiciones de linealidad para un vector particular y no se visualiza qué ocurre para la otra condición.

Análisis de resultados

De la primera fase

En la primera parte de la experiencia participaron 54 alumnos de las tres comisiones de práctica, algunos de los cuales se organizaron en parejas, aunque la mayoría prefirió hacer la experiencia individualmente. De modo que, en total, disponemos de 44 respuestas. La siguiente tabla (Tabla 1) muestra los resultados del Ejercicio 1.

	CANTIDAD	CAUSAS
NO JUSTIFICAN GEOMÉTRICAMENTE	15 (34%)	7 alumnos usaron las expresiones algebraicas de las condiciones de linealidad.
		7 alumnos indicaron la condición de linealidad que no satisface la TL pero no justificaron porqué.
		1 alumno indicó que la transformación era lineal y a la vez que no era lineal.
JUSTIFICAN GEOMÉTRICAMENTE	29 (66%)	25 alumnos justificaron correctamente, de los cuales 7 de ellos lo hicieron de forma completa y 18 de forma incompleta.
		4 alumnos justificaron incorrectamente.

Tabla 1. Resultados para el Ejercicio 1

Sintetizamos algunas consideraciones que se repitieron en este ejercicio:

- utilizaron, para demostrar que no es lineal, la primera condición de linealidad,
- confundieron las condiciones de linealidad con las condiciones de cerradura de un subespacio vectorial,
- afirmaron que “T(u+v)=T(u)+T(v) ya que T(u+v) coincide con la diagonal de u+v”,
- aseguraron que es lineal porque “v y kv coinciden”.

Las Tablas 2 y 3 corresponden a los resultados del Ejercicio 2. El primero de ellos corresponde a las respuestas dadas en el marco geométrico y el segundo cuadro desde el algebraico.

MARCO GEOMÉTRICO	11(25%) alumnos NO JUSTIFICARON	3 alumnos no realizaron el ejercicio.
		1 alumno utilizó las expresiones algebraicas de las condiciones de linealidad.
		7 alumnos indicaron la condición de linealidad que no satisface la TL pero no justificaron porqué.
	33 (75%) alumnos JUSTIFICARON	18 alumnos justificaron correctamente y 15 alumnos justificaron incorrectamente.

Tabla 2. Resultados desde el marco geométrico del Ejercicio 2

MARCO ALGEBRAICO	10 (22%) alumnos NO JUSTIFICARON	9 alumnos no realizaron el ejercicio y un solo alumno indicó la condición de linealidad que no satisface la TL pero no justificó porqué.
	34 (77%) alumnos JUSTIFICARON	30 alumnos justificaron correctamente de forma completa y sólo 4 alumnos justificaron correctamente de forma incompleta.
		Ningún alumno justificó incorrectamente.

Tabla 3. Resultados desde el marco algebraico del Ejercicio 2

De la segunda fase

Con el objetivo de indagar la evolución de las construcciones por los alumnos, se optó, en esta segunda fase, analizar las respuestas sólo de los 22 alumnos que justificaron de manera completa y correcta los ejercicios de la primera fase. Solo el 64% de la población mencionada, respondió el ejercicio.

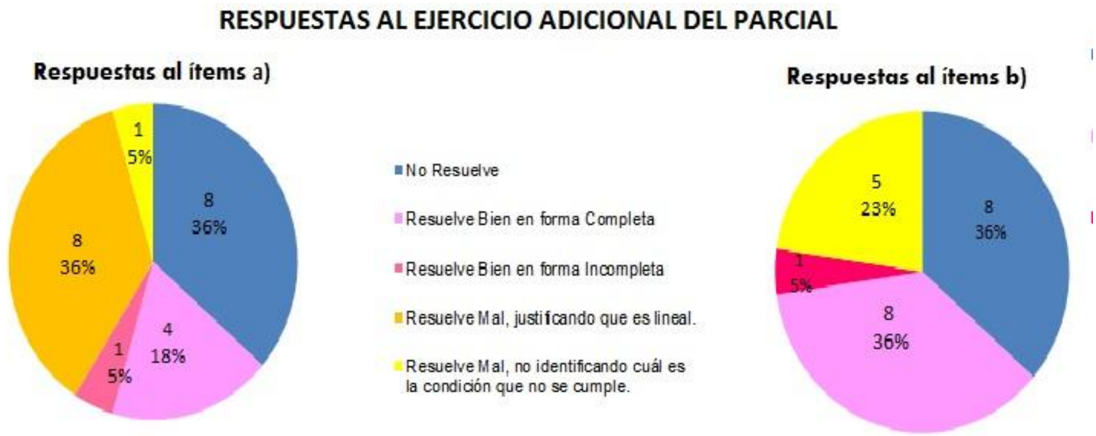


Figura 4. Resultados de la segunda fase

De la Figura 4, el hecho de que la mayoría de los alumnos reconocen gráficamente la verificación de la regla del paralelogramo y pueden verbalizarlo para argumentar que una transformación es lineal, parece justificar la diferencia entre los porcentajes de los alumnos que respondieron correctamente cada ítem. Otra diferencia refiere al porcentaje de alumnos que comete errores porque afirma que es lineal o porque no identifica la condición por la que no es posible decidir si la transformación es lineal o no: en a) es del 41% mientras que en b) es del 5%.

Conclusiones

Aunque los porcentajes que aparecen en la Tabla 1 son optimistas en el sentido de haber logrado que los alumnos interpreten geométricamente, a través de la visualización y exploración de los applets, las condiciones de linealidad en R^2 y R^3, un reordenamiento de los datos obtenidos revela que, en 37 de las 44 respuestas, los alumnos no justificaron geométricamente o lo hicieron de manera incompleta o incorrecta. Resultados similares se obtienen del Ejercicio 2.

Es notoria, en las respuestas a la Guía de Actividades y en el parcial, la dificultad de los alumnos de poner por escrito sus conclusiones sobre la interpretación geométrica de las condiciones de linealidad, aunque, como se indica en Murillo (2000), éste es un esfuerzo considerable y necesario para la adquisición de conocimientos matemáticos. Específicamente se reitera que los alumnos evidencian menor dificultad en expresar coloquialmente la condición de linealidad 7.1.1 de la Figura 1 que la 7.1.2, a la hora de argumentar que una transformación no es lineal.

El 34% de los alumnos que no respondieron el Ejercicio 1 y el 25% que, en el Ejercicio 2, no emplearon el registro geométrico, se encuentran en una concepción Acción de las condiciones de linealidad en transformaciones definidas en R^2 o R^3, ya que necesitan de una expresión algebraica explícita para decidir si dicha transformación es lineal o no, repitiendo un algoritmo y la notación empleada en la bibliografía.

Sólo una alumna utilizó la expresión 'para todo' en sus respuestas, haciendo mención a la universalidad de las condiciones de linealidad. Es posible afirmar, en términos de APOE, que esta estudiante ha logrado una concepción Proceso de las condiciones de linealidad para TL definidas de R^2 o R^3 en sí mismo. No contamos con información suficiente para aseverar que los estudiantes que justificaron sus respuestas en el registro geométrico de manera incompleta hayan logrado o no la concepción Proceso. Tal vez la causa de no contestar como se esperaba se debe a otros motivos, como por ejemplo, la dificultad de expresar propiedades matemáticas en lenguaje natural.

Tampoco hemos podido constatar si las construcciones mentales de los alumnos que respondieron correcta y completamente la primera fase evolucionaron en el Parcial 2 debido a que encontramos Guía de Actividades anónimas.

En las dos fases se observó que muchos alumnos utilizaron las representaciones gráficas como estáticas, probando las propiedades de linealidad para vectores fijos sin aprovechar el dinamismo de *GeoGebra*, concluyendo de manera errada sobre la linealidad y evidenciando que se encuentran en una concepción Acción de la interpretación geométrica de las condiciones de linealidad en R^2 y R^3.

Para lograr la interiorización hacia Procesos se requiere la reflexión de repetidas Acciones a fin de lograr una versión interna de ellas. *GeoGebra* permite esa repetición de Acciones, prácticamente de manera inmediata y continua, a través de manipulaciones intuitivas de los applets. Por tal motivo, apreciamos los applets como preferibles, en algunas situaciones, sobre las representaciones gráficas (no dinámicas) y las algebraicas ya que se alcanza la experiencia necesaria más rápidamente. Basados en observaciones como las mencionadas, sostenemos que las representaciones gráficas dinámicas funcionan para los estudiantes como catalizadores del mecanismo de interiorización. Al facilitar el análisis de las variaciones cognitivas en problemas que involucran conversiones con otros registros favorecen la reflexión necesaria para la abstracción reflexiva, a pesar de no alcanzar la universalidad de las condiciones de linealidad

Es preciso aclarar, sin embargo, que aunque las representaciones de *Geogebra* ayudan a detectar el/los casos donde las condiciones no se cumplen y, por lo tanto, a clasificar a la transformación como no lineal, solo el trabajo algebraico, con vectores genéricos, asegura que dichas condiciones se satisfacen para todos los elementos del dominio de una transformación lineal.

Finalmente, destacamos como aspecto favorable que, en la primera fase, no recibimos Guía de Actividades sin respuestas revelando el intento de los alumnos de responder. A esto se suma el clima de interés y buena predisposición que generó esta actividad, radicalmente distinta de las que habitualmente se llevan a cabo con los alumnos.

Conscientes de que la adquisición de conocimientos matemáticos no es un asunto ni inmediato ni espontáneo que resulta de mover una construcción y que la incorporación de las TIC en propuestas de aprendizaje no es una condición suficiente para esperar mejoras en él, hemos planificado esta experiencia con el objeto de fortalecer la interpretación geométrica y algebraica de las condiciones de linealidad para transformaciones (lineales y no lineales) del plano y del espacio.

Nos resta, aún, decidir las modificaciones para implementar la experiencia descripta en el presente año, reiniciando así, el ciclo de investigación que propone APOE.

Se seguirá trabajando con esta metodología en la asignatura, intentando incorporar GeoGebra en los tópicos de la asignatura que se consideren oportunos.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *Apos Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York, EEUU: Springer.

Bermeo Carrasco, O. A. (2017). *Influencia del Software Geogebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en estudiantes del primer ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería* (Tesis doctoral). Universidad César Vallejo, Perú.

Catunta, Y. (2015). *Aplicación de una metodología usando el software GeoGebra para desarrollar la visualización en el contenido de ecuación de la recta* (Tesis de maestría). Universidad de Piura, Perú.

Chargoy, R., Oktac, A. y Cordero, F. (1999). Diseño de situaciones en las construcciones de los conceptos abstractos del Álgebra Lineal. En R. M. Farfán, J. Lezama, A. Arellano y E. Oaxaca (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12* (pp. 71-75). México, México: Grupo Editorial Iberoamérica

Chargoy, R., Oktac, A. y Cordero, F. (2000). Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial. En R. M. Farfán, C. E. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13* (pp. 163-171). México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Costa, V. y Vacchino, M. (2007). La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en la facultad de ingeniería de UNLP. *XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería. SOCHEDI*. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/282360203_LA_ENSENANZA_Y_APRENDIZAJE_DEL_ALGEBRA_LINEAL_EN_LA_FACULTAD_DE_INGENIERIA_UNLP.

Duarte, B. (2014). Algunas experiencias y reflexiones sobre la enseñanza de la matemática en entornos con tecnología. *El monitor, (34).*

Farfán, R., Oktac, A. y Rivera A. (2001). El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales. En G. L. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14 (pp. 361-369). México, México: Grupo Editorial Iberoamérica

Hernández, L. A. y Trigueros, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–87.

Murillo, J. (2000). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España. Recuperado de: https://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/16644

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(2), 199-232.

Romero Félix, C. F. (2016). *Aprendizaje de Transformaciones Lineales mediante la coordinación de representaciones estáticas y dinámicas* (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional, México.

Grossman, S. I. y Flores Godoy, J. J. (2012) *Álgebra Lineal* (Séptima Edición). México, México: Mc. Graw Hill.

La matemática en el proceso de diseño

Pamela M. Demartini
Ma. Soledad Fritz
Ma. Graciela Imbach
graciela.imbach@gmail.com
Sandra F. Kernot
Paula A. Ricardi
Ma. Victoria Vuizot
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

La Arquitectura se entiende como el arte y la técnica de diseñar, proyectar y construir obras arquitectónicas que modifican el espacio humano y brinda nuevos escenarios en el cual desenvolverse, evidenciando una trama compleja donde arte, ciencia, tecnología y humanismo se funden para dar origen a un estilo propio. Parece evidente entonces que, siendo la forma y la estructura tan importantes en el diseño de las obras arquitectónicas, la Matemática, en particular la Geometría, sea una herramienta fundamental de la Arquitectura, entendiéndose como un medio y no como un fin.

La Matemática forma parte de la Arquitectura no sólo como herramienta de cálculo de estabilidades de estructuras, de resistencia de materiales, de tensiones, de cargas soportables, de costos económicos de ejecución; sino principalmente como herramienta de proyecto, creadora de la forma, la escala, las proporciones y la espacialidad.

Como docentes de Matemática en la carrera de Arquitectura, habilitamos escenarios de trabajo planificando actividades aplicadas, con el propósito principal de que los estudiantes encuentren en la Matemática recursos/herramientas/modelos para los procesos de diseño y puedan tomar decisiones sobre la forma de organizar el espacio. También se intenta estimular su pensamiento algorítmico, su capacidad de comunicar y argumentar ideas en el análisis geométrico de los objetos arquitectónicos.

En este trabajo se presentan tres actividades implementadas en primer y segundo año de la carrera de Arquitectura y Urbanismo de la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la Universidad Nacional del Litoral.

Introducción

> La Matemática como expresión de la mente humana refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque tradiciones diversas han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por sus síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia Matemática. (Courant y Robbins,1979, p.3)

Tal como expresa Calcerrada Zamora (2013), la Arquitectura se revela como una de las más complejas actividades de síntesis del pensamiento humano; opera en el espacio mediante la construcción y su fin es dotar al hombre de un escenario para su vida. Es una disciplina autónoma, integradora, con un lenguaje propio en el que se mezclan el Arte, la Ciencia, el Humanismo y la Tecnología. Parece evidente entonces que, siendo la forma y la estructura tan importantes en el diseño de las obras arquitectónicas, la Matemática, y en particular la Geometría, sea una herramienta fundamental de la Arquitectura, entendiéndose como un medio y no como un fin.

> La Geometría es una rama fundamental de la Matemática cuyo objetivo primordial es el conocimiento y la creatividad en el espacio tridimensional. Es, a la vez, un instrumento capaz de dar formas geométricas, dar métodos de diseño y representación, aportar medidas y proporciones y suministrar transformaciones con las que establecer simetría, modularidad o repetición, etc. (Alsina, 2005, p.1).

Por ello, la Geometría está presente en los procesos de creación del Diseño y de la Arquitectura.

La tarea de proyectar constituye un proceso complejo en el que intervienen múltiples variables entramadas que se deben abordar de manera articulada, y dependiendo de la problemática arquitectónica, de los criterios y estrategias del diseñador, algunas de ellas toman más relevancia que otras. El abordaje de lo funcional, estructural, espacial, formal, tecnológico, entre otras cuestiones, adquiere una configuración particular según las premisas que se plantean para cada proyecto. La dimensión formal es una de las variables que genera más demanda de las herramientas de la Matemática y particularmente de la Geometría (orden, proporción, sistemas de coordenadas, simetría, configuraciones espaciales) y han sido utilizadas desde siempre.

En la actualidad, las posibilidades y la disponibilidad de múltiples herramientas para el estudio de la Geometría, ha revivido la valoración de la misma como elemento de generación y ordenamiento del espacio y la forma. Plantear la enseñanza de la Matemática en las carreras de diseño y arquitectura, concibiéndola principalmente como herramienta de proyecto, creadora de la forma, la escala, las proporciones y la espacialidad, y no sólo como una herramienta de cálculo.

Para tal fin se considera fundamental proponer escenarios de trabajo académico, planificando actividades aplicadas, con el propósito principal de que los estudiantes encuentren en la Matemática recursos/herramientas/modelos para los procesos de diseño y puedan tomar decisiones sobre la forma de organizar el espacio. También se intenta estimular su pensamiento algorítmico y geométrico adquiriendo confianza en su propio pensamiento matemático, su capacidad de comunicar y argumentar ideas en el análisis geométrico de los objetos arquitectónicos, para luego, poder reconfigurar sus herramientas proyectuales. "Y es precisamente en estos casos, en los que el arquitecto es 'géometra', en el sentido de inventor de la geometría, descubriendo los instrumentos geométrico-formales de sus obras a través de un método intuitivo, estético-funcional o simbólico" (Zappulla, 2010, p.12).

Desarrollo

Las actividades que se presentan fueron gestadas en el marco del CAI+D 2016 "*La Multidisciplinariedad y la interdisciplinariedad en asignaturas del área de Tecnología y Diseño del ciclo básico de la carrera de Arquitectura y Urbanismo*" tendientes a lograr lo antes expuesto, en las que, contenidos como proporciones, generación de superficies y modelación matemática se utilizan como herramientas en el proceso de diseño. Son actividades diseñadas para estudiantes que cursan primer y segundo año de la carrera de Arquitectura y Urbanismo de la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo de la Universidad Nacional del Litoral y tienen como objetivo despertar en los estudiantes el interés en el estudio de la Matemática como generadora de herramientas de proyecto.

ACTIVIDAD 1: Las proporciones en el diseño arquitectónico (Taller de Matemática – 1er año de Arquitectura y Urbanismo)

El tratamiento de las proporciones aplicado al diseño arquitectónico parte de considerarlas como una posible variable geométrica a tener en cuenta al diseñar. El eje de la actividad es el análisis de una obra desde el punto de vista de las proporciones. El análisis como recurso de construcción de conocimiento, implica una serie de acciones sobre un objeto determinado (observar, reconstruir, entender, descubrir, reflexionar) con el fin de comprender, en este caso, cuestiones relativas al proceso de diseño. Analizar una obra, para acercarnos a los criterios de diseño adoptados, las estrategias, los propósitos. La relación entre las premisas planteadas por el proyectista y la manera en que se plasman en la obra construida.

La actividad se realiza en forma grupal, donde a cada grupo se le asigna una obra arquitectónica como caso de estudio. La consigna plantea rastrear y seleccionar información de la obra arquitectónica asignada, construir una sucinta memoria gráfica de la obra y a partir de la documentación gráfica (plantas, vistas y cortes) de la obra, sobre dibujando en ella, realizar un análisis geométrico en busca de morfogeneradores de diseño. La selección de las obras está a cargo de la cátedra. Se toman obras contemporáneas donde sus proyectistas han recurrido de manera consciente a la utilización de esta herramienta para la configuración tanto en el plano como en el espacio. Se muestran algunos ejemplos que incluyen un breve esquema de su análisis.

- **CASA DE LA MONEDA CHINA (2013).** Santa Cruz de la Sierra, Bolivia. Arq. Juan Carlos Menacho.

La casa fue concebida tomando los principios del cuadrado y del círculo que inspiran la estabilidad y la unidad. Ambas formas también se encuentran presentes en la moneda china de ahí el nombre que recibe la casa.

Figura 1. Casa de la moneda China - análisis de la planta

- **CASA ABSALON (2007)** Trier, Alemania. Denzer y Poensgen.

Todas las habitaciones, con la fachada y los elementos interiores se desarrollan en la proporción áurea. La entrada que se empuja al volumen subraya el “camino” desde el exterior hacia el edificio, y conduce al visitante a un mundo diferente. Un mundo con senderos, pistas, pasajes y espacios exteriores, unido a una gran variedad de iluminación natural.

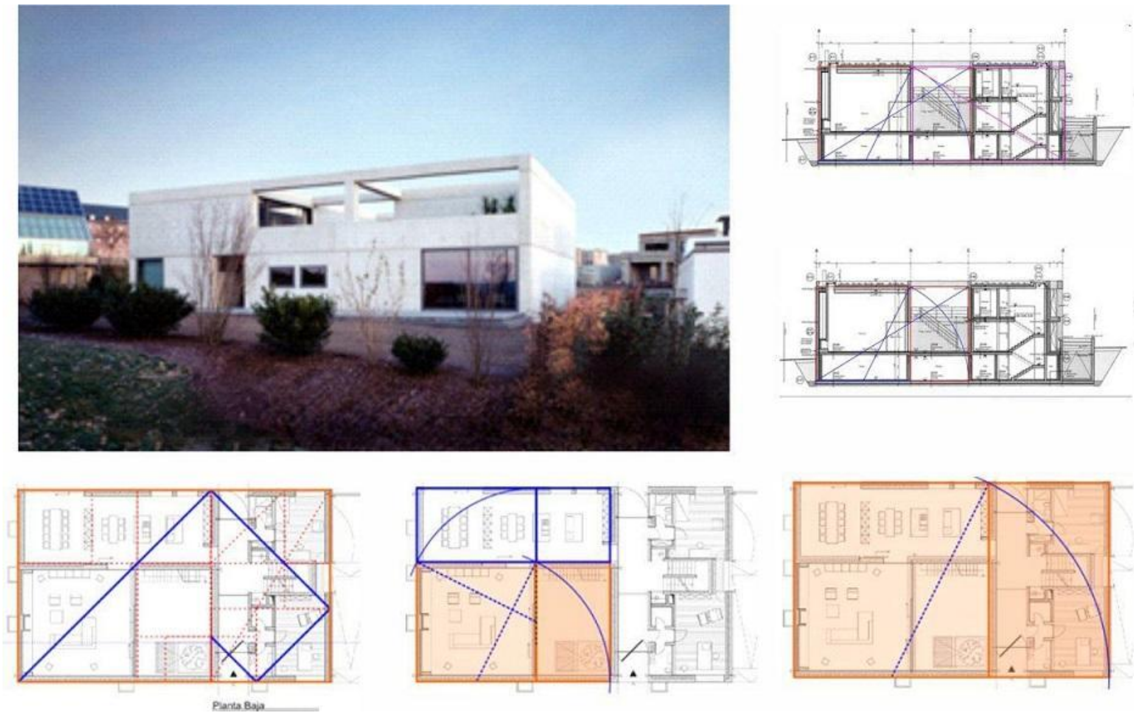


Figura 2. Casa Absalon - análisis de la planta y corte

- **CASA ÁUREA (2011)** Asunción - Paraguay. Arqs. José Cubilla y Javier Corvalan.

El nombre de la casa refiere al orden geométrico con el cual la casa fue articulada a pedido del cliente. Son varias ideas que se funden en este proyecto, la relación con el agua y la estructura portante/espacial, aunque se subordinan a la geometría de proporciones áureas no dejan de ser menos importantes.

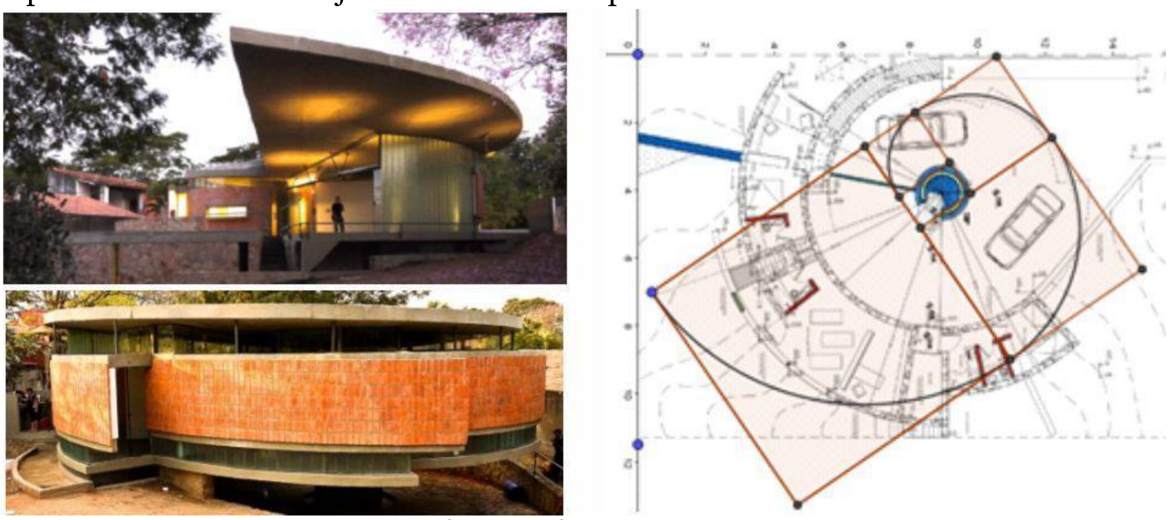


Figura 3. Casa áurea - análisis de su planta

ACTIVIDAD 2: Diseño de envolventes (Taller de Matemática – 1er año de Arquitectura y Urbanismo)

Con el objetivo que el estudiante adquiera destrezas en el manejo gráfico y analítico de las curvas y figuras geométricas en el plano, y en la generación de superficies en el espacio, contenidos específicos del Taller de Matemática, se les plantea el diseño de la envolvente espacial de un espacio recinto que cubra 400m² en planta (con una tolerancia en más o en menos del 10%). Para la generación de la forma espacial, se pueden utilizar diferentes movimientos (traslación, rotación o torsión) con una o más generatrices (curvas o figuras en el plano). En la actividad se debe, además de generar la forma, realizar cálculos de las dimensiones de la planta teniendo en cuenta la restricción impuesta, de área de la envolvente y/o volumen del recinto. Se presenta a modo de ejemplo, el trabajo de un grupo de estudiantes.

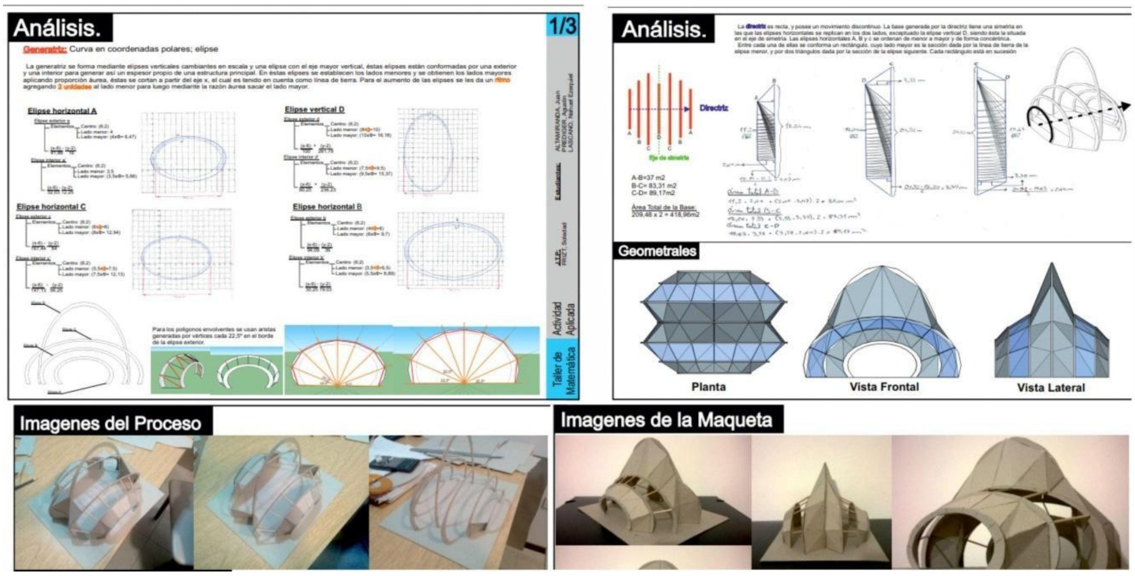


Figura 4. Trabajo: Diseño de envolvente. Grupo de estudiantes (año 2019)

ACTIVIDAD 3: Modelado paramétrico de obras arquitectónicas (Matemática Básica – 2do año de Arquitectura y Urbanismo)

La tecnología digital aplicada a los procesos proyectuales, en especial el modelado paramétrico, resulta una herramienta que permite articular el campo de la Matemática al proyecto arquitectónico reconceptualizando el vínculo y reduciendo los esfuerzos necesarios para crear y hacer variantes en el proyecto.

El diseño paramétrico es parte de un nuevo paradigma en la investigación proyectual ya que permite al diseñador crear sus propias herramientas, generando relaciones geométricas a partir de la definición de determinados parámetros y relaciones formales. Esta metodología permite no solo crear un diseño, sino una familia de diseños a partir de la alteración de los parámetros iniciales. El pensamiento paramétrico introduce el cambio de mentalidad entre la búsqueda de un fin formal estático y concreto, y el diseño reflexivo de los factores y las etapas que se utilizan para llegar a él.

El diseño paramétrico no emplea algoritmos y medios computacionales avanzados para dibujar formas, sino para crear posibilidades formales. No es producir una solución, sino una familia de posibles soluciones. Es el cambio entre utilizar el software de dibujo no como herramienta de representación, sino como medio de diseño.

La actividad que se propone consiste en la modelización de la volumetría, la planta y/o secciones de una obra arquitectónica a través de rectas, cónicas y superficies cuádricas. De esta forma se plantea un trabajo grupal que implica interpretar la generación de la forma (simplificada) de una obra arquitectónica, identificando movimientos, generatrices, directrices, ejes de rotación, según corresponda. Posteriormente se realiza la modelización matemática de la misma en el plano y en el espacio, definiendo previamente los parámetros necesarios que permitan manipular la forma para la obtención de diferentes resultados.

Se describe, a modo de ejemplo, una de las obras analizadas.

OBRA: CASA SHELL - KotaroIde / ARTechnicarchitects - Kitasaku, Nagano, Japón

Figura 5. Vistas de la casa Shell

En esta obra de formas curvas, aparentemente compleja, se identifican cónicas en los diferentes planos y superficies cuádricas. Para el análisis de la generación formal, se deconstruye la misma identificando las curvas generatrices, las superficies en el espacio y las operaciones (traslación, rotación, sustracción) que determinan la forma final.

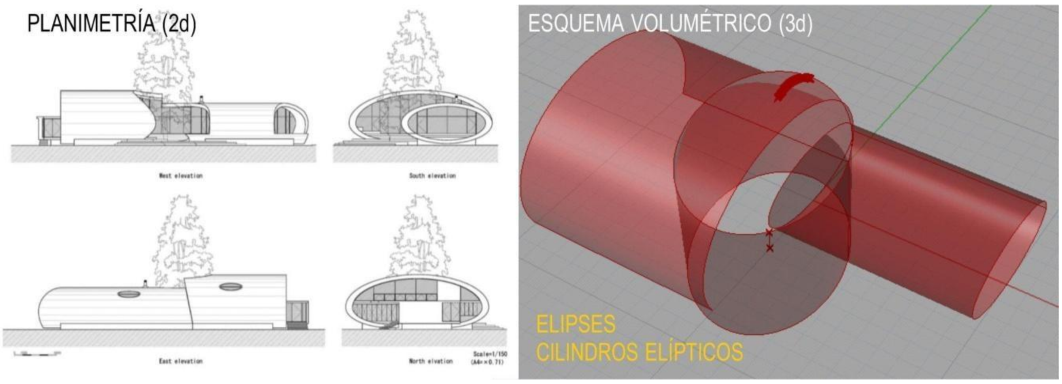


Figura 6. Planimetría (2d) y esquema volumétrico (3d) de la casa Shell

Para la reconstrucción se deben definir parámetros y plantear relaciones algorítmicas entre los mismos. Finalmente, definidos los parámetros y planteadas las ecuaciones correspondientes en los diferentes planos cartesianos, se modeliza mediante un software de diseño paramétrico (Grasshopper + Rhinoceros), donde el planteo a partir de parámetros permite obtener una familia de resultados en lugar de un modelo estático.

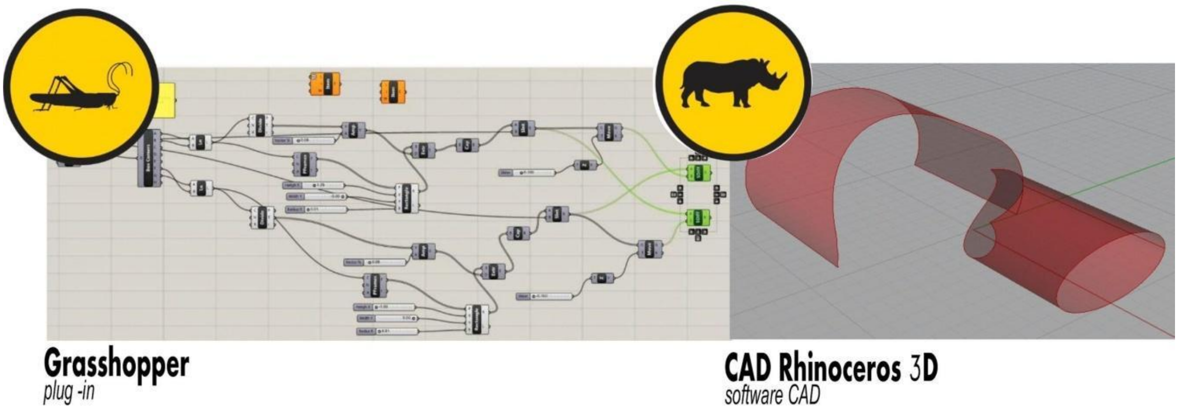


Figura 7. Algoritmo (Grasshopper) y visulización (Rhinoceros) de la modelización de la casa Shell

Esta actividad posibilita dos grandes cuestiones en el diseño proyectual arquitectónico, por un lado, permite identificar los recursos matemáticos implicados en la obra (cónicas, rectas, superficies, etc.) evaluando la pertinencia de cada uno; y por otro, la utilización del diseño paramétrico, en conjunto con el software paramétrico, no sólo posibilitan la visualización en planos y en 3D, sino que potencia la flexibilidad del diseño al permitir obtener un sinfín de posibilidades.

Conclusión

La implementación de este tipo de actividades permite evidenciar la importancia de la Matemática en los procesos generativos del diseño arquitectónico además de fomentar una autoexploración en los diseños que abren camino a una metodología propia de diseño.

La Matemática cumple funciones esenciales en la formación del arquitecto: promueve el aprendizaje de conocimientos básicos fundamentales para el estudio de la arquitectura y brinda herramientas primordiales para el diseño proyectual arquitectónico. En particular, la geometría con sus recursos de proporciones, escalas, ubicación en el espacio, curvas generatrices, se torna imprescindible en la formación del estudiante de arquitectura. Es por esto, que es fundamental planificar e implementar actividades de aplicación de los conceptos matemáticos en escenarios arquitectónicos. El análisis y diseño de proyectos arquitectónicos utilizando recursos matemáticos posibilita que los estudiantes revaloricen la matemática no solo como herramienta de cálculo sino como recurso que potencia el diseño proyectual.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2005). *Los secretos geométricos en diseño y arquitectura*. Curso Interuniversitario Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas. Recuperado de: https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/3/calsina.pdf

Calcerrada Zamora, F. (2013). *Las Matemáticas y la Arquitectura*. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/1KNwsGo7TkdUCU0E2_iDprnF0Su_31vPu/view

Courant, R y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. (Trad. L. Bravo Gala). Madrid, España: Aguilar.

Zappulla, C. (2010). *Formas arquitectónicas: un modelo de investigación matemática. Conexiones entre el avance del diseño y el desarrollo científico-matemático*. Barcelona, España: Universitat Politècnica de Catalunya. Recuperado de: https://pa.upc.edu/ca/Varis/altres/arqs/congresos/third-international-seminararquitectonics-network-tercer-seminario-internacional-arquitectonics-network/comunicacions/zappulla-carmelo/@@download/file/ZAPPULLA,%20CARMELO.pdf

Matemática en contextos. Una propuesta innovadora

CRISTINA ROGIANO
cris1927@gmail.com
GABRIELA ROLDÁN
g.roldan@live.com.ar
CLAUDIA ZANABRIA
claudia.m.zanabria@gmail.com
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

El presente trabajo reseña una experiencia didáctica que muestra un abordaje particular de la matemática en una carrera no matemática, en carreras relacionadas con las Ciencias Económicas.

Esta experiencia se aplicó en una asignatura optativa denominada "Matemática en Contexto", correspondiente a las carreras de grado de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral.

La experiencia abarcó tanto los procesos de enseñanza y aprendizaje como los de evaluación. Las estrategias metodológicas se enmarcaron en el modelo de enseñanza y aprendizaje situado que indican el carácter contextualizado del aprendizaje. En el caso de esta experiencia, el aprendizaje se situó en el contexto de las Ciencias Económicas y con esta metodología se enfatizó la importancia de la actividad y del contexto para el aprendizaje.

Las actividades de evaluación se gestaron en forma compatible con el proceso didáctico y se asumió en sus dos roles: formativo y social. El rol formativo se visualizó mediante la aplicación de un "portafolio de evidencias", instrumento que permitió valorar el progreso de los alumnos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. El rol social que es el que relaciona la evaluación con la certificación y con la promoción, se llevó a cabo mediante un examen escrito y la presentación del portafolio, este último incluye la producción de todos los trabajos propuestos con sus reformulaciones y una reflexión final sobre toda la experiencia generada durante el cursado.

Introducción

El presente trabajo reseña una experiencia didáctica que muestra un abordaje particular de la matemática en una carrera no matemática, en carreras relacionadas con las Ciencias Económicas.

El mismo se organiza en cinco fases: Contextualización, Marco Conceptual, Relato de la experiencia, Impacto de la experiencia y Conclusión.

Contextualización

La experiencia didáctica que reseña en este trabajo, muestra un abordaje particular de la matemática en una carrera no matemática, en carreras relacionadas con las Ciencias Económicas.

Dicha experiencia se aplicó en una asignatura optativa denominada "Matemática en Contexto", correspondiente a las carreras de grado de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral. La experiencia abarcó tanto los procesos de enseñanza y aprendizaje como los de evaluación.

Es importante aclarar que en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral, para obtener el título de grado el alumno debe aprobar asignaturas obligatorias y asignaturas optativas. Las asignaturas optativas son propuestas por cada cátedra y abordan distintas temáticas que se eligen de acuerdo al plan de estudio y los perfiles profesionales de las carreras. En este marco, la cátedra de Matemática Básica propuso en el año 2017 como asignatura optativa: Matemática en Contextos.

Marco Conceptual

-en relación a las Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje

Las estrategias metodológicas se enmarcan en el modelo de enseñanza y aprendizaje situado (Díaz Barriga, 2003), que indican el carácter contextualizado del aprendizaje. Con esta metodología se enfatiza la importancia de la actividad y del contexto para el aprendizaje. La actividad se genera a partir de una situación específica, real o simulada, que propicia la resolución de problemas que refieren a un contexto sociocultural, promoviendo la adquisición de competencias y el aprendizaje colaborativo.

En la línea de Díaz Barriga Arceo (2003), en la siguiente imagen (Figura 1) se visualizan distintos enfoques que varían precisamente en su relevancia cultural (que empleen situaciones que sean relevantes a las culturas a las que pertenecen o esperan pertenecer los estudiantes) y en la actividad social (participación en un contexto social y colaborativo de solución de problemas), con ayuda de mediadores como la discusión en clase, el debate, el juego de roles y el descubrimiento guiado, posibilitando aprendizajes significativos a través de la realización de prácticas educativas que pueden ser auténticas o simuladas.

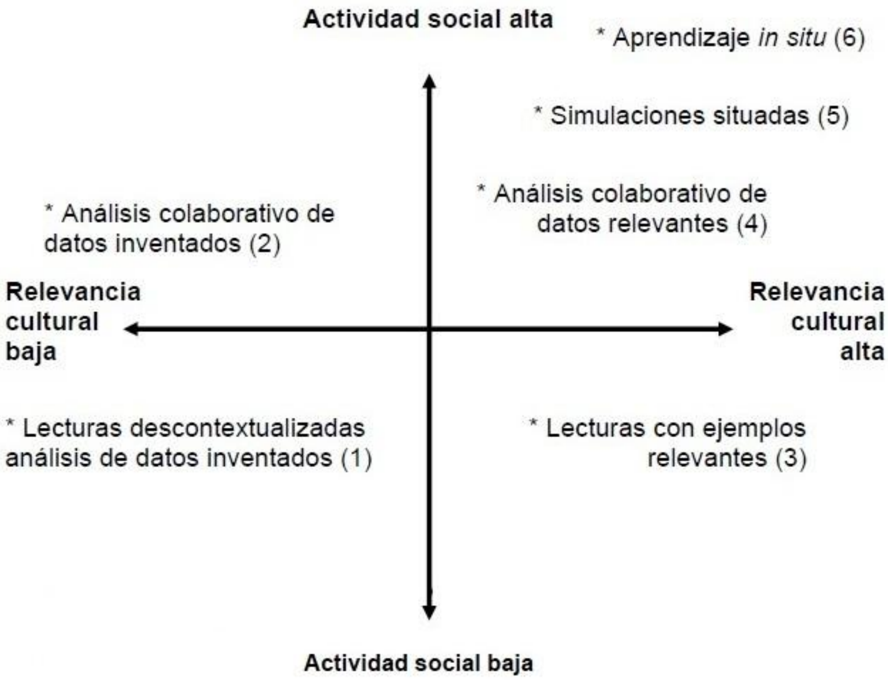


Figura 1. Distintos enfoques

De acuerdo a Díaz Barriga Arceo (2003), las características de cada categoría mencionada en el gráfico son:

1. Instrucción descontextualizada: Centrada en el profesor, el alumno asume un rol pasivo y se trabaja con ejemplos son irrelevantes culturalmente asociada al enfoque tradicional

2. Análisis colaborativo de datos inventados: Si bien el alumno presenta un rol más activo, se trabaja con datos no reales ajenos a los intereses de los alumnos.

3. Instrucción basada en lecturas con ejemplos relevantes. Se trabaja con contenidos relevantes y significativos.

4. Análisis colaborativo de datos relevantes. Modelo centrado en el estudiante con propuestas didácticas basadas en datos de la vida real.

5. Simulaciones situadas. Los alumnos se involucran colaborativamente en la resolución de problemas simulados o casos tomados de la vida real.

6. Aprendizaje in situ. Se basa en el modelo contemporáneo de cognición situada que toma la forma de un aprendizaje cognitivo, el cual busca desarrollar habilidades y conocimientos propios de la profesión.

De acuerdo a esta clasificación la presente propuesta se enmarca en la categoría 5 y 6 en las que se trabaja con problemas considerados de importancia para la formación en las ciencias económicas.

Los teóricos de la cognición situada cuestionan la forma en que se enseñan aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles y escasamente motivantes, de relevancia social limitada (Díaz Barriga y Hernández, 2002). El interés y la participación de los alumnos aumenta significativamente cuando entienden por qué están aprendiendo determinados conceptos y cómo se pueden usar los mismos en su vida diaria o profesional fuera del aula. Además, la mayoría de los estudiantes aprenden mejor cuando se le permite trabajar en equipos compartiendo problemas y soluciones entre ellos, es decir, propiciando el aprendizaje colaborativo.

En esta misma línea, el movimiento de "enseñanza contextual" demostró que aquellos alumnos que normalmente tenían bajo desempeño en cursos abstractos, podían lograr niveles más altos si se les enseñaba usando un método contextual (Crawford, 2004).

Este modelo de enseñanza y aprendizaje favorece la adquisición de la competencia matemática. En este sentido la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos), define la competencia matemática como:

> la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (Rico, 2007, p.49)

En esta definición, se ponen de manifiesto los fundamentos de la enseñanza contextualizada destacando la importancia de las matemáticas en el mundo.

Asimismo, en la presente era del conocimiento, la información y la tecnología, la matemática ocupa un lugar central, a tal punto que, cada vez son más las ramas científicas que emplean esta ciencia para expresar sus teorías y que, por este motivo, hoy en día la alfabetización matemática se ha convertido en una competencia exigida para la formación de los estudiantes de esta era.

Específicamente la "Toma de decisiones" es una competencia exigida en la formación del profesional de ciencias económicas y además desencadena el desarrollo de otras competencias como la resolución de problemas y la producción de argumentos.

Díaz Barriga (2003) presenta algunas características centradas en el aprendizaje situado como:

- Aprendizaje centrado en la solución de problemas auténticos.
- Análisis de casos.
- Trabajo en equipos colaborativos.
- Actividades y simulaciones situadas.
- Aprendizaje mediado por las nuevas tecnologías de la información y comunicación.

Según el autor todas estas prácticas tienen en común:

- Enfocar la construcción del conocimiento en contextos reales.
- Enfocar el desarrollo de las capacidades reflexivas, críticas y el pensamiento de alto nivel.

Es importante destacar que estas estrategias metodológicas propician la construcción colaborativa del conocimiento, las comunidades de aprendizaje y la alfabetización tecnológica, provocando en los estudiantes el gusto por aprender matemática a través de propuestas de aprendizaje que despierten su interés y den cuenta de la utilidad y el valor de la matemática.

-en relación a las Estrategias de Evaluación y Promoción

Conforme a las tendencias teóricas actuales relativas al campo semántico de la evaluación de los aprendizajes de los alumnos, de autores como Álvarez Méndez (2008), Rosales Flores (2004), Camilloni, Celman, Litwin y Palou de Maté (1998), Brown y Glasner (2003), Gimeno Sacristán y Pérez Gómez (2002), Pérez Gómez (2009), entre otros, abordadas por Zanabria (2014) en *"¿La evaluación de los aprendizajes, una forma de enseñanza, una oportunidad de aprendizaje?: Creencia y Prácticas. Una mirada desde la educación matemática*", se vislumbra una gran ampliación del campo semántico de la evaluación a lo largo de su historia. Es así como de la evaluación cuantitativa que asignaba un valor de medición se pasó a la evaluación en función de un objetivo determinado con anterioridad, o a una evaluación como un proceso de recolección de información útil que facilite la toma de decisiones abarcando tanto el proceso como el resultado del aprendizaje y hasta los modelos que involucra tanto al contexto como al alumno y las nuevas perspectivas de la evaluación como aprendizaje y para el aprendizaje que considera a la evaluación como una práctica educativa tendiente a facilitar el conocimiento y el análisis crítico de las acciones del docente y del estudiante. Esta ampliación de significados, provoca que hoy en día se tengan que especificar los distintos roles que desempeña la evaluación de los aprendizajes, que se pueden resumir en dos funciones fundamentales y no excluyentes: Una de carácter social, de selección y clasificación, y otra de corte pedagógico o formativo. El rol social es el que relaciona la evaluación con la certificación, con la promoción; la función formativa, es la que acompaña, propone, orienta y ofrece la participación, la comprensión y el enriquecimiento, involucrando a todos los que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje con la finalidad de tomar decisiones oportunas.

Específicamente de acuerdo a las investigaciones de Escorcia, Figueroa y Gutiérrez (2008):

La función social tiene que ver con la promoción o reprobación de los estudiantes. [...] Desde esta perspectiva la evaluación se restringe al concepto de medición [...] y asigna un matiz claramente cuantitativo al proceso evaluativo. En este enfoque la calificación es consecuencia de un proceso de medición y no necesariamente de un proceso evaluativo. (p.66- 67)

Asimismo, Diaz Barriga (2003) en Escorcia Caballero, Figueroa y Gutiérrez (2008), señala que:

> La función pedagógica (o formativa) tiene que ver con la comprensión, regulación y mejora de la situación de enseñanza y aprendizaje. En esta dirección los procesos evaluativos generan información determinada en momentos igualmente predeterminados sobre estrategias de enseñanza y los procesos de aprendizaje que permite realizar ajustes y mejoras necesarias. (p.66-67)

En este sentido, la evaluación formativa no implica calificar sino ayudar a aprender, no es un punto final, sino que está integrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta perspectiva se considera que la evaluación tiene un matiz formativo cuando forma, es decir cuando se aprende de ella, cuando se la convierte en actividad de conocimiento, y en acto de aprendizaje.

Retroalimentación, autorregulación y regulación de los procesos cognitivos y del aprendizaje son actividades que permiten al estudiante facilitar su proceso de aprendizaje. Aquí subyace la idea de metacognición pues refiere a la consciencia de lo que uno sabe, piensa o hace es intencional y reflexiva (Flores Ochoa, 2004).

Estas categorías, retroalimentación, autorregulación, regulación y la comunicación del aprendizaje, deben integran la evaluación formativa en las secuencias didácticas. "Dicha integración es un eje fundamental para que la evaluación adquiera su rol formativo. (Mottier López, 2010, p.49)

Para terminar esta sección, se considera importante destacar que teniendo en cuenta que el rol formativo de la evaluación es valorar los procesos de la interacción educativa para orientar el aprendizaje de los alumnos, la actuación del docente y el proceso de enseñanza y aprendizaje que da lugar. El punto de partida para su implementación es concientizar al estudiante respecto a la importancia de aprovechar esta oportunidad para favorecer su aprendizaje.

"Lo importante es que los profesores tienen que plantearse esta doble perspectiva: para qué y cómo evaluar, desde el punto de vista pedagógico y qué funciones cumple la evaluación que realiza desde el punto de vista social" (Gimeno Sacristán y Pérez Gómez, 2002, p.365)

Relato de la experiencia

En el caso de la presente experiencia, se aplicó como estrategia didáctica las relacionadas con el aprendizaje *situado* en el contexto de las ciencias económicas. Dado que la matemática, en las carreras de ciencias económicas, no es una asignatura troncal, como lo son la economía, la administración y la contabilidad, en la cátedra de Matemática Básica se diseñó una propuesta didácticas intencionalmente diseñada para que contribuya a la formación de los profesionales en ciencias económicas en lo relativo a las competencias exigidas en los perfiles de las carreras afines tales como: resolución de problemas, toma de decisiones, optimización de procesos, organización y análisis de información, emisión de juicios fundados, entre otras.

Concretamente, la propuesta de aprendizaje situado en el contexto de las ciencias económicas, propicia la solución de problemas auténticos, basados en situaciones reales o simuladas que favorecen el desarrollo de competencias exigidas en los perfiles de las carreras de grado de la FCE de la UNL, mencionadas en el párrafo anterior. Es importante destacar que, en este marco, la propuesta persigue un doble objetivo, por un lado, es un aporte a la formación de los profesionales en ciencias económicas y por otro favorece la comprensión de los conceptos matemáticos, dado que se recuperan y se amplían los temas abordados en las asignaturas propias del plan de estudio, específicamente, Matemática Básica y Análisis matemático.

Por las razones mencionadas en los párrafos anteriores, en la línea de Frida Díaz Barriga Arceo (2003), la propuesta didáctica aplicada en la experiencia se enmarca en las categorías: 5. Simulaciones situadas, pues los alumnos se involucran colaborativamente en la resolución de problemas simulados o casos tomados de la vida real y 6. Aprendizaje in situ pues se busca desarrollar habilidades y conocimientos propios de la profesión.

Los problemas seleccionados en la presente propuesta son aquellos relacionados con la toma de decisiones como son la teoría de los juegos y las cadenas de Markov, que tienen impacto, fundamentalmente, en contextos económicos y otros con un impacto social como lo son los relacionados con la criptografía, entre otros.

La teoría de los juegos trata del estudio de los problemas de decisión y propone modelos matemáticos para su resolución. Si bien esta teoría es muy amplia, se seleccionaron problemas cuya resolución requiere la aplicación de modelos de álgebra lineal y de cálculo diferencial.

Las cadenas de Markov proporcionan un sistema muy útil para crear e implementar un proceso de toma de decisiones que aprecie posibles escenarios, permitiendo predecir comportamientos futuros.

La Criptografía se encarga de diseñar métodos para mantener confidencial la información que es enviada por un medio inseguro. Por medio de un algoritmo de cifrado, con una clave, sólo el emisor y el receptor autorizado de un mensaje puedan saber el contenido del mismo, aplicando un proceso de método de descifrado; para realizar este proceso será necesario que el emisor y el receptor del mensaje conozcan una matriz inversible que permitirá codificar y decodificar el mismo. La masividad del uso de teléfonos inteligentes y cámaras de fotos digitales nos brinda la posibilidad de mostrar la aplicación del concepto de matriz y sus operaciones para el tratamiento de las imágenes y cómo una imagen digital para ser procesada debe transformase en una matriz.

En síntesis, las potencialidades de la propuesta de enseñanza en contexto y aprendizaje situado descriptas contribuyen con el desarrollo de competencias profesionales y matemáticas como así también favorece el aprendizaje significativo y colaborativo.

Respecto a las estrategias de Evaluación y Promoción aplicadas en la experiencia: En la asignatura Matemática en Contexto, las actividades de evaluación se gestaron en forma compatible con el proceso didáctico y se asume en sus dos roles: formativo y social.

El rol formativo se gestionó mediante la aplicación de “el portafolio de evidencias”, que es una compilación de las producciones generadas por el estudiante que permite documentar tanto el proceso de aprendizaje como el proceso de evaluación y posibilita recuperar las actividades que resultaron más significativas para la formación personal y profesional y redireccionar la trayectoria de aprendizaje si es necesario. Asimismo, la producción de dicho portafolio por parte de los estudiantes, contribuye a desarrollar las competencias de pensamiento crítico, producción de argumentos, comunicación escrita, uso de lenguaje y tecnologías.

En este marco, el portafolio constituye un instrumento que permite valorar el progreso de los alumnos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje dos que no sólo es un sistema de recopilación y evaluación de evidencias, sino un instrumento potente para el seguimiento y la reflexión de los aprendizajes de los participantes pues permite reflexionar sobre las actividades realizadas durante el cursado.

El rol social de la evaluación, el que relaciona la evaluación con la certificación y con la promoción, se llevó a cabo mediante un examen escrito y la presentación del portafolio, este último incluye la producción de todos los trabajos propuestos con sus reformulaciones y una reflexión final sobre la experiencia generada durante el cursado.

Descripción del portafolio

Para la elaboración del portafolio se solicitó que se lo organice en las siguientes secciones:

Sección1:

1- Portada:

Presentación alumno: Nombre Apellido, foto, breve descripción de su trayectoria en la FCE (Relato libre autobiográfico en el que se comparte: quién es, qué ha estudiado, cuáles son sus intereses, personas más significativas, eventos significativos de su paso por su Facultad o su vida, experiencias importantes, etc.). Incluir una reflexión acerca de lo que ha representado la elección de una carrera relacionada con las ciencias económicas y en particular del presente seminario.

2- Índice

3- Introducción: Breve redacción sobre el contenido del portafolio. ¿De qué se trata? ¿Qué contiene? ¿Cuáles son sus apartados? Conclusión general.

Sección 2:

4- Evaluación diagnóstica: Resolución de problemas

5- Reflexión teórica: Elaboración de un campo semántico de los temas aplicados en la evaluación diagnóstica.
6- Evaluación en 5 min y coevaluación. Resolución de una actividad e intercambiar con un compañero para que lo evalué y luego entregar al profesor.
7- Resolución de actividades en contexto matemático: Debe incluir conclusión y autoeavaluación.
8- Video o fotos de vivencias en el seminario.
9- Trabajo en equipo: Realizar búsquedas estratégicas en Internet que permitan recuperar alguno de los temas tratados y expresar ¿Por qué es importante compartir este material digital o sitio web en el seminario? Conclusión.
10- Elaboración de un problema de aplicación: Elección un tema de los tratados en el seminario y producción de un problema de aplicación. Este trabajo debe contener: Introducción, problema de aplicación (problema que se presenta en casos reales o simulados), desarrollo y conclusión.

Sección 3

11- Reflexión final: Comentar tu punto de vista respecto a la experiencia en este seminario ¿qué te pareció?, ¿qué fue lo más significativo?, ¿qué no te gustó?, ¿qué se puede mejorar y de qué manera? Evidencia de crecimiento personal y comprensión, ¿En qué ha contribuido a tu formación?

Algunos problemas en contexto presentados por los alumnos en el portafolio fueron:

-Aplicaciones de cadenas de Markov a preferencias de telefonías móviles.

- Interpretación de “la crisis de Grecia” a través de la Teoría de los juegos.

- Uso de la cadena de Markov por un equipo médico para analizar la evolución de pacientes con cáncer de pulmón.

-Aplicación de las Cadenas de Markov a un modelo de negocio.

-La Teoría de Juegos aplicada a la competencia entre dos empresas de telefonía: Movistar y Claro.

-Análisis de dos estrategias o alternativas en cuanto a la conveniencia de aplicar o no una vacuna utilizando las Cadenas de Markov.

-Teoría de los juegos aplicado a una subasta.

En cuanto a sus reflexiones respecto a la experiencia de aprendizaje en contextos, los alumnos destacan:

-"Entender para qué necesitamos matemática o en dónde aplicarla"

-"Importancia de los problemas de decisión para aplicar a situaciones de trabajo, negocios o vida cotidiana".

-"Relevancia del uso de software dinámicos para la enseñanza y aprendizaje de la matemática".

-"Aplicar la matemática a la vida cotidiana".

-"Posibilidad de compartir material digital"

Impacto de la experiencia

Encuestas realizadas a los alumnos que han cursado la asignatura optativa sumada a la información registrada por los docentes tomando como fuentes el trabajo realizado en cada clase y la lectura de los portafolios de evidencias, dan cuenta que:

- Las propuestas de educación matemática contextualizada impregnan de sentido y significado el contenido, promueven el desarrollo de competencias exigidas por la sociedad actual y, fundamentalmente, despiertan el gusto por hacer matemática.
- La materia resultó atractiva y llevadera, permitió abordar la temática desde una perspectiva diferente y no resultó "pesada" en cuanto a los contenidos.
- Lograron obtener un buen panorama sobre los modelos matemáticos existentes y profundizar el que consideraba más atrayente y útil.
- Reforzaron conocimientos respecto de algunos temas, marcando una diferencia con alumnos que no cursaron esta materia optativa y aprendieron distintas técnicas que les resultaron útiles en otras materias que se encuentran en el plan de estudio de la carrera.
- Relacionaron conceptos.
- Esta materia optativa les mostró la importancia de la matemática en la vida diaria.
- Fue una de las pocas materias que relacionó conceptos de otras materias y les brindó nuevos conocimientos.
- El cursado fue entretenido y dinámico y logró formar un lindo grupo de trabajo.
- Revisaron temas desarrollados en anteriores materias, permitió ver desde otro punto de vista un tema, replantearnos su importancia y aplicaciones a la realidad.

- Resultó muy buena la iniciativa de realizar una "subasta" entre los alumnos, fue una idea "genial" y "muy creativa".
- Es necesario fomentar la oferta de este tipo de materias para que el alumno pueda ver todo el espectro de aplicaciones.

Como producto de estos resultados positivos en la asignatura optativa, las estrategias metodológicas aplicadas se replican y adaptan en la asignatura Matemática Básica, del primer año de las tres carreas de grado de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral.

Conclusión

Nuestra misión como docentes de matemática, en carreras de ciencias económicas, debe estar centrada en encontrar y diseñar estrategias de valor que permitan distinguir cabalmente los aprendizajes construidos de los simplemente acumulados y para ello se hace necesario preocuparnos más por la comprensión y el sentido de los objetos matemáticos que en la cantidad de conocimientos matemáticos.

Si como docente procuramos que la matemática esté conectada al contexto, sea representativa, y motivadora generaremos más posibilidades de conseguir que los estudiantes se impliquen emotivamente en la actividad y aprendan significativamente.

Todo lo mencionado representa un recorrido que continúa en progreso mediante procesos de retroalimentación que genera un análisis reflexivo de los métodos de enseñanza, una reestructuración de los materiales educativos y principalmente es un aporte a la educación matemática.

Referencias bibliográficas

Álvarez Méndez, J. (2008). *Evaluar para conocer, examinar para excluir*. (2da Ed). Madrid, España: Morata.

Brown, S. y Glasner, A. (2003). *Evaluar en la Universidad. Problemas y nuevos enfoques*. Madrid, España: Narcea Ediciones

Camilloni, A., Celman, S., Litwin, E. y Palou de Maté, M. C. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Crawford, M. L. (2004). *Enseñanza Contextual, Investigación, Fundamentos y Técnicas para Mejorar la Motivación y el Logro de los Estudiantes en Matemática y Ciencias*.

Texas, EEUU: CORD. Recuperado de: https://cbibliotecavirtual.files.wordpress.com/2017/07/iftm-mlc.pdf

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5*(2), 105-117. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/28064996_Cognicion_situada_y_estrategias_para_el_aprendizaje

Díaz Barriga, F. (2006). *Enseñanza situada: Vínculo entre la escuela y la vida*. México, México: McGraw–Hill

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México, México: McGraw Hill.

Díaz Barriga, F. y Pérez Rendón, M. M. (2010). El portafolio docente a escrutinio: sus posibilidades y restricciones en la formación y evaluación del profesorado. *OBSERVAR*, (4), 6-27. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6369849.pdf

Escorcia Caballero R., Figueroa, R. y Gutierrez, A. (2008) *La Evaluación de los aprendizajes en las instituciones de educación Superior*. (2da. Ed.). Bogotá, Colombia: Magisterio Editorial.

Florez Ochoa, R. (2004). *Evaluación pedagógica y cognición*. Santa Fe de Bogotá, Colombia: Ed. Mg Graw Hill.

Gimeno Sacristán, J. y Pérez Gómez, A. (2002). *Comprender y transformar la enseñanza*. (11 Ed.). Madrid, España: Morata.

Mottier Lopez, L. (2010). La Evaluación Formativa de los aprendizajes. Síntesis críticas de los trabajos fracófonos. En R. Anijovich (Comp.), *La Evaluación Significativa* (pp. 43-71). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Pérez Gómez, A. (2009*). La Evaluación como Aprendizaje*. Madrid, España: Ediciones Akal.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rosales Flores, C. (2004). *Evaluar es reflexionar sobre la enseñanza*. Madrid, España: Narcea, S.A. de Ediciones Madrid.

Zanabria, C. (2014). *¿La evaluación de los aprendizajes, una forma de enseñanza, una oportunidad de aprendizaje?: Creencia y Prácticas. Una mirada desde la educación matemática. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral*. Recuperado de https://fce.unl.edu.ar/matematica/archivos/libro-aprendizajes.pdf

Modelos dinámicos discretos de población: aportes para el aula universitaria desde las TIC

IGNACIO MARTÍNEZ

ia.martinez1990@gmail.com

Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas. Universidad Nacional del Litoral

STELLA VAIRA

svaira@fbcb.unl.edu.ar

Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas. Universidad Nacional del Litoral

GISELA MAZZIERI

glmazzieri@santafe-conicet.gov.ar

Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas. Universidad Nacional del Litoral.

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL). CONICET-UNL. (Argentina)

Resumen

En este trabajo se presenta el estudio del modelo logístico en diferencias aplicado a la producción agrícola y el análisis de aspectos relevantes para la formación matemática de estudiantes de Licenciatura en Biotecnología de la Universidad Nacional del Litoral. Desde un enfoque metodológico cualitativo, con modalidad no interactiva, se indaga en las nociones matemáticas involucradas y los aportes a la educación matemática. A través del análisis cualitativo del modelo se estudian las soluciones bajo diferentes condiciones iniciales, con el soporte de aplicaciones informáticas, lo que conduce a identificar el comportamiento caótico de las soluciones. El estudio pone de manifiesto una relación epistemológica entre las nociones matemáticas involucradas y las tecnologías de la información, las que se constituyen en herramientas potentes para validar resultados y superar las limitaciones del enfoque algebraico. Además, el modelo presentado, algebraicamente simple, adquiere aún mayor sentido por la gran aplicabilidad a fenómenos biológicos. Se reconoce que las particularidades del modelo generan la necesidad de ser abordadas mediante conceptos matemáticos existentes pero desconocidos para los estudiantes.

Introducción

Las discusiones sobre las diferentes formas de acceder al conocimiento científico han desencadenado otras maneras de comprender y enseñar las ciencias. Casares (2009) plantea que, desde el inicio de la filosofía de las ciencias como disciplina independiente, "el análisis básico de las teorías científicas ha sostenido que todo conocimiento científico se sustenta en una doble dependencia entre los datos experimentales derivados de la observación y las formas lógicas estructuradas y necesarias" (p.1). La doble dependencia planteada por Casares ofrece también cierta legitimidad sobre los medios para la producción de conocimiento vinculados a la observación y a la lógica. En la actualidad y, en particular, en la matemática como ciencia no experimental, las *tecnologías de la información y la comunicación* (TIC) se han transformado en instrumentos potentes para la producción de conocimiento, tanto en la formulación de conjeturas como en la validación de las mismas.

En la segunda mitad del siglo XX, Edward Lorenz, en el modelado de las condiciones climáticas en la atmósfera, reconoce el comportamiento caótico del sistema dinámico y se impulsa así un fuerte desarrollo de la teoría del Caos. Por otra parte, en 1983, el matemático Benoit Mandelbrot publica *"The Fractal Geometry of Nature"*, libro que ha marcado un antes y después en la teoría fractal y su relación con la naturaleza. Desarrollos posteriores han mostrado la utilidad de la teoría fractal para estudiar el comportamiento caótico en crecimientos poblacionales, formas geométricas de la naturaleza y la actividad humana, análisis de tejidos humanos para la prevención de enfermedades, entre otros. Ambos constructos matemáticos, la teoría del Caos y la teoría Fractal, se han desarrollado con una fuerte influencia de los soportes informáticos. El reconocimiento de la importancia de las TIC en la producción de conocimiento ha dejado atrás discusiones sobre la validez de estos instrumentos.

Las discusiones epistemológicas acerca de las TIC como instrumento para conocer, también han influido en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias. Villarreal (2012) sostiene que:

> la investigación ha proporcionado evidencias de la transformación que el uso de computadoras trae para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Una de tales transformaciones es la creación de ambientes donde la matemática puede ser vivenciada como una ciencia experimental, a través de herramientas que permiten la generación y validación de conjeturas; un laboratorio matemático donde un «ensayo y error educa-

do» fuese permitido y la visualización fuese un aliado para la comprensión matemática. (p.83)

En particular, en la educación matemática, una preocupación recurrente es cómo promover los saberes y las estrategias propias del quehacer matemático en la formación de los estudiantes. Chevallard, Bosch y Gascón (1997) presentan tres aspectos de la actividad matemática. En primer lugar, *utilizar matemáticas conocidas*, que consiste en utilizar los conocimientos para resolver problemas sin que esto requiera de otras consideraciones. El segundo aspecto planteado es *aprender (y enseñar) matemáticas*, en el cual, a partir de un problema, surge la necesidad de utilizar instrumentos matemáticos que son desconocidos para quien desarrolla la actividad. El tercer aspecto es *crear matemáticas nuevas*, que consiste en resolver problemas que requieren de construir nuevos modelos o reinterpretar otros para aplicarlos a una nueva situación.

En atención a estas preocupaciones, en el año 2017 se comenzó con un proyecto de innovación curricular (PIC), denominado "El aula como escenario de interacción: modelos matemáticos y estrategias en el uso de tecnología educativa", para la asignatura "Modelos Matemáticos aplicados a la Química y la Biología" de la carrera Licenciatura en Biotecnología de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina). En el marco del PIC y a los fines de trabajar de acuerdo al segundo aspecto de la actividad matemática descripto por Chevallard *et al* (1997), interesa proponer a los estudiantes la interpretación, el análisis y la presentación frente a sus compañeros (a través de la modalidad de seminarios) de un modelo dinámico discreto.

El objetivo de este trabajo es estudiar el modelo logístico en diferencias, su análisis cualitativo y sus aspectos relevantes para la formación matemática de los estudiantes. En particular, presentar las nociones matemáticas implicadas, los aportes del contexto del modelo para el análisis y la potencialidad del uso de las TIC para el estudio de modelos dinámicos discretos y su relación con el Caos y la teoría Fractal.

Enfoque teórico y metodología

En la búsqueda de proponer en el aula de matemática tareas que propicien el trabajo matemático, resulta necesario reconocer las interpretaciones que se tienen sobre la actividad matemática. Chevallard *et al* (1997) parten de "la actividad matemática como trabajo de modelización encaminado a resolver problemas" (p.54). Como se mencionó anteriormente, estos autores caracterizan tres tipos de actividad matemática: *utilizar matemáticas conocidas*, *aprender (y enseñar) matemáticas* y *crear matemáticas nuevas*. La primera de ellas refiere a la mera aplicabilidad de conocimientos previos para la resolución de un problema. La situación planteada no genera la indagación de nuevas nociones o estrategias. Según Chevallard *et al* (1997), el segundo tipo de actividad se caracteriza por:

> el estudio de un sistema matemático o extramatemático genera situaciones que pueden ser abordadas mediante instrumentos matemáticos que ya existen, pero que son desconocidos para el que desarrolla la actividad. Surge así la necesidad de aprender matemáticas para poder responder a las cuestiones propuestas. (p.55)

Este tipo de actividad está íntimamente ligada a la labor educativa: el docente acompaña y orienta a sus alumnos en el planteo de nuevas preguntas, la búsqueda de estrategias novedosas de resolución y ayuda a brindar herramientas necesarias en la resolución de la situación problemática pero que aún son desconocidas por los alumnos.

Por último, la tercera caracterización de la actividad matemática, admite dos interpretaciones. En un sentido estricto, la actividad de crear matemáticas nuevas está restringida a la comunidad de investigadores matemáticos. Sin embargo, en un sentido amplio del término "nuevas", la actividad de creación está implícita en el proceso de aprendizaje. Como sostiene Chevallard *et al* (1997) "los alumnos no crearán conocimientos nuevos para la humanidad, pero sí podrán crear matemáticas nuevas para ellos en cuanto grupo de alumnos" (p.56).

Estos aspectos de la actividad matemática se vinculan con el trabajo que se realiza desde diferentes enfoques sobre la utilización de las TIC en el aula. Así como la matemática puede ser un mero instrumento de aplicación o un medio de indagación y creación, resulta importante preguntarse cuál es el rol que adquieren las TIC en las tareas matemáticas. En base a los aportes de Borba y Penteado (tomado de Villarreal, 2012), Villarreal sostiene que las TIC plantean "el desafío de diseñar propuestas educativas que promuevan pensar y aprender con las TIC, creando ambientes de aprendizaje que se constituyan en escenarios de investigación y exploración y evitando caer en una domesticación de la tecnología" (p.84).

Por este motivo, los escenarios de aprendizaje con la utilización de TIC deben ser construidos de manera intencionada y los problemas matemáticos deben promover la exploración, la indagación sobre nuevos conceptos y el intercambio entre pares. En este sentido, Villarreal (2012) sostiene:

> En un abordaje experimental-con-tecnología los estudiantes se encuentran en un escenario rico en medios tecnológicos, el cual les permite experimentar para realizar conjeturas, explorar nuevamente para así mejorarlas y discutir sus hallazgos con colegas y el profesor de la clase. Si bien en un principio se recurre a procesos de ensayo y error, pasado un período exploratorio, los mismos dejan de tener un carácter azaroso, para transformarse en procesos de ensayo y error educados. Esto ocurre porque el feedback que proviene de la computadora o calculadora gráfica, conjuntamente con el conocimiento matemático previo y la elaboración de argumentos lógicos, permiten reformular con fundamentos lo que se ha conjeturado, o bien justificar su validez. (p.85)

En vistas a formalizar una propuesta de trabajo en el aula, se estudia un modelo matemático y se analizan los aportes del abordaje de este modelo. El trabajo de indagación se centra en las características y las nociones matemáticas involucradas en el desarrollo de la actividad matemática en el aula. Por este motivo, se adopta un enfoque metodológico cualitativo, con modalidad no interactiva, a través del cual "el investigador identifica, estudia y luego sintetiza los datos para proporcionar un conocimiento del concepto o del suceso" (McMillan y Schumacher, 2005, p.48).

Modelo matemático

Para abordar el estudio de un sistema dinámico discreto, se considera el *modelo logístico en diferencias* (Boyce y DiPrima, 2001) aplicado a la producción agrícola. Esta actividad productiva es cercana a los estudiantes puesto que tiene una gran influencia en la economía de la región de donde provienen los alumnos de la universidad. Además, el modelo presenta similitudes con respecto al modelo logístico continuo, estudiado como parte del programa de estudios de la asignatura. La diferencia radica en el dominio del "tiempo": ya no es considerado una variable continua sino una variable discreta. Esto es, entre dos instantes de tiempo, se tiene una cantidad finita de instantes de tiempo sobre los que se puede evaluar el modelo. El cambio en la interpretación de la variable requiere la utilización de otras herramientas matemáticas. Además, en el estudio del modelo se relacionan conceptos matemáticos que se han desarrollado fundamentalmente en los últimos 50 años, en gran medida, con el soporte de las TIC: el Caos y la teoría Fractal. En la Figura 1 se presenta la indagación realizada en este trabajo.

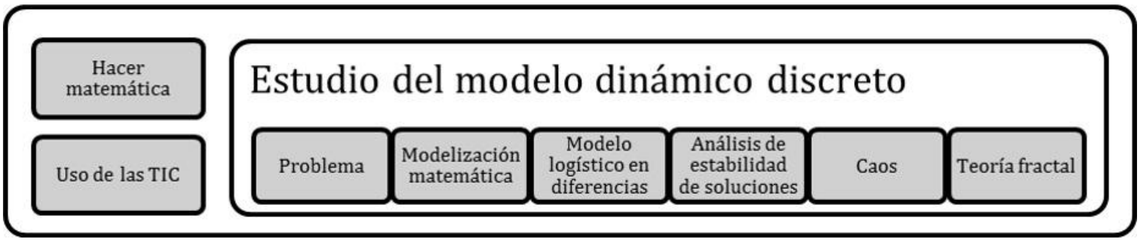


Figura 1. Etapas indagadas en el modelo dinámico discreto desde su análisis cualitativo

Desde el enfoque cualitativo, se plantea la búsqueda de indicios que promuevan la actividad matemática y que la utilización de las TIC sea de carácter relevante y necesario. Desde estas perspectivas, se parte de la modelización de un problema de producción de granos para la construcción del modelo logístico en diferencias.

Frente a la imposibilidad de obtener la solución explícita del modelo, se realiza un análisis cualitativo desde lo algebraico y con el soporte de las TIC. Para ello se utilizan dos programas informáticos: *GeoGebra* y MATLAB. El primero posee una amplia difusión entre los educadores matemáticos, además de versatilidad y sencillez de la interfaz. El segundo es utilizado, principalmente, por la comunidad de matemáticos por su potencia en la programación y ejecución de rutinas de cálculo.

El análisis cualitativo del sistema dinámico discreto implica el estudio de otros conceptos matemáticos y conduce a la comprensión del comportamiento caótico. Por último, y si bien no es objeto de estudio de este trabajo, el comportamiento caótico puede ser interpretado y estudiado desde la teoría fractal.

Sistema dinámico discreto de crecimiento poblacional

El modelo matemático en cuestión relaciona la producción durante la cosecha de granos de una temporada con respecto a la cosecha de la temporada siguiente. Es decir, entre dos cosechas consecutivas no se consideran instantes de tiempo válidos para la evaluación de la producción. Este hecho implica la interpretación del tiempo como una variable discreta.

Para mayor simplicidad en la construcción de la expresión algebraica, se realiza la suposición de que siempre se utiliza una proporción constante de granos de la cosecha para su siembra en la siguiente temporada. De esta manera, para una expresión inicial del modelo se plantea una relación de recurrencia lineal $C_{n+1} = \mu C_n$, donde n es la temporada (o año) de cosecha, C_n indica la producción obtenida en la temporada n y μ es una constante positiva que indica la tasa de producción en ausencia de saturación. Sin embargo, se considera que una baja cantidad de granos sembrados en una temporada da lugar a una mayor disponibilidad de nutrientes del suelo, por lo que se espera una mayor tasa de crecimiento en la siguiente temporada de cosecha. En caso contrario, se produce una saturación del suelo que producirá un descenso en la tasa de producción. Por lo tanto, la tasa de crecimiento ya no es considerada constante, sino que varía de acuerdo a la producción. Un nuevo planteo del modelo de crecimiento poblacional consiste en una relación de recurrencia no lineal de primer orden dada por $C_{n+1} = C_n(\mu - \lambda C_n)$, donde λ es una constante positiva que indica la influencia de la saturación sobre la producción. Además, si se considera $C_n = \frac{\mu x_n}{\lambda}$, el modelo puede presentarse en su forma clásica $x_{n+1} = \mu\, x_n(1 - x_n)$, el cual es conocido como *modelo logístico en diferencias* (Boyce y DiPrima, 2001).

Para el estudio del modelo, interesa conocer el comportamiento de los valores de x_n para n suficientemente grande, la dependencia con respecto al valor de μ y la sensibilidad ante la modificación de la condición inicial x_0. Ante la imposibilidad de obtener una expresión explícita de x_n en función de n, es necesario realizar un análisis cualitativo del modelo. En consecuencia, en primer lugar, se analiza el dominio de μ y x_n, para que las soluciones obtenidas tengan sentido en el contexto del modelo, es decir, que el valor de la producción obtenida sea mayor o igual que cero para todo n. Luego, con el objetivo de analizar el comportamiento de la producción a largo plazo, se estudian las órbitas solución del sistema. Llamaremos *órbita de* x_0 a la lista de valores solución de las sucesivas iteraciones a partir de x_0 (Devaney, 1990). En notación de conjuntos, la órbita O_{x_0} de x_0 puede expresarse como $O_{x_0} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. En el contexto del modelo, la órbita representa los valores de las producciones en cada una de las temporadas, suponiendo una cantidad infinita de temporadas posibles. Posteriormente, se analiza la existencia de puntos fijos y periódicos del sistema. Los *puntos fijos* del sistema son aquellos valores de x_n tales que $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(x_n) = x_n$. Los *puntos periódicos*, de período N, son aquellos valores de x_n tales que $f^N(x_n) = x_n$. Es decir, los puntos periódicos (de período N) son puntos fijos de f^N. Una vez hallados estos valores, se pueden analizar las características de atracción y repulsión de cada uno. Coloquialmente, esto significa que, para valores iniciales cercanos a estos puntos (sean fijos o periódicos), las órbitas tienden a dichos puntos o se alejan infinitamente. Los puntos fijos permiten analizar las soluciones de equilibrio, la estabilidad del sistema y la dependencia de las soluciones de las condiciones iniciales. Para esto, se indaga a través de representaciones gráficas de soluciones del sistema y se realiza un análisis algebraico del modelo.

Puesto que x_n debe ser mayor a cero para todo n, entonces $0 \leq x_n \leq 1$ (en caso de que $x_n = 0$ o $x_n = 1$, $x_N = 0$ para todo $N > n$). A partir de esta expresión, se identifica el intervalo de valores que puede tomar el parámetro μ. De la ecuación que rige el modelo y las condiciones sobre x_n se obtiene que μ sólo puede tomar valores entre *0* y *4*.

A continuación, se buscan los puntos fijos del modelo discreto que se obtienen como los valores de x_n tales que $x_n = \mu x_n(1 - x_n)$. De aquí se obtienen dos puntos fijos: $x_c = 0$ y $x_c = 1 - 1/\mu$. Como $0 \leq x_n \leq 1$, para $0 \leq \mu \leq 1$ se tiene un único punto fijo, $x_c = 0$.

Para estudiar la estabilidad de los puntos fijos, se realiza una aproximación lineal de la ecuación $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ en la vecindad de cada punto fijo (Boyce y DiPrima, 2000). De este análisis, se deduce que $x_c = 0$ es un punto fijo estable si $\mu < 1$. Para $1 \leq \mu \leq 3$, el punto fijo $x_c = 0$ es inestable y $x_c = 1 - 1/\mu$ es un punto fijo estable. Es decir, en $\mu = 1$ se produce un cambio en la estabilidad y la cantidad de los puntos fijos. El cambio en la estabilidad o cantidad de puntos fijos se denomina *bifurcación* (Ingalls, 2013). Para $3 \leq \mu$, ambos puntos fijos son inestables por lo que en $\mu = 3$ se produce una nueva bifurcación. Para $3 \leq \mu < 3{,}5699$, se tiene una cantidad finita de puntos periódicos estables, que sólo dependen del parámetro μ. Esto implica que el comportamiento de las órbitas a largo plazo no depende de las condiciones iniciales. Además, en dicho intervalo, al aumentar el valor de μ y superar ciertos umbrales, se genera una bifurcación caracterizada por la duplicación en la cantidad de puntos periódicos estables. Los valores umbrales de las sucesivas duplicaciones de período pueden estimarse a través de la constante de Feigenbaum (Ingalls, 2013). Sin embargo, el análisis algebraico comienza a presentar dificultades debido a la complejidad de las expresiones involucradas y la cantidad de puntos periódicos. Para continuar el estudio de la estabilidad del modelo a largo plazo, se hace necesario recurrir a soportes informáticos y gráficas que permitan mostrar el comportamiento de las órbitas.

A través de *GeoGebra*, se realiza un diagrama de órbitas con la utilización de dos *deslizadores*: uno para la condición inicial x_0 y otro para el valor de μ. El diagrama consiste en el gráfico de puntos que refieren al valor de x_n en función de n (temporadas). En los gráficos que se presentan a continuación se muestran los primeros 50 valores de x_n.

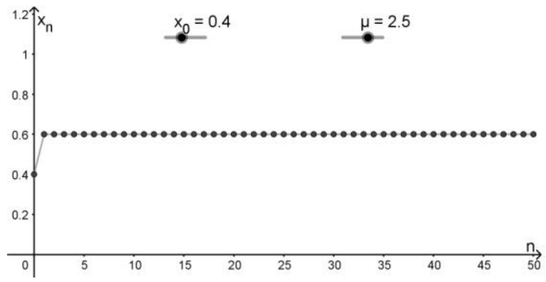


Figura 2. Órbita del modelo logístico en diferencias para $x_0 = 0{,}4$ y $\mu = 2{,}5$

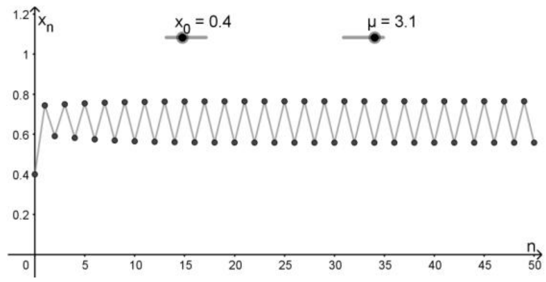


Figura 3. Órbita del modelo logístico en diferencias para $x_0 = 0{,}4$ y $\mu = 3{,}1$.

En la Figura 2 se muestra la órbita de $x_0 = 0{,}4$ para $\mu = 2{,}5$ y se observa que la órbita tiende al valor $x_c = 1 - \frac{1}{2{,}5} = 0{,}6$. Esto se condice con la presencia del punto fijo estable $x_c = 1 - 1/\mu$ cuando $1 \leq \mu \leq 3$. Si se cambia la condición inicial y se mantiene fijo el valor de μ, sólo se perciben pequeñas modificaciones para los primeros valores de las órbitas pero el mismo comportamiento en el largo plazo.

En la Figura 3 se presenta la órbita de $x_0 = 0{,}4$ para $\mu = 3{,}1$. Se observa que, luego de los primeros valores, la órbita alterna entre dos valores. Esto es, dos puntos periódicos estables con período-2. Análogamente al caso anterior, si varía la condición inicial x_0 la tendencia a largo plazo no se modifica.

Al continuar la exploración con el aumento del valor de μ se observan las sucesivas duplicaciones de período. Sin embargo, para ciertos valores de μ en el intervalo $(3{,}5699;\ 4]$ no se aprecian regularidades en el comportamiento de la órbita. Esto se muestra en la Figura 4, donde se representa la órbita de $x_0 = 0{,}4$ para $\mu = 3{,}6$. Además, al realizar una pequeña modificación en el valor de la condición inicial x_0 se tiene una gran variación en la órbita a largo plazo. Este comportamiento es denominado *caótico* (Ingalls, 2013). Una de las características de dicho comportamiento es que las soluciones son sumamente sensibles a las condiciones iniciales.

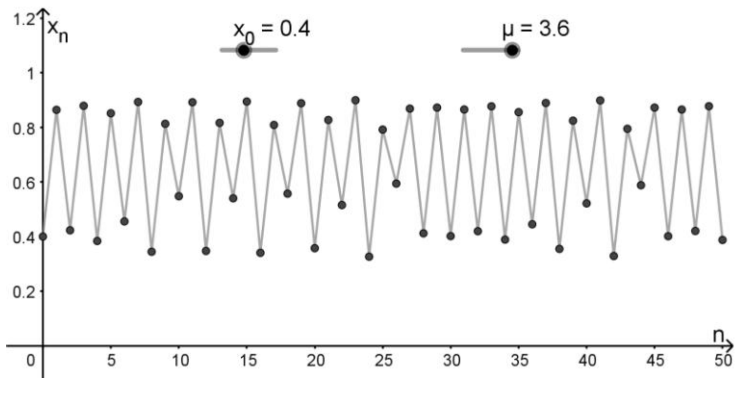


Figura 4. Órbita del modelo logístico en diferencias para $x_0 = 0{,}4$ y $\mu = 3{,}6$

Una manera de complementar el análisis cualitativo del modelo es a través de un diagrama de bifurcación (Ingalls, 2013). Este diagrama se realiza a través de una rutina de programación en MATLAB y consiste en el gráfico de una gran cantidad de puntos, a partir de una condición inicial fija y para distintos valores del parámetro μ. Como interesa conocer el comportamiento de las órbitas solución a largo plazo, se descartan los primeros valores solución. De esta manera, se puede lograr una mejor visualización de los puntos fijos y periódicos. En la Figura 5 se presenta el diagrama de bifurcación de $x_0 = 0{,}5$, para μ entre 3 y 4 (con un paso de 0,001), descartando los valores de las primeras 100 iteraciones y el gráfico de los valores de las siguientes 200 iteraciones. Para los valores de μ entre 0 y 3, no se realiza el diagrama debido a que ya pudo estudiarse el comportamiento de las órbitas a largo plazo a través de la estabilidad de los puntos fijos.

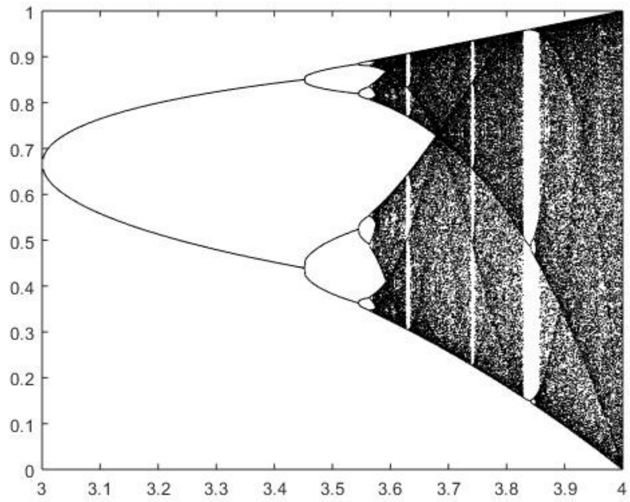


Figura 5. Diagrama de bifurcación para 3 ≤ μ ≤ 4

Para $3 < \mu < 3{,}45$, los valores de 200 iteraciones se encuentran cercanos a dos valores, los cuales se corresponden con puntos periódicos, también identificados en la Figura 3. Las sucesivas 'divisiones' de las curvas a medida que aumenta el valor de μ representan gráficamente el concepto de bifurcación. Las bifurcaciones se repiten hasta $\mu \approx 3{,}6$.

De lo estudiado hasta el momento, se observa que las órbitas presentan regularidades a largo plazo. Además, al realizar el diagrama de bifurcación de otros valores iniciales, se puede apreciar que estos puntos fijos y periódicos no dependen de las condiciones iniciales sino sólo del valor del parámetro μ. En el contexto del modelo estudiado, esto indica que la producción de granos puede estimarse a largo plazo cuando la tasa de crecimiento μ es menor a $3{,}6$ y esta predicción no depende del valor inicial de siembra. Sin embargo, el diagrama de bifurcación muestra ciertos intervalos de $3{,}6 < \mu \leq 4$ en que los puntos correspondientes a las sucesivas iteraciones no presentan ningún punto atractor. A partir de una condición inicial dada, los puntos se dispersan sobre todo el intervalo $(0{,}1)$. Esto sucede también para mayores valores de n y el diagrama de bifurcación es extremadamente similar bajo diferentes condiciones iniciales. Esto muestra, nuevamente, el comportamiento caótico del sistema para ciertos valores de μ en el intervalo $(3{,}6;\ 4]$.

Avanzar en el estudio del comportamiento caótico conduce a la indagación sobre expresiones y conjuntos de órbitas más generales, pero no así más complejas en su expresión matemática. Un ejemplo de ello es el *conjunto de Julia*, definido en los complejos. Éste consiste en el límite del conjunto de puntos cuyas órbitas escapan al infinito (Devaney, 1990). El modelo logístico discreto, presentado como $f(x) = \mu\, x(1 - x)$ es una relación cuadrática que, al considerarse en variable y parámetros complejos, define un conjunto de Julia, como se muestra en la Figura 6.

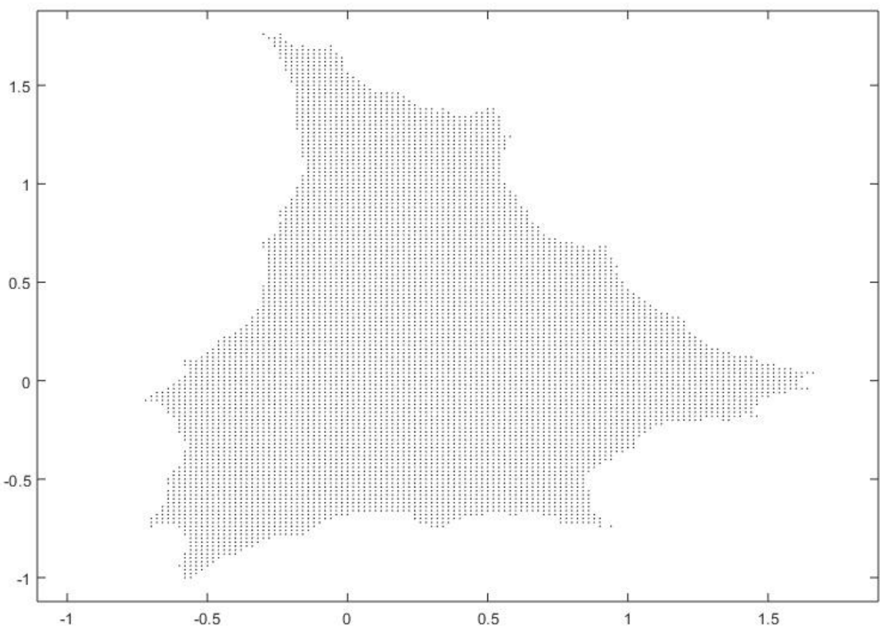


Figura 6. Conjunto de Julia para $f(x) = \mu\, x(1 - x)$, con $\mu = 0{,}6 + 0{,}8\, i$

El análisis de estos conjuntos y, en las últimas décadas, del Conjunto de Mandelbrot (Devaney, 1990), ha llevado al desarrollo y aplicación de la teoría fractal para el abordaje del comportamiento caótico. Esta relación entre el comportamiento caótico y la teoría fractal tiene su conexión en la propiedad de autosimilaridad (Devaney, 1990) que presentan los gráficos de los Conjuntos de Julia y Mandelbrot, una característica esencial de la geometría fractal.

El análisis realizado hasta aquí pone en evidencia la multiplicidad de conceptos matemáticos que emergen en el estudio del modelo y se relacionan entre sí. A modo de resumen, se presenta un esquema de algunas de las relaciones que se pueden establecer entre los nuevos conceptos incorporados y las nociones ya trabajadas en asignaturas de cálculo y análisis matemático.

Figura 7. El problema y algunos de los conceptos matemáticos involucrados

En el estudio del modelo, las herramientas informáticas han ofrecido un soporte al análisis cualitativo tanto en las representaciones gráficas de las conclusiones algebraicas como para establecer conjeturas sobre el comportamiento del sistema dinámico donde el desarrollo algebraico presenta limitaciones. Además, han contribuido a relacionar diversos conceptos matemáticos (variable discreta, relaciones de recurrencia lineal y no lineal, sucesiones, convergencia de sucesiones, entre otros), reconocer las diferencias con el modelo logístico continuo y validar las indagaciones algebraicas. Por último, las TIC no son sólo instrumentos didácticos potentes sino que se encuentran en la génesis de la caracterización y el estudio del comportamiento caótico y el desarrollo de la teoría fractal.

Reflexiones finales

La simplificación de las condiciones naturales y las suposiciones de no variabilidad de las tasas de crecimiento y saturación a lo largo del tiempo, suponen que la correlación entre el modelo matemático y la situación real carece de exactitud. Como expresa Devaney (1990), existen, de hecho, modelos matemáticos más complejos y precisos para la modelización del crecimiento poblacional discreto. Sin embargo, el modelo dinámico discreto presentado permite, a partir de expresiones algebraicas sencillas, la introducción a nociones matemáticas relacionadas al caos y la teoría fractal, de principal desarrollo durante la segunda mitad del siglo XX.

Además, es importante notar que, en base al amplio desarrollo de la matemática y a nuevas herramientas informáticas utilizadas en la investigación científica, se observa un considerable aumento en la capacidad para predecir fenómenos que antes eran imposible de abordar.

Desde el punto de vista de la actividad matemática, el modelo logístico en diferencias de crecimiento poblacional promueve un acercamiento a las relaciones de recurrencia, las sucesiones y el análisis de convergencia y abre una puerta hacia el caos y la teoría fractal, de gran aplicabilidad a procesos biológicos. En consonancia con el segundo aspecto planteado por Chevallard *et al* (1997), el modelo no recae en la simple aplicabilidad de los contenidos trabajados en el cursado, sino que posibilita la indagación, el proceso de descontextualización y contextualización y la necesidad de recurrir a nociones matemáticas existentes pero desconocidas para el alumno. Asimismo, las TIC adquieren especial relevancia en el estudio y análisis del modelo en cuestión en dos aspectos: en primer lugar, permiten la representación gráfica de soluciones, y a partir de ello, promover la conjeturación, visualización y validación del análisis algebraico; y en segundo término, la relación epistemológica entre las nociones matemáticas puestas en juego y las TIC. El estudio del comportamiento caótico y el desarrollo de la geometría fractal se han basado en la utilización de las TIC como instrumento de soporte para la producción de conocimiento. La necesidad de reconocer esta dimensión es también manifestada por Villarreal (2012), quien considera que “los estudiantes tienen escasas oportunidades de aprender matemática con computadoras porque no es la manera usual de aprender matemática y porque no se asume como posición epistemológica básica que los medios son constitutivos del conocimiento” (p.83).

En vistas al análisis realizado, se espera continuar el trabajo de investigación con las indagaciones sobre las relaciones entre el comportamiento caótico y la teoría fractal, en particular, sobre las nociones matemáticas de la geometría fractal para interpretar el comportamiento caótico. Al mismo tiempo, se espera realizar el diseño de una propuesta didáctica para que sea implementada en la asignatura en cuestión con el fin de analizar las destrezas matemáticas que son desarrolladas por los estudiantes a través del estudio de este modelo. Finalmente, interesa proveer a los estudiantes un conjunto de herramientas con el cual puedan desarrollar proyectos que requieran construir modelos matemáticos para analizar problemas de interés en el mundo real.

Referencias bibliográficas

Boyce, W. y DiPrima, R. (2001) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México, México: Limusa Wiley.

Casares, A. (2009). Lógicas y contextos en la construcción de las ciencias. *A Parte Rei. Revista de Filosofía*, (65), 1-19.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona, España: I.C.E, Horsori.

Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics*. Boston, EEUU.: Addison-Wesley.

Ingalls, B. (2013). *Mathematical Modeling in Systems Biology. An Introduction*. Cambridge, Reino Unido: The MIT Press.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5ta ed.). Madrid, España: Pearson. Addison Wesley.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia 3*(5), 73-94.

Eje 6
Educación estadística

Población estadística. Una idea fundamental en la inferencia estadística paramétrica

MARÍA ALEJANDRA SANTARRONE

santarrone@gmail.com

ROBERTO MEYER

Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo dar a conocer uno de los primeros estudios exploratorios, realizado en el marco de un trabajo final de maestría en docencia universitaria. La tesis se titula: "Secuencias de enseñanza de la estadística descriptiva, enfoque para favorecer el aprendizaje de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica en los alumnos de la cátedra de estadística de la carrera de Contador Público en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Litoral de la República Argentina". Consiste en, primera instancia, analizar, bajo el marco teórico del enfoque ontosemiótico aquellos conceptos de la estadística descriptiva que conforman las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica y en segunda, diseñar en el contexto dado una secuencia de enseñanza de la estadística descriptiva que brinde un andamiaje sólido para aprender dichas ideas.

A modo de avance, exponemos los resultados de un trabajo de indagación acerca de una de las ideas fundamentales: la de "población estadística". A partir del diseño de un cuestionario hemos recogido evidencia acerca de las dificultades que conlleva la aplicación de la definición en contextos reales, en estudiantes de un primer curso de estadística universitaria.

Contexto del trabajo exploratorio

Objetivos e hipótesis de la investigación en curso

La investigación que estamos llevando a cabo consiste en primera instancia en analizar, bajo el marco teórico del enfoque ontosemiótico, aquellos conceptos de la estadística descriptiva que conforman las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica y en segunda instancia en la elaboración de una secuencia de enseñanza de la estadística descriptiva que brinde un andamiaje sólido para aprender dichas ideas. Prevemos poner en práctica la secuencia de enseñanza diseñada y evaluarla para poder describir los alcances de la misma.

Los interrogantes planteados son los siguientes:

- ¿Cuáles son las relaciones conceptuales que se pueden establecer entre los contenidos de la estadística descriptiva e inferencial para el aprendizaje significativo de ambas ramas?
- ¿De qué forma se puede secuenciar la enseñanza de la estadística descriptiva para brindar un andamiaje al alumno que posibilite el aprendizaje de las ideas fundamentales en la inferencia estadística paramétrica?
- ¿Qué instrumentos son pertinentes para evaluar los alcances de la puesta en práctica de una secuencia de enseñanza de la estadística descriptiva, en relación con el aprendizaje de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica?

El objetivo general entonces, es el diseñar una secuencia de enseñanza de la estadística descriptiva que favorezca el aprendizaje de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica, en los alumnos, contextualizada en la cátedra de estadística de la FCE-UNL.

Del mismo se desprenden otros tres más particulares: analizar los conceptos específicos de la estadística descriptiva que serán parte de la secuencia de enseñanza para favorecer el aprendizaje de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica, en los alumnos de la cátedra de estadística de la FCE-UN; elaborar la secuencia para la enseñanza de los conceptos definidos, que responda al objetivo general planteado y evaluar la secuencia de enseñanza a través de su puesta en práctica, en los alumnos de estadística de la FCE-UNL, para determinar si cumplió con el fin planteado en el objetivo general.

Las hipótesis son dos, una de nivel de concreción teórica y otra de concreción operativa:

- H1: Existen relaciones conceptuales entre los contenidos de la estadística descriptiva e inferencial que favorecen el aprendizaje significativo de ambas ramas.
- H2: Secuenciar la enseñanza de la estadística descriptiva, en base a las relaciones conceptuales que se establecen en H1, permite a los alumnos alcanzar niveles altos de comprensión en las ideas fundamentales de inferencia estadística paramétrica.

Encuadre teórico de la investigación

Con respecto a su objeto, este trabajo plantea desarrollar una secuencia de enseñanza desde la teoría de situaciones didácticas planteada por Brousseau (1986/1993).

La teoría está sustentada en una concepción constructivista, en el sentido piagetiano del aprendizaje. Brousseau (1986/1993) lo caracteriza de la siguiente manera:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (p.11).

De esta forma, Brousseau (2000) define:

> Hemos llamado situación de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas situaciones requieren de la adquisición anterior de todos los conocimientos y esquemas necesarios, lo que comúnmente llamamos bagaje cultural o saberes previos) pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismos un conocimiento nuevo en un proceso genético, a partir de saberes previos (p.10).

Es así como la situación didáctica se establece como el conjunto de relaciones que se dan de manera implícita o explícita entre un grupo de alumnos, un entorno (que puede incluir materiales o instrumentos) y el profesor, con el fin de que los alumnos aprendan.

El armado de la situación didáctica plantea un modelo de interacción que conduce, desde el punto de vista metodológico, a la Ingeniería Didáctica, Artigue

(1995). Se trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados.

Tomando a Godino (2014) en esta investigación se trabajará con una visión ampliada de la ingeniería didáctica, entendida como una clase específica de investigación basada en el diseño, en la que las herramientas teóricas que sirven de base en las distintas fases del proceso metodológico forman parte del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos.

Los objetos matemáticos involucrados en la ingeniería didáctica que se pretende en esta tesis, persiguen la enseñanza y aprendizaje de conceptos de la estadística descriptiva que favorezcan el aprendizaje de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica. Se toman las ideas definidas y analizadas en Meyer (2005): variabilidad de los datos; población estadística; frecuencias teóricas vs frecuencias empíricas, azar y regularidad estadística; incertidumbre y determinismo en las formas de razonamiento cuantitativas; muestra al azar; y técnicas empíricas vs métodos de la inferencia estadística.

Las mismas surgen de pensar el proceso de transposición didáctica y el análisis del contexto científico, la relación docente-alumno-saber enseñado, de la colección de errores conceptuales estadísticos detectados en diferentes contextos de la instrucción y la interpretación que realiza el colectivo de investigadores y formadores en educación de algunos conceptos estadísticos considerados claves para la formación de razonamientos estadísticos inferenciales, y de una naturaleza e importancia cuali-cuantitativa.

Se destaca en Meyer (2005) la consideración integral del proceso de formación del razonamiento inferencial estadístico inductivo a partir de determinados conceptos de la disciplina asociados a la estadística descriptiva.

Primer estudio exploratorio. Idea fundamental: Población estadística

Referencias teóricas sobre la construcción de un test

En el transcurso de esta primera etapa estuvimos abocados a empaparnos con el marco teórico del enfoque ontosemiótico (EOS), cuyo bagaje conceptual es amplio, a partir de la gran cantidad de tesis realizadas bajo el mismo y cuyo principal referente es el grupo de la Universidad de Granada, España.

Creemos importante, como contribución de la tesis, el poder ejemplificar las concepciones abordadas, de forma tal que el lector no sólo tenga un resumen teórico sino cómo estas pueden ser llevadas a la práctica.

En esta ponencia queremos compartir, una primera muestra de ello, a partir de los resultados de un estudio exploratorio. El mismo se basa en un cuestionario acerca de una de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica: "población estadística". Tomando la definición del concepto establecida en Meyer (2005), es que diseñamos un test que esperamos permita distinguir las prácticas matemáticas que los campos de problemas allí dispuestos generan y explorar las dimensiones de los objetos matemáticos, bajo el EOS.

Según Godino y Batanero (1994), se toma como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas

Esta noción permite tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Las prácticas de una persona al resolver un problema pueden ser observables (por ejemplo, cuando un alumno escribe su solución a un problema o relata al profesor sus acciones para resolverlo). En otros casos, algunas de estas prácticas son acciones interiorizadas no observables directamente.

Figura 1. Elementos en una práctica matemática

Aquí una tarea o problema es tomado como planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. Un conjunto de problemas formará un campo (campo de problemas) cuando todos ellos compartan soluciones y/o metodologías de resolución similares o relacionadas. En el caso de la matemática, será un campo de problemas relacionado con un objeto matemático específico, así como las progresivas actividades que surgen del mismo.

Las prácticas pueden ser específicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Esta está constituida por las personas interesadas en resolver una misma clase de situaciones problemáticas. La pertenencia a una institución conlleva a la realización de unas prácticas sociales que son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. Cada institución determina cuáles son las prácticas aceptadas en la misma. En este trabajo nos abocaremos a las prácticas que se darán específicamente en el contexto de la FCE, de allí que las inferencias que se puedan realizar serán para aquellas prácticas que compartan las características institucionales que se especifican.

La situación-problema y las prácticas que se realizan en su resolución son el primer eslabón que permitirá definir los conceptos, el objeto y el significado (personal e institucional) como resultado de su resolución. Por tanto, el significado en este enfoque es el resultado del conjunto de prácticas realizadas a la hora de resolver un campo de problemas.

Figura 2. Esquema de la construcción del significado de un concepto

Meyer (2005) sostiene que una idea fundamental para presentar a los alumnos al desarrollar el proceso de conocimiento de la inferencia estadística y las formas de razonamiento cuantitativas asociadas - y por lo tanto para una posterior formación efectiva en el saber cómo hacer de la metodología de la inferencia estadística-; comienza con la identificación del conjunto de todas las medidas o datos de la variable estadística que se está estudiando y que es de interés de acuerdo al problema que se debe resolver.

Para este autor una “población estadística” es:

el conjunto de todas las medidas repetidas o no, experimentales o ideales, de la característica que se desea investigar, en un proceso de medición sobre todos los elementos que son portadores de dicha característica, mediante una escala predefinida, y definidos con precisión tiempo y espacio (p.226)

lo que conlleva a una necesidad de reconstrucción de la definición intuitiva que tienen los estudiantes iniciales sobre el término de población, al asociar a éste al de población geográfica.

El concepto de población estadística antes definido, a partir de la estadística descriptiva, tendrá su completa asimilación al ser relacionada con las distribuciones de probabilidad, y así transformarse en un concepto condicionante del acceso a las formas de razonamiento inferenciales estadísticas.

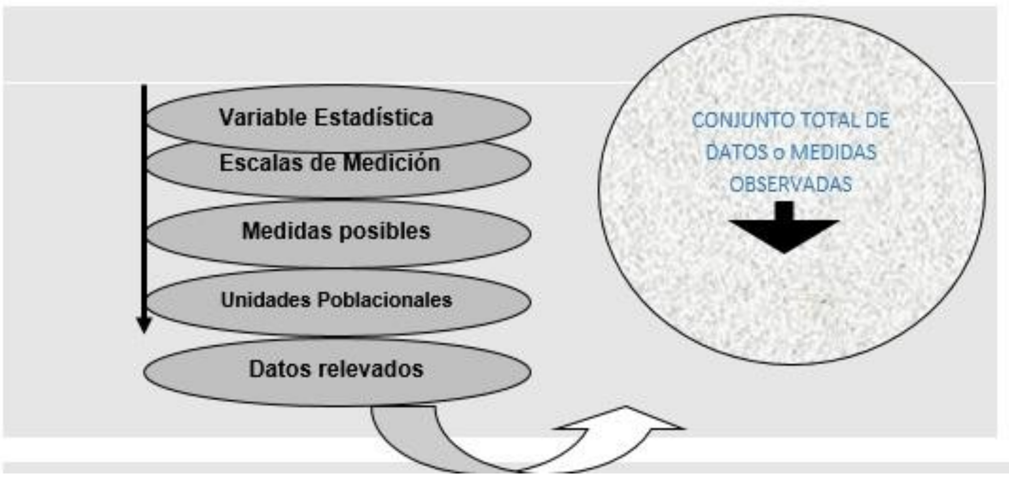


Figura 3. Secuencia de conceptos previos al presentar el concepto de población estadística. Meyer (2005).

Además del trabajo central con este concepto, para diseñar los ítems del test, creímos relevante que los enunciados persigan las ideas de la cultura estadística. Nos basamos en las ideas de Watson (1997) que sugiere que la cultura estadística implica ser capaz de comprender el texto, significado e implicaciones de la información estadística en el contexto en que se presenta y que incluye tres componentes de sofisticación progresiva: el conocimiento básico de los conceptos estadísticos, la comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo y una actitud crítica que se muestra al ser capaz de cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística no suficiente o sesgada.

Diseño metodológico para la construcción del test

Como se mencionó en el apartado anterior la construcción del test implicó explorar las dimensiones de los objetos matemáticos y los campos de problemas que los ítems implican, bajo el EOS.

Siguiendo a Tauber (2001) en el tratamiento del concepto, diferenciamos cuatro tipos de elementos:

- Elementos extensivos: Las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto;
- Elementos ostensivos: Los recursos lingüísticos y gráficos para representar u operar con los problemas y objetos involucrados;
- Elementos intensivos: Propiedades características y relaciones con otras entidades: definiciones, teoremas, y proposiciones;
- Elementos validativos: Argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones.

Dejando aquellos elementos actuativos, es decir procedimientos y estrategias para resolver los problemas por tratarse de una definición.

En relación a los elementos extensivos, los campos de problemas que determinan prácticas matemáticas que dan significado al concepto de Población Estadística los categorizamos, en base a las relaciones conceptuales que comparten, en los siguientes campos:

C1 Aparición de más de una población estadística: lo conforman aquellos problemas donde intervienen más de una población estadística bajo estudio.

C2 Aplicación en contexto: aquellos problemas que implican una atribución del significado de la definición en un contexto determinado.

C3 Necesidad de especificar la escala de medición de la variable: aquellas actividades donde la sola definición de la variable no basta para definir la población estadística que se estudia.

C4 Frecuencia de los datos a partir de montos: conjunto de problemas, típicos en el contexto económico, donde muchas variables cualitativas son observadas a partir de la cantidad de montos vendidos, consumidos o producidos.

C5 Presentación de la información a partir de una muestra: lo conforman aquellas situaciones problemáticas donde se presenta la información muestral.

C6 Reformulación de la definición de la población bajo estudio por cuestiones experimentales: en situaciones reales el estudio inicial de una población se ve recortado por cuestiones experimentales, y es allí donde el estadístico debe reformularlo y redefinir tanto la variable como la población bajo estudio.

C7 Trabajo con una población multivariada. Si bien podría encuadrarse dentro del campo de problemas C1 la importancia de la relación de orden entre las variables reviste un tratamiento a parte.

Campo de problemas	**Ítems**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C1						X	X	
C2	X	X	X	X	X	X	X	X
C3				X				
C4					X			
C5	X							
C6			X					
C7								X

Tabla 1. Clasificación de ítems a partir de los campos de problemas.

Con relación a los elementos ostensivos especificamos en primera instancia el lenguaje, visto como el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar el concepto y las situaciones a las que se refiere. Las categorías son:

O1.1: Coloquial

Por tratarse de una definición, la principal manera de solicitar a los estudiantes que den cuenta de su entendimiento es a partir de expresarla de forma escrita en el lenguaje natural.

O1.2: Tabular

Poder identificar a la población estadística como el conjunto de datos que se desea estudiar, con la importancia de establecer la correspondencia no sólo de sus valores sino de la repetición de los mismos, es de vital relevancia a la hora de poder trabajar el concepto de población estadística en las dimensiones de la inferencia estadística relacionándolo con las distribuciones teóricas de probabilidad.

O1.3: Gráfico

La lectura o la construcción de un gráfico estadístico con lleva a tener en cuenta todos los elementos que se relacionan en la definición de población estadística (variable, escala de medición, tipo de variable, tiempo, espacio).

O1.4: Por extensión

Brindar la definición de población estadística por extensión lleva al estudiante a pensar a esta como el conjunto de datos y viceversa.

Como elementos validativos

O2: Nivel de justificación.

O2.1: Selectivo.

Aquellos donde el estudiante sólo debe seccionar el correcto, sin realizar justificaciones, pero sí la selección implica una comprensión de la definición a la que se le está atribuyendo significado por los distractores aplicados a la opción múltiple.

O2.2 Argumentativo.

Aquellos donde el alumno debe argumentar la falsedad o veracidad utilizando el concepto.

O2.3 Elaborativo.

Aquellos donde el estudiante debe elaborar la respuesta poniendo la definición en términos del contexto.

Elementos intensivos

La definición de población estadística adoptada involucra otros conceptos estadísticos que los alumnos deben comprender y relacionar, éstos son:

O3: Tipo de variables: O3.1 Cualitativa, O3.2 Cuantitativa.

O4: Escala de medición: O4.1 Nominal, O4.2 Ordinal, O4.3 De intervalo.

O5: Determinación: O5.1. Espacio, O5.2 Tiempo.

Objetos	**Ítems**								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
O1	O1.1	X	X	X	X	X	X	X	
	O1.2							X	X
	O1.3	X	X						
	O1.4		X				X		
O2	O2.1			X		X			
	O2.2				X				
	O2.3	X	X	X			X	X	X
O3	O3.1		X	X		X	X	X	
	O3.2	X							X
O4	4.1		X	X		X	X	X	
	4.2								
	4.3	X							X
O5	O5.1	X	X	X	X	X	X	X	X
	O5.2	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 2. Clasificación de ítems a partir de la composición de objetos

A modo de ejemplo se expone el ítem número 7 del test:

7- Un comerciante analiza los registros de su local y observa que en los últimos 10 años ha variado el movimiento de venta de algunos artículos electrodomésticos. Éste resume la información en la tabla presentada debajo. Defina la o las poblaciones estadísticas que se estudiaron para arribar a dicha tabla, de manera coloquial.

ELECTRODOMÉSTICO	Porcentaje de aumento	Porcentaje de disminución
Televisor	10	-
Video casetera	-	30
DVD	50	-
plancha	1	-
Lavarropas automático	15	-
Estufa eléctrica	-	60
Secarropas	-	5

Texto de respuesta larga

Figura 4. Pregunta número 7 del test: Explorando los significados de una de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica: Población estadística

La respuesta esperada es que hay dos poblaciones estadísticas estudiadas: “registro de cada tipo de electrodoméstico vendido por el comerciante hace diez años” y “registro de cada tipo de electrodoméstico vendido por el comerciante en la actualidad”.

El cuestionario se aplicó a 34 estudiantes de dos de las comisiones de la FCE-UNL (C1:10 estudiantes; C2: 24 estudiantes) cursantes en el segundo cuatrimestre de 2019, luego de haber realizado el primer parcial que abarca los temas de estadística descriptiva y en particular el de Población Estadística. Su elección se centró en que estas eran las únicas comisiones donde las docentes no estaban involucradas en este trabajo.

Resultados obtenidos en el test

A continuación se pueden ver los porcentajes de respuestas correctas en las tablas correspondientes a los campos de problemas y a los objetos:

Campo de problemas	**Ítems**								
	1	**2**	**3**		**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
			a	b					
C1							X	X	

C2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
C3					X				
C4						X			
C5	X								
C6			X	X					
C7									X
% de respuestas correctas	41	38	44	15	15	29	3	0	0

Tabla 3. Clasificación de ítems a partir de los campos de problemas. Resultados del test

Objetos	**Ítems**									
		1	**2**	**3**		**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
O1				a	b					
	O1.1	X	X	X	X	X	X	X	X	
	O1.2								X	X
	O1.3	X	X							
	O1.4		X					X		
O2	O2.1			X	X		X			
	O2.2					X				
	O2.3	X	X	X	X			X	X	X
O3	O3.1		X	X	X		X	X	X	
	O3.2	X								X
O4	4.1		X	X	X		X	X	X	
	4.2									
	4.3	X								X
O5	O5.1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	O5.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
% de respuestas correctas		41	3 8	44	15	15	29	3	0	0

Tabla 4. Clasificación de ítems a partir de la composición de objetos. Resultados del test

En todos los ítems se evaluó la aplicación en contexto de la definición, en ningún caso más del 44% de los estudiantes pudo contestar correctamente. El ítem 3 fue el que presentó mayor porcentaje de respuestas correctas, siendo el único que aborda el problema de la reformulación de la definición de la población bajo estudio por cuestiones experimentales. Los estudiantes reconocieron el problema pero sólo el 15% pudo redefinir correctamente la población estadística, solicitada en el ítem b).

En la pregunta 4 se aborda una problemática específica en contexto económico, como es la de presentar la frecuencia de los datos a partir de montos, donde muchas variables cualitativas son observadas a partir de la cantidad de montos vendidos, consumidos o producidos; aquí sólo el 15% pudo contestar lo esperado.

Los ítems 6 y 7 abordan la problemática de la intervención de más de una población estadística bajo estudio en la presentación de los datos. En el 8 se presentan a partir de la población bivariada. Por los bajos porcentajes de respuestas correctas (3%, 0% y 0% respectivamente) se puede evidenciar las dificultades que esto les presenta.

Con relación a los objetos, los únicos dos ítems que cubrían el O1.2: Tabular, poder identificar a la población estadística como el conjunto de datos que se desea estudiar, con la importancia de establecer la correspondencia no sólo de sus valores sino de la repetición de los mismos, es de vital relevancia a la hora de poder trabajar el concepto de población estadística en las dimensiones de la inferencia estadística relacionándolo con las distribuciones teóricas de probabilidad, los que tuvieron 0% de respuestas correctas.

Consideraciones finales

El test realizado da cuenta de la complejidad que encierra la definición de población estadística tomada. Creemos central que esta idea fundamental de la inferencia estadística paramétrica, enseñada en las primeras clases de estadística descriptiva, sea aprendida significativamente por los estudiantes. Actualmente estamos realizando un relevamiento de su tratamiento en libros de textos de nivel universitario, donde ya estamos encontrando diferencias sustanciales que en algunos casos conllevan inconsistencias en el tratamiento de conceptos relacionados como el de distribuciones de probabilidad.

Referencias bibliográficas

Brousseau G. (1993). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. (Trad. D. Fregona). Trabajos de Matemática, Serie B, 19. Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba. (Trabajo original publicado en 1986).

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática, 12*(1), 5-38.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño*. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_2013_Ingenieria_didactica.pdf

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Meyer, R. (2005). *Funcionamiento didáctico del Saber. La inferencial estadística como metodología y la formación de formadores en educación* (Tesis Doctoral). Universidad Católica de Santa Fe, Argentina.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la asociación a partir de actividades de análisis de datos* (Tesis Doctoral). Universidad de Sevilla, España.

Generación de ideas estocásticas fundamentales a través de una propuesta didáctica mediada por simuladores

MICAELA MAZZOLA
micamazzola@gmail.com
EESO N°423 "Reynaldo Cullen"
MA. EUGENIA CAMMISI
meugeniacammisi@gmail.com
EESO N°231 "República de Nicaragua"
CINTIA HURANI
huraniailen@gmail.com
IES N°15 "Dr. Alcides Greca"

Resumen

En este trabajo se presenta y analiza una propuesta de enseñanza realizada para implementar en la Escuela Secundaria en el eje de Probabilidad y Estadística, considerando algunos contenidos indicados en los diseños curriculares de dicho nivel e integrando el uso de simuladores informáticos. Dicha propuesta se diseña en el marco de un curso sobre la problemática de la articulación entre probabilidad y estadística, dictado en la carrera de posgrado Especialización en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional del Litoral.

A través de la propuesta se pretende favorecer la construcción de significados sobre algunas ideas estocásticas fundamentales asociadas a la modelización de eventos aleatorios y realizar un análisis de las categorizaciones de razonamientos informales que puedan observarse al desarrollar actividades que integran conceptos del Análisis Exploratorio de datos y la Inferencia Estadística Informal.

Introducción

El trabajo aquí compartido tiene su origen en el curso "El problema de la articulación entre la probabilidad y la estadística" realizado en el marco del tercer Trayecto de la Especialización en Didáctica de la Matemática (UNL) en el cual se planteó como eje de análisis y discusión "El problema de la articulación en la matemática a enseñar".

Batanero, Arteaga y Contreras (2011) afirman que "las orientaciones curriculares sugieren promover el desarrollo del razonamiento estadístico, que va más allá del conocimiento matemático y de la comprensión de los conceptos y procedimientos" (p.5). En consonancia, Tauber (2016) plantea que algunas de las ideas estocásticas fundamentales tales como datos, resúmenes, distribución y probabilidad se encuentran plasmadas en los NAP en los contenidos del Ciclo Básico. En dicho documento se propone además presentar situaciones de enseñanza que promuevan el reconocimiento y uso de nociones de probabilidad para cuantificar la incertidumbre y argumentar la toma de decisiones y/o evaluar la razonabilidad de inferencias.

Por otra parte, las ideas de aleatoriedad y de variación a través de las medidas de dispersión aparecen explicitadas en los NAP (Ministerio de Educación, 2011, 2012) en los contenidos del Ciclo Orientado. No obstante, dada su importancia y complejidad deben enseñarse inicialmente de forma intuitiva, a partir del análisis gráfico y sin utilizar fórmulas asociadas a las medidas de dispersión. Particularmente, en el Diseño Curricular de la Provincia de Santa Fe para el Ciclo Orientado (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe,2014), se establece que se debe alentar a los estudiantes a realizar predicciones e inferencias a partir de los datos.

A partir de lo mencionado, se presenta una propuesta de enseñanza sobre inferencia estadística basada en un enfoque informal pensada para implementar en la Escuela Secundaria, con el propósito de propiciar la relación entre las ideas de aleatoriedad y variabilidad, muestreo y distribución, y la relación entre una distribución de frecuencias, una distribución de probabilidad y una distribución muestral (en este caso, la de proporción). Además, se apunta a relacionar un estadístico (como medida muestral), con un parámetro (como medida poblacional) y un estimador. Los conceptos de distribución muestral y de estimador son centrales para desarrollar la Inferencia Formal.

Aportes teóricos

El Diseño Curricular de la provincia de Santa Fe (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2014) plantea que la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística es esencial para brindar al estudiante un pensamiento no determinista ya que brinda herramientas necesarias para la lectura y comprensión de información que el entorno otorga, y en consecuencia, para la posterior toma de decisiones. No obstante, en la realidad áulica se presenta "una enseñanza rutinaria, que enfatiza a las fórmulas y definiciones sin prestar atención a las actividades que requieren de interpretación y al contexto de donde se tomaron los datos. Es decir se transmiten los contenidos sin un sentido estadístico". (Batanero, 2014, p.55).

El Sentido Estadístico se compone por conceptos como cultura estadística, ideas estadísticas fundamentales y razonamiento estadístico. En cuanto a la cultura estadística, Gal (2002, citado por Batanero, 2014) establece dos competencias. La primera relacionada con la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos que las personas pueden encontrar en diversos contextos. La segunda, asociada a la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

Para promover la cultura estadística es primordial el desarrollo de ideas estocásticas fundamentales, tomadas por Larios Rodríguez, Castro y Galindo (2017), planteadas originalmente por Burrill y Biehler (2011): datos, variabilidad aleatoria, representación, distribución, relaciones de asociación y de modelización entre dos variables, probabilidad y muestreo e inferencia. Asimismo, estas ideas fundamentales sirven de base para la construcción de la Inferencia Estadística, la cual corresponde a la teoría, métodos y práctica de hacer juicios acerca de una población con base en la información que proporciona una muestra aleatoria. Por lo mencionado, consideramos a la Inferencia Estadística Informal como un modo de razonar que está a medio camino entre el Análisis Exploratorio de Datos y la Inferencia Estadística Formal.

Además de la comprensión de las ideas estocásticas anteriores, realizar un uso adecuado de las mismas en la resolución de problemas estadísticos requiere del desarrollo del razonamiento estadístico entendido por Rocha (2009) como "una habilidad que le permite a los individuos realizar juicios utilizando criterios apoyados en el análisis de información estadística dentro de un contexto determinado" (p. 11). Este autor, realiza una revisión teórica que le permite arribar a dicha definición y retoma los cinco componentes básicos que según Wild y Pfannkuch (1999) definen el razonamiento estadístico: reconocer la necesidad de los datos, transnumeración, percepción de la variación, razonamiento con modelos estadísticos, integrar la estadística con el contexto. Estos componentes o modos de razonamiento son tomados para el análisis de la propuesta que se presenta en este trabajo.

Se pretende propiciar los distintos modos de razonamiento como así las ideas estocásticas fundamentales a través de simulaciones con material concreto y de simuladores informáticos. Barragués y Guisasola (2007) afirman que la simulación a través de ordenadores constituye uno de los grandes aportes de la tecnología ya que nos permiten construir modelos elementales y combinarlos para formar otros más complejos, así como también nos brinda la posibilidad de presentarla al alumno como una alternativa a los métodos analíticos para la resolución de problemas.

Asimismo, la utilización del simulador junto a la posibilidad del remuestreo posibilita el Razonamiento Inferencial Informal ya que permite a los estudiantes apreciar la variabilidad de resultados posibles en un experimento aleatorio; variabilidad en los datos recogidos; variabilidad en una variable aleatoria; variabilidad en el muestreo y en la distribución muestral.

Propuesta didáctica

La presente propuesta ha sido diseñada para implementarse en tercer año de la Escuela Secundaria Ciclo Orientado, teniendo en cuenta los contenidos explicitados en el Diseño Curricular de la provincia de Santa Fe. No obstante, como dicha propuesta está constituida por distintas tareas interrelacionadas y se va aumentando su grado de dificultad, puede ser adaptada para implementarse en años inferiores de la Educación Secundaria.

A través de la propuesta se pretende:

- Afianzar los conceptos de espacio muestral, sucesos aleatorios y probabilidad frecuencial.
- Comprender la Ley de los Grandes Números desde el concepto de distribución.
- Generar las ideas fundamentales de aleatoriedad, variabilidad, distribución y modelo.
- Generar conceptos y técnicas de la estadística inferencial desde un aspecto informal.
- Reconocer y diferenciar las características que posee una distribución de frecuencias, una distribución de probabilidad y una distribución muestral.

- Discernir entre variable estadística y variable aleatoria y, entre estadísticos, parámetros y estimadores.
- Analizar el significado del centro y de la dispersión de las distribuciones.

Se parte del contexto “Adivinar en la prueba”: María tiene una prueba de geografía. La prueba está compuesta de diez enunciados que son verdaderos o falsos. Como María no estudió para la prueba, arriesga las respuestas a todas las preguntas. Aprobará la prueba si tiene siete respuestas correctas como mínimo.

El objeto de estudio es analizar la posibilidad que tiene María de aprobar la prueba si arriesga todas las respuestas. A partir de esto se presentan las siguientes consignas de trabajo para realizar en grupos de tres o cuatro integrantes.

Tarea 1

a. María piensa que la chance que tiene de aprobar la prueba simplemente adivinando las respuestas es del 50%. ¿Estás de acuerdo con María? Si es así, explica por qué. Si no estás de acuerdo, ¿qué chances crees que tiene María de aprobar la prueba si arriesga las 10 respuestas?

b. Ale le dice a María: “Podríamos hacer un experimento para arriesgar las respuestas de la prueba de geografía lanzando una moneda y usar esto para hallar la chance que tenés de aprobar la prueba, si arriesgás las respuestas” ¿Qué quiere decir Ale?

Tarea 2

Pueden lanzar una moneda para emular el experimento de obtener una pregunta correcta al adivinar:

Las caras significan que tu respuesta es correcta.

Las cruces significan que tu respuesta es incorrecta.

a. Lancen una moneda 10 veces, una vez por cada pregunta de la prueba de geografía y anoten los resultados. Esto es como hacer una prueba. (Una prueba = 10 lanzamientos de la moneda). Anoten los 10 lanzamientos, no sólo el conteo final de las respuestas correctas.

b. Lancen la moneda otras 10 veces y anoten los resultados.

c. Repitan esto para ocho pruebas más. Anoten y resuman los resultados obtenidos considerando también las dos pruebas anteriores.

d. A partir de los datos del resumen, indiquen si mantienen o no la idea que tenían antes de comenzar con la simulación. ¿Qué es lo que piensan para mantener o no la idea inicial?

e. Si observan lo ocurrido entre todos los grupos, ¿en qué se diferencian? ¿en qué se parecen? ¿por qué les parece que esto puede suceder?

f. Considerando los datos de todos los grupos, realicen un resumen y vuelvan a contrastar su idea inicial.

Tarea 3

Para hacer más rápido las pruebas, utilicen el siguiente asistente: “Experimento de la moneda binomial”, ingresando en la siguiente página web:http://www.randomservices.org/random/apps/BinomialCoinExperiment.html

a. Destilden la opción "Mostrar probabilidad" (Show distribution) y simulen el lanzamiento de 10 monedas aumentando el número de pruebas realizadas. Analicen qué es lo que se está representando en cada eje.
b. Observando los datos obtenidos para 10 pruebas, ¿hay números de caras que aparecen más veces que otras o salen todas más o menos con la misma frecuencia?
c. Al realizar 100 lanzamientos o más, ¿se sigue manteniendo la tendencia observada para 10 lanzamientos? Analiza diferencias y similitudes.
d. ¿Qué ocurre cuando se tilda la opción "Mostrar probabilidad"?
e. ¿Se aproximan las frecuencias relativas a esta probabilidad cuando realizan 10 pruebas? ¿y cuando se realizan 100 pruebas o más?
f. Si realizaran la simulación para otras 10 pruebas más, ¿cuántas caras esperan sacar? ¿Y al realizar 100 pruebas o más? ¿Cómo lo podrían relacionar con el gráfico?
g. ¿Entre qué valores les parece que será más probable encontrar el número de caras para las 10 pruebas? ¿Y al realizar 100 pruebas o más? ¿Cómo lo podrían relacionar con el gráfico?
h. Comparen sus resultados entre todos los grupos del aula y registren las regularidades que encuentren entre los mismos.
i. ¿Podrían indicar numéricamente la chance que tiene María de aprobar la prueba si adivina todas las respuestas? ¿Mantienen o no la idea que tenían antes de comenzar con la simulación?

Tarea 4

Supongan ahora que sólo nos interesa saber la cantidad de veces que aprueba (Aprueba si tiene, al menos, siete respuestas correctas).

a. En tu grupo, observando los datos obtenidos para las 10 pruebas, ¿Cuántas de ellas aprobó? ¿Se aprobó la mayoría de las veces o no?
b. Repitan 10 veces más la prueba y registren los resultados referidos a las veces que se aprueba. ¿Se mantiene lo observado para las 10 pruebas anteriores? ¿por qué?
c. Registren los resultados obtenidos en todos los grupos y realicen un resumen que permita analizar las veces que se aprobó en todas las pruebas realizadas por los grupos. Extraer conclusiones de los resultados del curso.
d. Si realizaran 10 pruebas más, ¿Cuántas de ellas esperarían aprobar?
e. ¿Entre qué valores les parece que será más probable encontrar el número de pruebas aprobadas en 10 nuevas pruebas? ¿Por qué?
f. María asegura que las últimas 10 pruebas que realizó, cada una con 10 enunciados de verdadero/falso, las aprobó con 9 aciertos, sin haber estudiado y arriesgando en todas. ¿Será posible que sólo por el azar haya obtenido estos resultados? ¿Puede confiarse de este resultado para seguir resolviendo pruebas de este tipo? ¿Por qué?

Tarea 5

Supongamos que el profesor aumenta la cantidad de enunciados que son verdaderos o falsos de la prueba de geografía de 10 a 20. Aprueba si contesta correctamente, al menos, 14 de las 20 preguntas.

a. ¿Crees que la probabilidad de aprobar la prueba de 20 preguntas arriesgando las respues-

tas es mayor, menor o igual que la probabilidad de aprobar la prueba de 10 preguntas arriesgando las respuestas? Describe tus ideas.
b. ¿Qué crees que ocurre con la probabilidad de responder correctamente todas las preguntas de la prueba, arriesgando las respuestas, si la cantidad de preguntas se aumenta de 10 a 20?

Análisis didáctico

Objetivos de cada tarea

Tarea 1: Indagar acerca de las ideas previas e intuitivas de los alumnos sobre aleatoriedad y equiprobabilidad. Introducir la idea de simulación como simplificación de la realidad y como una manera de modelización.

Tarea 2: Contrastar las ideas previas e intuitivas de los alumnos con los datos empíricos provistos por la simulación de la situación concreta.

Tarea 3: Comparar la distribución de frecuencias con la distribución de probabilidad. Analizar las características de un modelo de probabilidad particular: el modelo binomial.

Tarea 4: Emplear de manera informal la variabilidad muestral y el significado del p-valor.

Tarea 5: Indagar acerca de la probabilidad de un evento si el número de repeticiones del experimento y la cantidad de éxitos aumentan en forma proporcional.

Análisis estadísticos que se prevén realizar

Se prevé realizar un análisis descriptivo con alcance inferencial a partir del análisis probabilístico. En relación al experimento E: lanzar una moneda diez veces y observar si sale cara o cruz, se estudia la variable estadística: número de caras en n realizaciones de los 10 lanzamientos de una moneda con n = 1, 10, 100, etc. Dicha variable es cuantitativa discreta dado que puede tomar sólo un número finito de valores: de 0 a 10. La variable aleatoria asociada: número de caras en 10 lanzamientos de una moneda, también es una variable discreta que toma valores entre 0 y 10.

Los datos son simulados, esto es, son datos que se generan a través de simulaciones con material concreto y a partir de simuladores informáticos. Para lograr la organización y resumen de estos datos, utilizamos distintos tipos de resúmenes. El simulador nos provee de los resúmenes gráfico y numérico. Respecto al primero, se utilizan barras para mostrar las frecuencias relativas. El numérico presenta las medidas más representativas del lote de datos. Relacionar ambos ayuda a la comparación e interpretación de los datos estadísticos. Además, el simulador proporciona el gráfico de la distribución de probabilidad en particular, la distribución binomial. Como medida de tendencia central y de dispersión se utilizan la media y la desviación estándar respectivamente.

Asociado al experimento E, se analiza el evento: "Salen al menos 7 caras", la variable aleatoria: número de veces que salen al menos 7 caras de un total de diez experimentos y la distribución muestral de la proporción. En particular, se analiza la distribución muestral empírica y a partir de ella, de manera informal, la estimación de parámetros y el nivel de significación.

Procesos cognitivos que propician la realización de la/s tarea/s

Modos de razonamiento estocástico (tomando como referencias Rocha, 2009):

- *Reconocer la necesidad de los datos*, lo que implica generar en los estudiantes la actitud de evitar las especulaciones subjetivas y abordar las soluciones de problemas con base en datos. Para cada tarea de esta propuesta los estudiantes necesitan realizar nuevas simulaciones (a partir de la situación concreta o del uso del simulador virtual) para generar su conjunto de datos los cuales son centrales en la búsqueda de respuestas. Es decir, se genera conciencia de la importancia del proceso de obtención de los datos y se explicita que la forma de analizarlos está íntimamente relacionada a la misma. (Behar y Grima, 2004)
- *Transnumeración*. Este tipo de razonamiento surge en la Tarea 2 -a partir del ítem c- al pasar los alumnos del conjunto de datos obtenidos de los lanzamientos de las monedas a un resumen estadístico -ya sea tabular o gráfico-, para luego realizar una descripción verbal para responder a las siguientes consignas.

En la Tarea 3, se obtiene debido a que los alumnos deben identificar la situación, comprender y analizar el simulador, para poder relacionar lo obtenido en la Tarea 2 con los nuevos datos que brinda el simulador. Para ello, deben ingresar la información al simulador, realizar los lanzamientos, identificar los datos que están siendo arrojados, leer e interpretar el gráfico de barras otorgado por el simulador, comprenderlo y realizar una descripción verbal. A partir del ítem e, se debe comparar los datos arrojados por el simulador con la información que se brinda al seleccionar la opción "Mostrar probabilidad" y por último, con las tareas 4 y 5, relacionar la gráfica y los datos de la misma con el contexto del problema. Además, en la Tarea 4 los alumnos deben pasar del conjunto de datos obtenidos por todos los grupos a un resumen estadístico, para luego realizar una descripción verbal para responder a las siguientes consignas.

Tanto en la Tarea 2 como en la Tarea 4, los estudiantes deben tomar decisiones sobre el tipo de resumen a realizar tal que sea adecuado a la situación, la frecuencia a representar o la medida que mejor refleje el fenómeno.

- *Percepción de la variación*. La comparación de los resultados obtenidos en los distintos grupos permite a los estudiantes abordar la idea de variación y de experimento aleatorio. Esto se ve potenciado por el uso del simulador ya que cada grupo puede generar un conjunto de datos distintos.

Para hacer inferencias correctas de los datos recolectados es importante comprender la variación que hay y se transmite en ellos, determinar las fuentes de variación y de incertidumbre originada por la variación cuyas fuentes no quedan explicadas (Batanero, 2014)

- *Razonamiento con modelos estadísticos*, ya que la estadística es un proceso esencialmente de modelización, aunque a diferencia de otras ramas de la matemática en ella se encuentra la presencia de la aleatoriedad. (Batanero, 2014)

Para razonar sobre los datos estadísticos y para poder encontrar tendencias en los resúmenes obtenidos, los alumnos deben comparar la distribución de frecuencias con la distribución de probabilidad a partir de variar el tamaño de la muestra. A la vez, se introducen las condiciones que verifica el modelo que se ajusta a nuestros datos.

- *Integrar la estadística con el contexto*. La estadística se basa en la modelización, es por ello que el contexto es fundamental ya que es el que nos permite establecer las características del modelo con el que trabajaremos y realizaremos interpretaciones a la luz de la realidad. (Batanero, 2014) De esta manera, este tipo de razonamiento aparece cuando se pasa de los experimentos realizados por los alumnos al planteamiento del modelo de la variable estadística, y en la interpretación del modelo en la realidad.

Ideas fundamentales que se abordan (tomando como referencias las citadas en Larios Rodríguez et al, 2017):

- *Datos:* Son generados por los mismos alumnos a través de la simulación concreta y, luego, virtual y son obtenidos bajo el objetivo de dar respuestas a los interrogantes.

- *Variabilidad aleatoria:* El uso del simulador permite realizar experimentos aleatorios, los cuales posibilitan la repetitividad en las mismas condiciones y la independencia de resultados entre dos repeticiones. Además, su uso permite "concientizar a los estudiantes sobre la variabilidad presente en el muestreo y el efecto que tiene el tamaño de la muestra en esta variabilidad" (Sánchez, Tobías y Ruiz, 2016)
- *Representación:* Se consideran diversas representaciones para resumir datos. Por un lado, se le solicita a los estudiantes que resuman los datos, sin especificar qué tipo de representación usar con el fin de que elijan el que le parezca más conveniente. En este momento, se debe debatir sobre las bondades y limitaciones de cada representación que surja.

Por otro lado, el simulador representa los datos generados a través de un gráfico de barras y de una tabla de frecuencias relativas, con su media y desviación estándar, donde los asocia a su probabilidad teórica y a su media y desviación poblacional. Asimismo, también se puede encontrar el gráfico de la distribución de probabilidad.

- *Distribución:* Cuando realizamos cada simulación y describimos los datos obtenidos en ella, utilizamos el concepto de distribución de frecuencias. Asimismo, a partir de la Tarea 3, el concepto de distribución nos permite comparar la distribución de frecuencias con la distribución de probabilidad. Cuando se realizan muestras pequeñas en el simulador se espera que aparezcan diferencias importantes entre la distribución de frecuencias relativas que obtuvo cada grupo y la distribución de probabilidad. Luego al aumentar el número de repeticiones de la simulación, la distribución tiende a estabilizarse alrededor de la probabilidad teórica, en donde para algunos grupos va a ser igual y para otros aproximada. Por último, en la Tarea 4, el concepto de distribución muestral nos permite realizar conexiones entre la Estadística Descriptiva y la Inferencial.
- *Probabilidad:* Se aborda esta idea desde un enfoque frecuencial donde se obtiene como una estimación experimental: su valor teórico es el límite de la frecuencia relativa de aparición del suceso cuando el número de veces que se repite el experimento en las mismas condiciones tiende a infinito.

También se aborda desde un enfoque subjetivo al tener que decir un resultado desde la intuición. El trabajo con simulador permite a los estudiantes inferir y comparar probabilidades para finalmente arribar a la distribución binomial.

- *Muestreo e inferencia:* Haciendo uso del simulador, al desarrollar las tareas se trabaja con muestras aleatorias diferentes y de tamaños cada vez mayor. Esto les permite a los alumnos relacionar las características de las muestras con las de la población que representan y les sirve para decidir qué datos recoger para obtener conclusiones con algún grado de probabilidad. Luego, a partir de la discriminación entre la posición central y la variabilidad en las distribuciones de datos es posible una comprensión informal de la inferencia. (Batanero, 2014) Asimismo, se presta atención a las limitaciones que el tamaño de la muestra puede tener al realizar inferencias.

Algunas consideraciones finales

Propuestas de este tipo permiten establecer conexiones entre el Análisis Exploratorio de datos y la Inferencia Estadística Formal a través del concepto de distribución. Lograr una buena comprensión de este concepto nos permite introducir informalmente algunas ideas de la inferencia estadística.

En este sentido, partimos de una situación donde los alumnos deben tomar una postura y discutirla en torno a la evidencia que proporcionan los datos. Para ello, el estudio y la caracterización de la distribución de datos les permite a los estudiantes debatir y exponer razones para defender o rechazar la postura adoptada y elaborar argumentos fundados para apoyarla o refutarla.

En particular, se introduce la idea de distribución muestral empírica. El trabajo en torno a ella permite realizar un acercamiento informal a la estadística inferencial a partir de hacer juicios o predicciones sobre la población a partir de las muestras obtenidas por la simulación, sin la necesidad de manejar ciertos conceptos y técnicas estadísticas tales como variabilidad muestral, estimación de parámetros y p-valor.

Rossman (2008, citado en Sánchez et al, 2016) propone que la inferencia se debe basar en un modelo de probabilidad específico. Así, en las actividades se involucró el uso de la variable aleatoria: número de respuestas acertadas de un total de diez, asociado al experimento del lanzamiento de una moneda diez veces, como una manera de simplificar el tratamiento de los datos y relacionar la situación con un modelo de distribución binomial ($n = 10$, $p = ½$) desde su análisis sin utilizar las expresiones de cálculo de dicha distribución.

El concepto de distribución se construye poniéndolo en relación con las ideas de variación, aleatoriedad y probabilidad. En particular, el concepto de distribución nos permite trabajar con el concepto de variación a partir de la idea de valores centrales o esperados. Para lograr la comprensión de dicha idea, se propone abordar la variación de forma intuitiva e informal a partir del análisis gráfico de las distribuciones de datos en las que interviene la aleatoriedad y no formalmente a partir de las fórmulas y los cálculos.

Por último, apoyar esta propuesta mediante el uso del simulador de una manera significativa permite ser una herramienta que propicia los distintos modos de razonamiento como así las ideas fundamentales de la estocástica.

Referencias bibliográficas

Barragués, J. y Guisasola, J. (2007) Simulación por ordenador de experimentos aleatorios en la enseñanza de la probabilidad. *Sigma, (31)*, 207-224.

Batanero, C. (2014). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria (*pp. 55-61*)*. Granada, España: SEIEM y Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana*, 2(2), 1-20. doi: 10.36397/emteia.v2i2.2151

Behar, R. y Grima, P. (2004). La estadística en la educación superior ¿Formamos pensamiento estadístico? *Ingeniería y Competitividad*, *5*(2), 84-90.

Larios Rodríguez, I., Castro, E. y Galindo, E. (2017). Consideraciones para el diseño de una propuesta didáctica para el desarrollo de ideas fundamentales estadísticas. En L. A. Serna Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30* (pp. 93-101). México, México: CLAME

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). *Diseño curricular. Educación Secundaria Orientada*. Santa Fe, Argentina.

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico. Educación Secundaria. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Consejo Federal de Educación.

Ministerio de Educación (2012). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Orientado. Educación Secundaria. Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Consejo Federal de Educación.

Rocha, P. (2009). Una educación estadística: para una sociedad que tolere la incertidumbre. *Revista Científica*, (11), 6-14.

S**ánchez, N. A., Tobías, M. G. y Ruiz, B.** (2016). Una revisión alrededor de inferencia informal. En M. A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques 3* (pp. 195-209). México, México: Lectorum.

Tauber, L. (2016). *Clase 4: Tratamiento de las Ideas Estocásticas Fundamentales en el aula de matemática*. Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística. Especialización docente de Nivel Superior en la enseñanza de la matemática en la Escuela Secundaria. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de la Nación.

Pósteres

Las razones de ser del análisis combinatorio en la formación del profesor de matemática

CRISTIAN HEINZEN
cristianheinzen@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Eeste trabajo se desarrollan observaciones respecto al estudio del análisis combinatorio fundamentadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El análisis combinatorio promueve el desarrollo de una importante habilidad en la resolución de problemas, la de contar o enumerar objetos. Este tópico está incluido en la asignatura Matemática Discreta I del plan de estudios del Profesorado en Matemática de FHUC.

La búsqueda de cuestiones o preguntas fecundas debe pensarse a partir del estudio en profundidad del contenido matemático que se desea estudiar, en nuestro caso, los temas de combinatoria. Los problemas de recuento simple combinatorio se caracterizan porque es posible obtener directamente un método de recuento, una vez identificada la categoría en la cual el problema puede clasificarse adecuadamente. A esta clasificación se la denomina esquemas combinatorios.

Para abordar estos esquemas en la formación del profesor de matemática, se proponen dos cuestiones generatrices, la primera correspondiente a un esquema de selección y la segunda a uno de distribución.

Introducción

En este trabajo[1] nos proponemos desarrollar algunas reflexiones, fundadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en torno al estudio del análisis combinatorio en la formación de profesores de matemática.

Este tópico está incluido en la asignatura Matemática Discreta I del plan de estudios del Profesorado en Matemática de FHUC (UNL), que incluye además nociones correspondientes a la teoría elemental de números. Ambos tópicos:

> pueden ser explorados por el futuro profesor de matemática a partir de las actividades propias del quehacer matemático, como, por ejemplo: resolver problemas, enunciar conjeturas y contrastarlas, formular modelos, producir propiedades y establecer las condiciones de validez de las mismas. (Scaglia y Götte, 2018)

El análisis combinatorio "promueve el desarrollo de una importante habilidad en la resolución de problemas, la de contar o enumerar objetos. Permite dar respuesta a la pregunta: ¿Cuántas/os hay/son?" (Scaglia y Götte, 2018). Algunos contenidos de este tópico que se trabajan en la materia están incluidos en el Diseño Curricular jurisdiccional (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 2014). En este documento curricular se le da un papel central a la resolución de problemas y se entiende la actividad matemática como una actividad de modelización que involucra el reconocimiento y recorte de situaciones problemáticas correspondientes a distintos contextos (cotidianos, de las ciencias sociales y naturales, y de la propia matemática) con el fin de utilizar los conocimientos matemáticos para el abordaje de las mismas.

En sintonía con estas recomendaciones, nos proponemos reflexionar acerca del modo de abordar el estudio del análisis combinatorio con futuros profesores de matemática, a partir de la interpretación del trabajo matemático como una actividad de modelización.

Marco teórico

En el marco de la TAD, Chevallard (2013) plantea que la enseñanza tradicional de la matemática se desarrolla en términos de un paradigma que denomina *la visita*

---

1 Trabajo realizado en el marco de la adscripción en investigación "Las razones de ser del análisis combinatorio en la formación del profesor de matemática" dirigida por Sara Scaglia desarrollada en el marco del proyecto CAI+D 2016 "La construcción del sentido en el aula de matemática desde distintas perspectivas teóricas"

de monumentos. Según este autor, en este paradigma “el conocimiento viene organizado en trozos y pedazos santificados por la tradición.” (p. 165) y “rara vez se percibe el poco conocimiento que permanece después de los años de escuela como algo que podría ser útil fuera de la escuela” (p. 166). Esta organización de las propuestas curriculares deja fuera las cuestiones que dieron origen a los distintos contenidos matemáticos que se trabajan. No se buscan las respuestas a preguntas como: “¿Por qué aparece esto aquí?, ¿cuál es su utilidad?” (p. 164) lo cual impide dotar de sentido a los contenidos trabajados. En el marco de esta interpretación, la TAD propone una explicación a dos de los problemas más acuciantes de la matemática escolar: la desarticulación del currículo y la pérdida de sentido del trabajo que se realiza en el aula de matemática.

En contraposición al paradigma de la visita de monumentos, el autor propone el paradigma del *cuestionamiento del mundo*, el cual “no está condenado a cortar todo contacto con su predecesor.” (Chevallard, 2013, p. 167). Entre sus características menciona la necesidad de que se adopte una “actitud receptiva hacia el planteamiento de preguntas sin respuesta y de problemas sin resolver” (p. 168). El currículo se organiza en torno a cuestiones (preguntas) y el trabajo matemático en el aula debería desarrollarse a partir de la búsqueda de respuestas a las mismas. Cuanto más fecundas son las cuestiones o preguntas, mayor es la posibilidad de articulación de contenidos que promueven. Además, las nociones matemáticas se cargan de sentido, dado que se estudian con el fin de dar respuesta a ciertas cuestiones.

La búsqueda de cuestiones o preguntas fecundas debe pensarse a partir del estudio en profundidad del contenido matemático que se desea estudiar, en nuestro caso, los temas de combinatoria que forman parte del plan de estudios de las asignaturas del Profesorado en matemática. Las preguntas que se pueden hacer, con respecto a este saber matemático son: ¿cómo se interpreta el análisis combinatorio en el sistema de enseñanza?, ¿por qué es posible encontrar en ese sistema unos objetos matemáticos y no otros?, ¿qué papel desempeñan estas nociones en las distintas actividades (matemáticas y no-matemáticas) que deben aprender los alumnos? Bosch y Gascón (2007) afirman que es necesario conocer:

- la manera cómo se les ha hecho “entrar” en estas actividades guiados por los profesores (o por la “institución enseñante”).
- por qué este saber forma parte del saber a enseñar en la institución
- en qué contextos y problemáticas se lo inscribe inicialmente y el porqué de esta inscripción.

En la TAD se postula que no existe un sistema de referencia privilegiado a partir del cual observar, analizar y juzgar el mundo de los saberes. Esta ausencia de un sistema de referencia absoluto hace imprescindible la utilización de sistemas de referencia relativos adecuados a cada problema y a cada situación (Barquero Farras, Bosch y Gascón, 2013). Nos situamos en el estudio de la combinatoria en la formación inicial de profesores de matemática y nos proponemos abordar la problemática de la construcción del sentido y de la articulación de contenidos en esta área de la matemática. Se trata, entonces, de desarrollar un modelo epistemológico de referencia (MER) específico para esta situación, desde donde pensar las preguntas fecundas que darán origen al estudio de estas nociones en la institución que se ocupa de formar a profesores de matemática para los niveles medio y superior.

En el marco de las consideraciones anteriores, se trata de realizar un estudio que permita identificar una cuestión fecunda, dotada de un importante poder generador, que dé lugar a una "arborescencia de respuestas provisionales y de nuevas cuestiones [..] que delimiten el mapa de posibles recorridos" (Barquero Farras et al., 2013, p.23) para el estudio del análisis combinatorio.

En el marco de la TAD, este objetivo se plantea en términos del planteamiento de un recorrido de estudio e investigación (REI). Este se entiende como un dispositivo didáctico que tiene el potencial de generar procesos funcionales, posicionando las preguntas como punto de partida de los procesos de estudio. Cuando se alude a preguntas (o cuestiones) se lo hace en un sentido fuerte: su respuesta no representa una simple búsqueda de información, sino que se torna necesario construir o reconstruir un conjunto de conocimientos matemáticos y múltiples relaciones entre éstos (Barquero Farras et al. 2013). Ello supone la utilización de conceptos matemáticos en la resolución de tareas mediante el uso de técnicas que deben estar justificadas en entornos tecnológicos.

Un REI permite recuperar la relación entre cuestiones y respuestas. Las cuestiones van "antes" que las respuestas y se toman en serio, porque generan y dan sentido al proceso de estudio. Las respuestas vienen "después", no se conocen de antemano, son provisionales y generan nuevas cuestiones (Barquero Farras et al., 2013).

Marco metodológico

El estudio a llevar a cabo se encuadra en las dos primeras fases de una ingeniería didáctica (Artigue, 1995). Ésta se define como un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, que implican la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La ingeniería didáctica consta de cuatro fases, a saber:

1. Análisis preliminar
2. Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas incluidas.
3. Experimentación
4. Análisis *a posteriori* y evaluación

La primera fase de la ingeniería incluye el análisis epistemológico del contenido matemático involucrado (los problemas de recuento simple combinatorio). Se trata de estudiar la necesidad de su inclusión en el plan de estudios del Profesorado en Matemática de la UNL y las condiciones y restricciones que podrían afectar su estudio en dicha institución. "Esta fase es crucial ya que implica la construcción de un modelo epistemológico de referencia del saber en cuestión, así como la identificación de fenómenos didácticos hipotéticos" (García, Barquero, Florensa y Bosch, 2019, p. 81).

En la segunda fase, de diseño y análisis a priori, se distingue una dimensión de análisis matemático, de caracterización de los objetos matemáticos y de la actividad que se realizara en torno a ellos en estrecha relación con el MER construido. También se incluye una dimensión de análisis didáctico, sobre cómo hacer emerger y sostener la actividad pretendida en el aula, a través del estudio de una o varias cuestiones problemáticas y del proceso de indagación a las que estas dan lugar (García, Barquero, Florensa y Bosch, 2019, p. 81).

Cuestiones generatrices para el análisis combinatorio

A continuación, presentamos una descripción de algunas nociones matemáticas que están incluidas en el programa de la asignatura Matemática Discreta I. El objeto de la misma es proponer una primera aproximación al modo en que las mismas se interpretan al interior de la disciplina, con el fin de diseñar un MER de referencia para pensar su estudio en la formación inicial de profesores de matemática.

Según Bouvier y George (1994), la combinatoria tiene por objeto:

1) ilustrar las propiedades intrínsecas de las configuraciones que tienen propiedades dadas (números poligonales, por ejemplo);

2) demostrar la existencia o la no-existencia de las configuraciones que tienen propiedades dadas (problemas de los siete puentes de Königsberg, problema de los 38 oficiales de Euler, construcciones de cuadrados mágicos…);
3) calcular el número de las configuraciones. Este objeto define el análisis combinatorio propiamente dicho; Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico
4) enumerar estas configuraciones y a clasificarlas, llegado el caso;
5) eventualmente, a descomponerlas en subconfiguraciones. (p. 155)

El análisis combinatorio, por su parte, es identificado por estos autores como los "problemas de recuento y enumeración de situaciones (configuraciones)" (p. 155)

Los problemas de recuento simple combinatorio se caracterizan porque es posible obtener directamente un método de recuento, una vez identificada la categoría en la cual el problema puede clasificarse adecuadamente. Dubois (1984, citado en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994) propone cuatro modelizaciones diferentes:

- Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.
- Colocación de objetos en casillas (cajas, celdas, urnas).
- Partición en subconjuntos de un conjunto de objetos.
- Descomposición de un número natural en sumandos.

"El primer tipo de problemas que dio origen a las nociones combinatorias más primitivas es el de selección o muestreo de objetos de un conjunto dado, que tiene gran importancia en Estadística." (Batanero et al., 1994, p. 31). Los problemas que se modelizan de esta manera están conformados por un conjunto de *n* objetos distintos de los cuales se seleccionan *r* objetos, se debe tener en cuenta dos condiciones: orden y repetición. De esta manera podemos distinguir 4 tipos de selección con/sin repetición y ordenada/no ordenada.

Respecto del segundo tipo de modelización "según se considere que el orden de los objetos dentro de las cajas debe o no tenerse en cuenta y que las cajas y los objetos sean iguales o diferentes se pueden obtener seis tipos básicos de colocaciones." (Batanero et al., 1994, p. 34).

A continuación, describiremos dos "esquemas combinatorios" (EC) básicos que corresponden a dos tipos de situaciones prácticas y los sub-esquemas identificables en los mismos, según diferentes condiciones:

Esquema de selección

Se trata de situaciones en las que es necesario “seleccionar muestras de un tamaño r a partir de un conjunto de n objetos”. Cada configuración combinatoria será una muestra de elementos tomados de dicho conjunto inicial.

Una cuestión generatriz que se puede proponer para promover el estudio de estos tipos de selección es la siguiente:

Se tienen n objetos disponibles. Se debe realizar una selección de tamaño r de estos objetos. A) ¿Qué situaciones podrían presentarse respecto de las características de los objetos y de la selección (asumiendo que es posible que $r<n$, $r=n$ o $r>n$)? B) Buscar fórmulas matemáticas que permitan realizar el cálculo del número de formas en que se puede realizar la selección en las distintas situaciones consideradas.

En la Figura 1 se incluye un posible esquema que resume las posibles situaciones.

¿Interesa el orden?	¿Se pueden seleccionar objetos repetidos?	Denominación	Fórmula
SI	NO	VARIACIÓN O PERMUTACIÓN SIN REPETICIÓN	$\frac{n!}{(n-r)!}$
	SI	VARIACIÓN O PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN	n^r
NO	NO	COMBINACIÓN SIN REPETICIÓN	$\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$
	SI	COMBINACIÓN CON REPETICIÓN	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

Figura 1. Esquema de selección

Esquema de distribución

Se presenta en situaciones en las que es necesario “colocar r objetos dentro de n cajas o recipientes”, o bien “distribuir un conjunto de r objetos en otro conjunto de n objetos”. La configuración combinatoria cuyo recuento interesa son las diferentes disposiciones de tales objetos en los recipientes o las diversas distribuciones que se establecen entre los dos conjuntos.

Según se considere que las cajas y los objetos sean iguales o diferentes se obtienen cuatro tipos básicos de sub-esquemas de colocación o distribución. A partir de cada uno de los cuatro tipos básicos se obtienen nuevos subtipos al tener en cuenta las siguientes condiciones:

1. Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja ($r \leq n$).
2. Colocaciones sobreyectivas: con al menos un objeto por caja ($r \geq n$).
3. Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía.

Resultan, por tanto, los sub-esquemas de colocaciones simples como se resume en la Figura 2. La cuestión generatriz que se propone para arribar al esquema de distribución es la siguiente:

> Se tienen que distribuir r objetos en n recipientes.
>
> A) ¿Qué situaciones podrían presentarse respecto a las características de los objetos y recipientes y respecto al modo de distribución?
>
> B) Buscar fórmulas matemáticas que permitan realizar el cálculo del número de formas en que se puede realizar la distribución en las distintas situaciones consideradas.

En la Figura 2 se presenta un esquema que se puede construir. La última columna no incluye todas las fórmulas posibles, sino solo las que se trabajan en la asignatura.

PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN (r objetos a distribuir en n recipientes)

OBJETOS	RECIPIENTES	REC VACÍOS	FORMULA	RELACIÓN ENTRE r Y n
IGUALES	IGUALES	SÍ		
		NO		
	DISTINTOS	SÍ	$\binom{n+r-1}{r}$	r, n $\in$ N
			A lo sumo, un objeto en cada recipiente $\binom{n}{r}$	r $\leq$ n
		NO	$\binom{n+(r-n)-1}{r-n}$	r $\geq$ n
DISTINTOS	IGUALES	SÍ	S(r, 1)+S(r, 2)+ …+S(r, n)	r, n $\in$ N
		NO	$S(r,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^r$	r $\geq$ n
	DISTINTOS	SÍ	n^r	r, n $\in$ N
			A lo sumo, un objeto en cada recipiente $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1))=\frac{n!}{(n-r)!}$	r $\leq$ n
		NO	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^r$	r $\geq$ n

Figura 2. Esquema de distribución

Reflexiones finales

En el presente trabajo se reflexiona sobre la enseñanza del análisis combinatorio en la formación del profesor de matemática con la intención de abordar los problemas de la desarticulación del currículo y de la pérdida del sentido. Se trata de que el estudio del tema se proponga a partir de la búsqueda de respuestas a preguntas tales como: ¿Por qué aparece esto aquí?,¿cuál es su utilidad?

Abordamos esta problemática desde la TAD, que propone que el currículo se organice en torno a cuestiones y que el trabajo matemático en el aula se desarrolle a partir de la búsqueda de respuestas a las mismas. Además, las nociones matemáticas se cargan de sentido, dado que se estudian con el fin de dar respuesta a estas cuestiones.

Cuando se alude a preguntas se lo hace en un sentido fuerte: su respuesta no representa una simple búsqueda de información, sino que se torna necesario construir o reconstruir un conjunto de conocimientos matemáticos y múltiples relaciones entre éstos.

A partir de lo mencionado, reflexionamos sobre un modo de abordar tópicos del análisis combinatorio con futuros profesores de matemática, a partir de la propuesta de cuestiones generatrices que despierten la intriga de los estudiantes y rompan con el paradigma de la visita a los monumentos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp.33-59). México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barquero Farras, Bosch, M. y Gascón. J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(1), 1-28.

Batanero, M.C., Godino, J.D., Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Bosch, M. y Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, F. J. García (Coords.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bouvier, A. y George, M. (1995). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid, España: Akal.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT*, *2*(2), 161-182.

García, F.J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (15), 75-94.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). *Diseño curricular. Educación secundaria orientada*. Santa Fe, Argentina. Recuperado de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf

Scaglia, S. y Götte, M. (2018). *Programa Matemática Discreta I del profesorado en Matemática*. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de http://www.fhuc.unl.edu.ar/programas/programas_imprimir.php?nId_Programa_Materia=1796&nId_Lectivo=21

La vinculación de futuros profesores de matemática con recursos tecnológicos en el estudio de conceptos matemáticos

TAMARA NAIR SOLA

tamarasola36@gmail.com

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Se presentan avances de un estudio en el marco de una investigación en la que se pretende indagar acerca del uso que estudiantes de profesorado de matemática hacen de videotutoriales y aplicaciones en dispositivos móviles para el aprendizaje de la matemática. La investigación es cualitativa y el método de recolección de datos es un cuestionario que se aplica a alumnos de profesorados de matemática con el objetivo de identificar cómo utilizan los videotutoriales y aplicaciones para el estudio de los conceptos matemáticos y conocer sus valoraciones acerca de estos recursos. Se puede establecer que los videotutoriales se utilizan preferentemente ante consignas de resolver ejercicios, eligiendo los que son más procedimentales y de corta duración y, que la característica destacada por los estudiantes por lo que los eligen es que permiten volver a escuchar la misma explicación varias veces y de la misma forma. Respecto a las aplicaciones son utilizadas principalmente para calcular, graficar funciones, establecer conjeturas y realizar verificaciones.

Introducción

Se presentan avances de un estudio[1] en el marco de una investigación en la que se pretende indagar cómo las tecnologías digitales intervienen en la construcción del conocimiento matemático por parte de estudiantes de profesorados. Puesto que las tecnologías digitales tienen su mayor auge en esta época y se han extendido hasta el ámbito educativo, interpela el uso que estudiantes de profesorado de matemática hacen de videotutoriales y aplicaciones en dispositivos móviles para el aprendizaje de la matemática. La investigación es cualitativa y el método de recolección de datos es un cuestionario que se aplica a alumnos de profesorados de matemática con el objetivo de identificar cómo utilizan los videotutoriales y aplicaciones para el estudio de los conceptos matemáticos y conocer sus valoraciones acerca de estos recursos.

Encuadre conceptual

Las tecnologías digitales disponibles, particularmente las aplicaciones para dispositivos móviles y los videotutoriales, intervienen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. El término: “móvil learning” es considerado por Moreno Guerrero (2011) como un conjunto de prácticas de enseñanza y de aprendizaje que son posibles mediante el uso de dispositivos móviles con conexión inalámbrica, lo que permite que se lleve a cabo en cualquier lugar y momento. Particularmente, en el caso de las aplicaciones en dispositivos móviles permiten la resolución de problemas específicos a partir de nuevas herramientas. Además, en lo que refiere a los videotutoriales, éstos son una pieza de material didáctico creada como objeto de aprendizaje de contenido audiovisual, que permite realizar consultas sobre dudas y seguir paso a paso la solución de un problema, haciendo al estudiante el actor principal. (Saucedo Fernández, Herrera Sánchez, Recio Urdaneta, 2013; Bengochea y Medina, 2013).

Encuadre metodológico

Tipo de investigación

Respecto a la metodología, la investigación es del tipo cualitativo, razón por la que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes

1 Dicho estudio forma parte de una Adscripción en Investigación dentro de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, aprobada en el mes de septiembre de 2018, bajo la dirección de Götte, Marcela Evangelina y la codirección de Freyre, Magali.

que datos numéricos (McKnight, Magid, Murphy y McKnigt, 2000), siendo "su propósito 'reconstruir' la realidad, tal como la observan los actores de un sistema social definido previamente" (Sampieri, 2014, p. 9).

Sujetos de estudio

Se considera como unidad de estudio una muestra por conveniencia de alumnos de Profesorado de Matemática de la Provincia de Santa Fe de tres instituciones: la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, la Escuela Normal N° 32 y el Instituto Superior de Profesorado N° 6 siendo las dos primeras de la ciudad de Santa Fe y la última mencionada de la ciudad de Coronda.

Método de recolección de datos

El principal método de recolección de datos utilizado en este estudio es el cuestionario. Se propicia estimular la expresión de palabras propias a partir de algunas preguntas abiertas. A partir de este instrumento de recolección de datos se pretende identificar qué tipo de recursos digitales prefieren los estudiantes de profesorado de matemática y determinar cómo utilizan dichos sujetos los videotutoriales y las aplicaciones. Esto permite además identificar valoraciones acerca de estos recursos que los mismos estudiantes emplean para el estudio de conceptos matemáticos.

De las instituciones mencionadas se obtienen 127 cuestionarios respondidos en total, de los cuales 44 corresponden a la Facultad de Humanidades y Ciencias, 51 a la Escuela Normal y 32 al Instituto Superior de Profesorado.

El cuestionario consta de 19 preguntas y se divide en dos partes: la primera parte remite al uso de videotutoriales y la segunda a las aplicaciones.

Las preguntas están agrupadas por distintos formatos debido a la naturaleza de cada una. Algunas preguntas son abiertas y otras piden opinión a los estudiantes a partir de opciones.

En ambas partes primero se pregunta si usan o no este tipo de recursos para poder continuar con las preguntas siguientes. Por esta razón, a aquellos que contestan que no utilizan videos de internet para estudiar se les pide que se dirijan directamente a la pregunta 16, ya que si no recurren a videos no pueden responder el resto de las preguntas.

Dentro de las preguntas realizadas para los videotutoriales, primero se decide preguntar sobre las circunstancias al momento del uso de los videos y su frecuencia, puesto que se considera importante definir bajo qué situaciones cada alumno decide utilizar estos recursos. Se pregunta también sobre la utilidad que tuvieron los videos utilizados (preguntas 4, 5 y 6). Dentro de la pregunta 4 se considera un cierto aspecto de la utilidad, donde se pregunta ¿Cuánto te han servido los videos que usaste? En estas últimas preguntas interesa el tipo y propósito de uso cuando buscan definiciones o ejemplos, lo que sugiere una utilización puntual o más dirigida a aclarar dudas.

En las preguntas 7, 8 y 9 se indaga sobre las preferencias respecto a cómo buscar los videos, los sitios consultados y acerca de recomendaciones de los mismos. En la misma dirección encontramos las preguntas 12, 13, 14 y 15, donde se pide una cierta opinión sobre los videos utilizados, el gusto o disgusto de las producciones consultadas, permitiendo así determinar: ventajas, aspectos que gustan o no de los videos y qué características les faltan a estos según los sujetos.

Por otro lado, se encuentra la pregunta 10 que hace referencia a la eficiencia y eficacia de algunos de éstos y la búsqueda de una segunda opción, que habla de una apropiación del recurso y se propone en la pregunta 11.

Luego se encuentran las preguntas que refieren al uso de las aplicaciones. Primero se pregunta sobre qué aplicaciones prefieren para estudiar matemática. Luego, la pregunta 18 refiere a los dispositivos donde se utilizan estas aplicaciones. Por último, se pregunta sobre los fines de su uso para observar la relación entre estas aplicaciones y el estudio de los conceptos matemáticos.

Resultados

Dentro de los primeros avances del análisis que se realiza con la información recogida, se puede establecer que los videotutoriales se utilizan preferentemente ante consignas de resolver ejercicios, eligiendo los que son más procedimentales y de corta duración. La característica destacada por los estudiantes por la que los eligen es que permiten volver a escuchar la misma explicación varias veces y de la misma forma. Respecto a las aplicaciones son utilizadas principalmente para calcular, graficar funciones, establecer conjeturas y realizar verificaciones.

Referencias bibliográficas

Bengochea, L. y Medina, J. (2013). El papel de los videotutoriales accesibles en el aprendizaje del futuro. En M. Córdova y L. Bengochea Martínez (Eds.), *V Congreso Internacional sobre Aplicación de Tecnologías de la Información y Comunicaciones Avanzadas ATICA* (pp. 80-87). Huancayo, Perú: Universidad Continental y Universidad de Alcalá.

McKnight, C. Magid, A., Murphy, T. y McKnight, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island, EEUU.: American Mathematical Society.

Moreno Guerrero, A. (2011). Movil learning. *Revista del Observatorio Tecnológico*, (3), 1-25. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/fr/cajon-de-sastre/38-cajon-de-sastre/1026-movil-learning

Sampieri, R., Collado C., Baptista Lucio M. (2014). *Metodología de la investigación*. (Sexta Edición). México, México: Mcgraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. DE C.V.

Saucedo Fernández, M., Díaz Perera, J., Herrera Sánchez, S. y Recio Urdaneta, C. (2013). El video tutorial como alternativa didáctica en el Área de Matemáticas. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 1991-1999). México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cursos y talleres

Big data: cálculo matricial al poder

LILIANA FORZANI
liliana.forzani@gmail.com
Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral y CONICET
BERARDINO SANTIROCCO
berardino.santirocco@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
OSCAR VALLEJOS
oscarrvallejos@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Este curso está inspirado por dos coordenadas:

1. El estudio histórico del Álgebra y en particular el origen y estructura de uno de sus objetos: las matrices, como base para una revalorización del tema en la didáctica de dicho contenido en la enseñanza de nivel superior así como la discusión de su posible incorporación en la enseñanza en la educación media.
2. Mostrar la importancia creciente que tienen los problemas modelados con matrices, en particular aquellos vinculados con el tratamiento de datos. La disponibilidad tecnológica de grandes bases de datos y capacidad de su manipulación permiten focalizar tendencias e intereses (¿cómo sabe Netflix que películas me gustan? ¿qué publicidades me personalizan en las redes sociales?)

El curso se iniciará con una reconstrucción histórica del Álgebra y la constitución de las matrices como un objeto específico que junto con la definición de operaciones adecuadas sobre ellas constituyen su estructura. Luego, con la movilización de los conocimientos necesarios, se presentarán ejemplos destacados que permitirán reconocer el protagonismo del uso de las matrices en el momento presente.

Fundamentación teórica

Si pretendemos estar informados en estos días es inevitable toparse con expresiones como *big data*, *aprendizaje automático*, *inteligencia artificial*, *aprendizaje profundo*, r*edes neuronales*.

De alguna manera todas estas prácticas refieren a datos y datos nos refieren a estadística, a matemática. Hace no muchos años esas expresiones ni siquiera estaban en el léxico y escuchando expertos nos damos cuenta de que el tema es pretenciosamente confuso y casi inabordable. Sin embargo, nos suena a matemática y todo ese mundo sofisticado vive en el mundo de las computadoras pero tiene cercano algo muy familiar: el álgebra de matrices. Por eso es que podríamos llamar al álgebra de matrices o al álgebra lineal, matemática de los datos.

Las matrices son parte de la formación en matemáticas superiores (Grattan-Guinnes y Ledermann, 1994) y de profesores y no están incorporadas a los currícula de la educación media o secundaria. Sin embargo, con la revitalización que las matrices y el álgebra lineal tuvieron con el big data quizás sea tiempo de trabajar con más dedicación en una transposición didáctica que pueda hacer de este saber matemático un saber enseñado en la escuela secundaria. Esta trasposición requiere reconocer que las matrices son un saber a enseñar en la escuela secundaria o media, que este reconocimiento sea acompañado por creaciones didácticas a partir de las necesidades producidas por su enseñanza y producir transformaciones adaptativas que permitirán que las matrices ocupen un lugar entre los objetos de enseñanza. (Chevallard, 2013)

Consideraciones históricas sobre la consolidación del Álgebra, las Matrices como objeto y operaciones sobre matrices, su estructura

Los últimos años se produjo, con la consolidación de la historia de la matemática como disciplina académica (Grattan-Guinness, 1980) y de las corrientes de didáctica de la matemática que consideran que el desarrollo de las estructuras históricas de la matemática es fundamental para el diseño de las actividades de enseñanza o de los procesos de comprensión (Piaget y García, 1982; Clark et alt. 2018), un acercamiento cada vez más intenso de las relaciones entre historia y educación matemática.

La indagación histórica acerca de cómo se produce el conocimiento matemático permitió considerar que el desarrollo del conocimiento no se realiza por la agrega-ción continua de nuevos conocimientos (y el abandono de conceptos e hipótesis que se mostraron infructuosos o falsos), sino por etapas que producen una reorganización de los conocimientos de la etapa anterior. El caso del Álgebra y de las matrices merece una particular atención ya que no hay una unanimidad de criterios entre los historiadores respecto de su constitución y desarrollo. Como plantean Piaget y García (1982), no pocos historiadores de la matemática hacen remontar los orígenes del Álgebra a diversos pueblos de la antigüedad: asirios, babilonios, egipcios. Otros con un sentido más crítico, ponen el punto de partida en la escuela de Alejandría. Diofanto es la figura aceptada generalmente como formulador de los problemas de la aritmética en términos simbólicos; esto es, como quien introdujo las *variables* representadas por letras para expresar las cantidades específicas que aparecen como incógnitas en las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas. Esta interpretación puede considerarse insatisfactoria si tenemos en cuenta las dificultades que tuvieron los griegos para resolver ciertos problemas.

Siguiendo con esta interpretación histórica, François Viète (1540-1603) aparece como un renacentista que *vuelve a los griegos* y que retoma la ciencia de Diofanto para simplemente perfeccionarla cimentando el punto de partida del Álgebra de la época moderna, la obra de Viète sería la de un erudito y de un sistematizador, más que la de un creador y un revolucionario científico. El historiador Jacob Klein (*Greek mathematical thought and the origin of algebra*, 1968) ofrece una reinterpretación de las obras de Diofanto y Viète sobre la base de un análisis del pensamiento griego y del significado de la nueva *ciencia* que se desarrolla en los siglos XVI y XVII. El eje de la distinción entre Diofanto y Viète es la diferenciación en el uso de los símbolos matemáticos. Los signos y abreviaturas que utiliza Diofanto (como también Euclides y otros) la letra reemplaza al número pero solamente allí donde el número se supone está situado, no simboliza su valor ni se presta a operaciones.

El uso de las letras comenzó a tener un carácter simbólico a partir del s.XVI (*símbolo en el sentido que tiene cuando lo que es significado por el símbolo es, en sí mismo, un objeto general*) En contraste con esto, la matemática moderna, y por consiguiente también la interpretación moderna de la matemática antigua, dirige su atención al método como tal. Los objetos quedan así determinados por una reflexión acerca de la forma en la cual estos objetos se tornan accesibles a través de un método general. Es en el trabajo del matemático francés Viète (considerándose en esta interpretación el verdadero fundador del Álgebra) el que mostró la primera concepción consistente, coherente y sistemática de una ecuación algebraica en el sentido moderno. Una de las principales innovaciones de Viète en su ”In artem analyticam isagoge” (1591; ”Introducción al arte analítico ”) fue el uso de símbolos bien elegidos de un tipo (vocales) para incógnitas y de otro tipo (consonantes) para dígitos conocidos. Esto no afecta sólo la flexibilidad y la generalidad en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, sino también algo ausente del trabajo de todos sus predecesores. Viète vio su contribución como el desarrollo de una *forma sistemática de pensamiento* que conduce a soluciones generales, en lugar de simplemente una *bolsa de trucos* para resolver problemas específicos.

Así entendido el surgimiento del Álgebra y haciendo una elipsis de varios siglos permite enfocarse en el problema de resolución de un sistema de ecuaciones y el concepto de determinante. En un dado Sistema de n Ecuaciones lineales con n incógnitas, su determinante se definió como el resultado m de una cierta combinación de multiplicación y adición de los coeficientes de las ecuaciones que permitieron calcular directamente los valores de las incógnitas. Estrechamente relacionado con el concepto de determinante estaba la idea de una matriz como una disposición de números en filas y columnas. Este es uno de los espacios que permite entender la emergencia del concepto de Matriz.

La controversia entre los historiadores es cómo considerar el trabajo matemático de Cayley, Sylvester, Frobenius y Cauchy entre otros en la constitución de las matrices como un objeto matemático autónomo que puede ser objeto de un álgebra. El trabajo de 1858 de Arthur Cayley "A Memoir on the Theory of Matrices" es el texto objeto de controversia en relación al nacimiento formal de las matrices en cuanto no sólo a su definición como objeto (que ya tenía muchos antecedentes) sino a su presentación ordenada y formal de las operaciones definidas sobre ellas y sus propiedades (la estructura de esos nuevos objetos).

Como plantean Grattan-Guinness y Ledermann (1994), la historia de las matrices fue descuidada y tergiversada a pesar de su importancia. Hawkins (2008) vuelve a plantear el debate sobre cómo se constituye la teoría de las matrices y cuáles son los autores que la formulan. En ese contexto plantea la centralidad de la figura de Frobenius sobre la base de un criterio teórico: "Después de sus exploraciones iniciales de la idea del álgebra simbólica, ni Cayley ni Laguerre encontraron ningún uso significativo para el álgebra matricial en su trabajo posterior. Lo mismo no es cierto para Frobenius." (Hawkins, 2008: 24).

Esta es la pista que utilizaremos para el tratamiento del tema: reconstruir la constitución de las matrices como un objeto matemático específico y su incorporación al tratamiento de los problemas teóricos de las diferentes áreas de la matemática. Esta pista nos llevará desde el siglo XIX, pasando por la constitución en el siglo XX como objeto de la formación en la enseñanza de las matemáticas superiores (Castro Gonçalvez, 2018) y la conformación del cálculo matricial.

Objetivos del curso

- Generar un espacio de debate y reflexión en torno de las relaciones entre historia y educación matemática
- Ofrecer una reconstrucción histórica de la teoría de las matrices y de su incorporación en los currícula de educación superior.
- Discutir los vínculos entre los curricula de educación superior y educación media/secundaria en relación con las teorías de las matrices
- Presentar los conceptos fundamentales de matrices asociados a algunos ejemplos que podrían motivar o permitir un acercamiento a la revitalización del uso de las matrices para resolver problemas interesantes
- Organizar un espacio para "enamorarse" del concepto de matriz, las operaciones sobre ellas y su incorporación en la solución de problemas del presente.

Listado de temas o contenidos a trabajar

El material de matrices que se recomienda repasar previamente al curso se puede encontrar en este link:
https://www.dropbox.com/s/6fz35kmcrwfup89/resumen-matrices.pdf?dl=0

Guión temático

1. Movilizando los conocimientos previos de quienes participan del curso: definiciones, notaciones, operaciones/álgebra.
2. Reconstrucción de la constitución de las matrices como objetos matemáticos diferenciados: hipótesis históricas y principales autores.
3. Incorporación de las matrices en la educación superior. De un enclave disciplinar: álgebra linear al cálculo.
4. El resurgimiento de las matrices: el álgebra lineal ha aumentado en importancia. ¿Es importante para la educación secundaria?
5. Otros conceptos de matrices: Rango de matrices. Introducción a la idea de factorización de matrices.

6. Factorización de matrices. ¿Para qué en big data? Descomposición en valores singulares: que nos dice de la matriz, como se usa para transmitir una foto.

7. Descomposición en producto de matrices más pequeñas: base de sistema de recomendación. Fue la idea detrás de los que ganaron el desafío Netflix en el año 2009

8. Multiplicación aleatoria de matrices. Cuatro formas diferentes de pensar la multiplicación de matrices. Cómo hacer menos operaciones y conseguir una matriz aproximada. ¿Cuán buena es esa aproximación?

Referencias bibliográficas

Bernardes, A. y Roque, T. (2018). History of Matrices. Commognitive Conflicts and Reflections on Metadiscursive Rules. En K. Clark, T. Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History Towards a Harmonious Partnership* (pp. 209-227). Cham, Switzerland: Springer.

Castro Gonçalves, R. J. (2018). *A investigação em didática da álgebra linear: uma perspetiva do seu contributo para o ensino por meio da reflexão sobre a prática.* (Tesis doctoral). Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal.

Chevallard, Y. (2013). *La transposición didáctica.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.

Clark, K., Kjeldsen, T. y Schorcht, S. (2018). Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. En K. Clark, T. Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History Towards a Harmonious Partnership*. (pp. 1-23). Cham, Switzerland: Springer

Grattan-Guinness, I. (1980). Introducción y explicaciones. En I. Grattan-Guinness, (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 11-21). Madrid, España: Alianza.

Grattan-Guinness, I. y Ledermann, W. (1994). Matrix Theory. En I. Grattan-Guinness (Ed.), Companion Encyclopedia of the History and Philosopy of Mathematical Sciences. (pp. 775-786). Nueva York, EEUU: Routledge.

Hawkins, T. (2008). Frobenius and the symbolical algebra of matrices. *Arch. Hist. Exact Sci*, (62), 23–57. DOI 10.1007/s00407-007-0006-6

Leo Corry, L. (1999/2019). Algebra. https://www.britannica.com/science/algebra Encyclopædia Britannica. A Dictionary of Arts, Sciences, Literature, and General information (en inglés) (11.ª edición). Encyclopædia Britannica, Inc.; actualmente en dominio público.

Piaget, J y García, R. (2016). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Undécima impresión. México, México: Siglo XXI.

Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra*. Fifth Edition. Wellesley, USA: Wellesley-Cambridge Press.

Strang, G. (2019). *Linear Algebra And Learning From Data* (First Edition). Wellesley, USA: Wellesley-Cambridge Press.

Circunferencias, superficies esféricas… ¿dónde estoy?

María Susana Dal Maso
mariasusanadalmaso@gmail.com
Marcela Götte
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Conocida es la ausencia de la geometría en la escuela, o en el mejor de los casos, la escasa planificación de tareas planteadas por los docentes de la escuela secundaria obligatoria que involucren conceptos geométricos. Mucho se ha escrito sobre la pérdida de interés en la enseñanza de la geometría e insuficientes han sido los esfuerzos por instalarla en el currículum en el aula de matemática. Como algunas investigaciones indican que los profesores tienden a reproducir en sus clases los modelos que ellos experimentaron cuando eran estudiantes podemos asumir que la falta o malas experiencias vividas en los niveles anteriores a la formación docente acentuará estas deficiencias en lugar de revertirlas. Es interesante presentar un problema donde variados conceptos se involucren de manera armoniosa tejiendo situaciones y experiencias dando sentido al contenido geométrico.

Este curso, destinado a docentes de matemática de nivel secundario y estudiantes de profesorado de matemática, tiene por objetivo identificar conceptos geométricos en el planteo de situaciones de localización de figuras en distintas dimensiones. Propondremos las variaciones del problema que trabajaremos desde las técnicas analíticas analizando las ventajas y dificultades que podría tener en contraposición con las técnicas sintéticas. Se utilizan en el desarrollo del curso diferentes tecnologías y se analizan sus potencialidades.

Fundamentación

Revisando tanto textos de primaria como de secundaria podemos afirmar que la geometría ha perdido presencia en ellos. Podemos observar un espacio ínfimo dedicado a los conceptos propios de la geometría, presentando en su mayoría definiciones y clasificaciones a veces deficientes o incorrectas y actividades en su mayoría ostensivas o de cálculo de perímetros, áreas y volumen. Asimismo, como algunas investigaciones indican que los profesores tienden a reproducir en sus clases los modelos que ellos experimentaron cuando eran estudiantes podemos asumir que la falta o malas experiencias vividas en los niveles anteriores a la formación docente acentuará estas deficiencias en lugar de revertirlas.

Proponemos trabajar en este sentido con problemas que lleven a los docentes o futuros docentes a conjeturar, argumentar, justificar, refutar o ratificar posibles soluciones, validar respuestas conjeturadas, es decir, hacer matemática. En esta propuesta se planteará el uso de distintas tecnologías.

Arcavi (2008) plantea varias razones por las cuales el modelado de situaciones geométricas a partir de gráficas dinámicas es un camino potente para el aprendizaje de conceptos matemáticos. Propone a los docentes el reto de crear situaciones en las cuales el resultado de la actividad es inesperado o en algunos casos contra intuitivo de tal forma que entre lo conjeturado por el estudiante y lo devuelto por el software propicie la necesidad de demostrar o probar sus conjeturas utilizando argumentos matemáticos que van más allá del software.

Los ambientes dinámicos, según indican Arcavi y Hadas (2000), son un poderoso medio para estimular el aprendizaje ya que a través de tareas adecuadas, en el sentido de provocar resultados inesperados, los estudiantes en busca de explicaciones de lo que sucede a través de experimentaciones con el ambiente, pueden producir un verdadero hacer matemáticas.

> Las exploraciones empíricas de los fenómenos geométricos pueden ser descubiertas al mirar muchos casos particulares y las transiciones dinámicas entre ellos. La observación puede no solo ayudar a dar a conocer los patrones, sino también puede ser la fuente de la comprensión y significando, y sirve para tener las bases para demostrar y para fomentar la exploración. (Arcavi y Hadas, 2000, p. 42)

Benítez Mojica (2006) sostiene que el arrastre, la traza y el lugar geométrico son algunas de las características notables que aporta un software en la resolución de problemas. Denomina prueba del arrastre a la acción de control que utiliza el movimiento de los objetos del software para constatar una conjetura e indica que el uso de ésta juega un papel importante en el proceso de argumentación.

En su investigación, en la que utiliza el software Cabri, reporta tres niveles de argumentación. El primero, de reconocimiento visual, donde se utiliza el software para construir trazas y lugares geométricos, acciones que posibilitan la construcción de conjeturas. El segundo nivel, la prueba del arrastre, donde se verifica si la propiedad visualizada en el nivel anterior es verdadera o no. Esta prueba puede ser aplicada para también para acotar el dominio geométrico donde se cumple una propiedad. El tercer nivel, la prueba con lápiz y papel, que se logra después de inducir y darle seguimiento a una conjetura.

Por lo dicho anteriormente, uno de los conceptos interesantes que se trabajan en la geometría es el de lugar geométrico. Su definición involucra una doble implicación. "Cuando una figura contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad, y, recíprocamente, sólo contiene puntos que la cumplen, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos." (Puig Adam, 1980, p.37).

La visualización juega un papel importante en la resolución de problemas de lugares geométricos, ya que tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión, lo que permite realizar acciones que pueden conducir hacia la solución del problema. Sin embargo su representación gráfica no es una tarea menor, no siempre resulta sencillo encontrar estrategias que posibiliten encontrar el lugar geométrico buscado.

El software *GeoGebra* es un "recurso potente para la obtención del lugar geométrico en la resolución de problemas, pero requiere no solo de conocimientos del software y conocimientos geométricos, sino también de saber combinar dichos conocimientos y aplicarlos de manera conjunta para poder producir los resultados deseados." (Hurani y Dal Maso, 2017, p.478)

El utilizar un software de geometría dinámica es fundamental al momento de estudiar una situación problema donde involucre el concepto de lugar geométrico permitiendo establecer conjeturas a partir de relaciones observadas. Analizar argumentos que se utilizan para convencer a otros y convencerse, es propio de la actividad matemática, pero no siempre surge espontáneamente. Un estudio realizado por Hurani y Dal Maso (2017) dan cuenta de ello.

> [...] los problemas de lugar geométrico son un campo propicio para trabajar la conjetura y la demostración en matemática, pero la demostración como condición necesaria para validar su producción no surge espontáneamente, no se evidencia como una nece-

> sidad, más aún si logran una representación con algún software de geometría dinámica que favorezca la visualización. (Hurani y Dal Maso, 2017, p.482)

En este curso trabajaremos con problemas de lugares geométricos. Según Dal Maso y Götte (2014) las representaciones gráficas, cuando conceptos geométricos están involucrados, cumplen un papel fundamental en el descubrimiento y en la interpretación de propiedades.

> Es interesante trabajar problemas geométricos donde el lápiz y el papel no resulten suficientes para realizar conjeturas y buscar soluciones. Las representaciones gráficas cumplen un papel destacado en la interpretación de conceptos y propiedades geométricas y creemos que, en este sentido, es necesario fomentar el uso de software de geometría dinámica. Tarea no sencilla es la del docente inquieto que busca problemas o secuencias adecuadas a este propósito donde el uso de un software sea indispensable para resolver la situación planteada. Así como en otro tiempo el debate se centraba en permitir el uso o no de la calculadora en la clase de matemática, sabemos que todavía hoy nos cuesta incorporar el uso de las netbooks en la tarea del aula. A veces, se incorpora su uso pero el desafío es no hacer lo mismo pero con otras herramientas. Por ejemplo, usar el software de geometría dinámica para realizar las mismas construcciones que se realizan con regla y compás (Dal Maso y Götte, 2014, p.89)

El software *GeoGebra* permite hallar el lugar geométrico que describe un punto, un segmento o cualquier figura cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite trazar el camino que describe un punto cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración. Pero no todo problema permite visualizar el lugar geométrico a partir del camino que describe un punto bajo ciertas condiciones, sino que es necesario utilizar distintos conceptos matemáticos, relaciones, interacciones y propiedades para lograr visualizar el lugar geométrico en cuestión. En el primer caso, una vez lograda la modelización de la situación problemática, se visualiza el lugar geométrico y con ello llegue, muy posiblemente, el convencimiento de la solución del problema sin tener la necesidad de validar la respuesta. En cambio, en la segunda situación será necesario contar con argumentos teóricos para lograr representar el lugar geométrico deseado.

En este curso presentaremos un problema de lugar geométrico donde su resolución requiera de argumentos teóricos, de estrategias adecuadas, de la geometría sintética y de la geometría analítica.

Gascón (2002) plantea la dicotomía existente en el ámbito escolar de si se debe enseñar la geometría sintética o la geometría analítica en la escuela obligatoria y presenta los argumentos de distintos autores al respecto sosteniendo una u otra postura.

> Simplificando abusivamente la cuestión, podría decirse que la discusión se polarizó entre los partidarios de una geometría sintética, propia del modelo «euclidiano», basada en una axiomática más o menos explícita, y los partidarios de una geometría analítica, propia del modelo «cartesiano», cuya práctica se sustenta en las técnicas del álgebra lineal y cuya axiomática suele quedar más implícita. (p.14)

Según Gascón (2002) esta "presunta alternativa entre geometría sintética y geometría analítica es una falsa alternativa, dada la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas" (p.24). Según este autor es necesario escrutar en las limitaciones de las técnicas sintéticas para encontrar el sentido o las razones de ser a las técnicas analíticas en la escolaridad secundaria de manera que no aparezcan desconectadas de la geometría que se estudia a lo largo de casi toda la escolaridad obligatoria hasta los últimos años de la escuela secundaria.

> En lugar de «dejar morir» la problemática que se estudia en la ESO, y crear una pseudoproblemática geométrica con ejercicios bastante formales para intentar justificar la utilización de las incipientes técnicas analíticas introducidas bastante artificialmente como objetos de enseñanza, deberían retomarse en el Bachillerato algunos tipos de problemas geométricos que se abordaron en la ESO. Se podría empezar mostrando, en el Bachillerato, determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas que pueden solventarse mediante el uso de técnicas analíticas. Para que esta práctica docente fuese eficaz sería preciso que se estableciese un nuevo dispositivo didáctico cuya función principal fuese la de retomar aquellos problemas matemáticos que, habiéndose propuesto en la ESO, hubiesen quedado sin resolver por limitaciones de las técnicas matemáticas disponibles. Sólo así podría mostrarse la continuidad de la problemática geométrica y la complementariedad entre los diferentes tipos de técnicas geométricas. (Gascón, 2002, p.24)

Teniendo en cuenta esta postura, propondremos las variaciones del problema que trabajaremos desde las técnicas analíticas analizando las ventajas y dificultades que podría tener en contraposición con las técnicas sintéticas.

Se detallan a continuación algunos de los temas que se trabajarán durante el curso teniendo como finalidad la solución del problema.

Temas a trabajar

- Trisección de segmentos
- Visualización
- Lugar geométrico
- Traza
- Trigonometría
- Triángulos
- Circunferencias
- Arco capaz
- Movimientos isométricos
- Superficies esféricas
- Geometría sintética y geometría analítica

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, (28), 2-10.

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (5), 25-15.

Benítez Mojica, D. (2006). Resolución de problemas de cónicas con el apoyo de la geometría dinámica. En J. Luna, C.J. Luque, A. Oostra, J.H. Pérez y C. Ruiz, Carlos (Eds.), *Memorias XVI Encuentro de Geometría y IV encuentro de Aritmética* (pp. 77-88). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Dal Maso, M.S. y Götte, M.E. (2014). Hilvanando la circunferencia intermedia entre la inscripta y la circunscripta. En G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (Comps.), *Memorias REPEM Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp.82-89). Santa Rosa, Argentina: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, (39), 13-25.

Hurani, C. y Dal Maso, M.S. (2017): Los problemas de lugar geométrico como medio para investigar los modos de validación que utilizan los alumnos del profesorado de matemática. VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática. (pp.476-482) FHUC (UNL)

Puig Adam, P. (1986). *Curso de geometría métrica*. Madrid, España: Euler.

Algebrización progresiva

SILVIA BERNARDIS
silvia.bernardis@gmail.com
CECILIA LASPINA
cecilaspina@gmail.com
MICAELA MAZZOLA
micamazzola@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

El trabajo en este taller girará en torno a la siguiente problemática: la centralidad del álgebra en las propuestas curriculares de matemática en el nivel secundario, su contraste con las dificultades que presenta el aprendizaje y la subsiguiente renuencia de los estudiantes a estudiarlo. Para abordar dicha problemática plantearemos las preguntas siguientes: ¿cuál es la esencia del álgebra que se enseña en la escuela secundaria y por qué se enseña? ¿Qué tipos de tareas guiarán a los estudiantes hacia niveles progresivos de algebrización? Nos proponemos debatir respuestas y ejemplos para apoyar e ilustrar los argumentos.

Una de las dificultades con las que nos encontramos como docentes para la introducción al álgebra elemental es decidir qué se entiende por álgebra, cuáles son sus objetos, sus acciones y cuáles son los tipos de tareas algebraicas.

El objetivo del taller es la implementación de actividades prácticas orientadas al reconocimiento de los rasgos característicos del razonamiento algebraico, que redunde en la capacitación del profesor sobre los *niveles de algebrización* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015), teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática.

A partir de los debates que se produzcan en los dos encuentros programados, esperamos que los participantes reflexionemos en torno a la necesidad de orientar las tareas escolares, para que las prácticas matemáticas de los estudiantes transiten hacia niveles progresivos de algebrización.

Descripción de la propuesta

Un itinerario habitual en la educación secundaria para la introducción al Álgebra y que claramente aparece en las propuestas de algunos textos escolares, es la traducción de frases numéricas y geométricas, de un lenguaje coloquial a uno simbólico-algebraico, para posteriormente abordar la resolución de ecuaciones lo más rápidamente posible. De esta manera se ofrece a los estudiantes, experiencias en las que se plasma una imagen sesgada del Álgebra, cargada de rupturas entre la aritmética y el álgebra y dejando de lado actividades importantes tales como: las de descubrimiento y expresión de relaciones, que involucran a los estudiantes en procesos de generalización; las de interpretación y manipulación de expresiones, como un instrumento útil para la justificación matemática; y las de modelización de fenómenos en distintos contextos.

En este taller pretendemos abordar la siguiente problemática: la centralidad del álgebra en las propuestas curriculares de matemática, su contraste con las dificultades que presenta el aprendizaje y la subsiguiente renuencia de los estudiantes a estudiarlo. Para abordar dicha problemática plantearemos las siguientes preguntas: ¿cuál es la esencia del álgebra que se enseña en la escuela y por qué se enseña? ¿Qué tipos de tareas guiarán a los estudiantes hacia niveles progresivos de algebrización? Nos proponemos encontrar respuestas y ejemplos para apoyar e ilustrar los argumentos.

Una de las dificultades con las que nos encontramos como docentes para la introducción al álgebra elemental es decidir qué se entiende por álgebra, cuáles son sus objetos, sus acciones y cuáles son los tipos de tareas algebraicas.

Hablar de los objetivos del álgebra equivale a intentar dar una respuesta a la pregunta ¿qué es el álgebra y para qué sirve? A pesar de la observación de Lins (2011) "Decir lo que es el álgebra, no es un problema menor" (Lins, 2011, p.38), y la afirmación de Freudenthal (1977) quién opina en este sentido que "no hay un Tribunal Supremo que decida estas cuestiones" (Freudenthal, 1977, p.119), revisaremos algunas respuestas posibles en el taller. Además analizaremos ¿Qué es lo que realmente hacemos con el álgebra? ¿Cuáles son las acciones físicas y mentales en las que nos involucramos cuando "hacemos Álgebra"?

Un primer paso para intentar resolver la problemática planteada en beneficio de los estudiantes y los docentes es revisar y ejemplificar la naturaleza del tema (objetivos, acciones y objetos del álgebra), así como su valor educativo y las razones meritorias para estudiarlo. Un concepto central en álgebra es el de variable con diferentes significados y diferentes roles. Las múltiples facetas de las variables, no siempre son distinguidas por los matemáticos, pero deben ser atendidas bastante de cerca en la educación matemática.

Los errores algebraicos que frecuentemente encontramos en las producciones de los estudiantes no se deben reducir a una "falta de práctica", merecen un trato atento en el aula y una discusión con nuestros alumnos que permita aflorar sus razonamientos. La transición de la aritmética al álgebra exige una abstracción que implica un salto conceptual importante que si se acompaña de carencia de sentido de los objetos y procedimientos se generan conflictos que ocasionan interferencias.

El camino que va desde la manipulación, por ejemplo, de fórmulas geométricas para hallar longitudes y áreas en la escuela primaria hasta el cálculo, por ejemplo, de la suma y el producto de polinomios en la escuela secundaria, es un camino largo, complejo y lleno de dificultades. Godino (2003) identifica dos etapas: en la primera, los símbolos sustituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan.

Para que los estudiantes vayan construyendo el razonamiento algebraico es evidente que los profesores deben también tenerlo y saber cómo desarrollarlo.

> No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y de su progresión en la educación secundaria. (Godino et al., 2015, p.137)

El razonamiento algebraico se puede desarrollar en los estudiantes mediante actividades debidamente planificadas que, partiendo de tareas aritméticas, geométricas o de otros bloques de contenido, vayan propiciando el tránsito hacia la generalización, la simbolización, la modelización y el cálculo analítico.

Finalmente, consideramos que los contenidos que trataremos en el taller tienen relevancia para la formación de docentes de matemática, dado que no es abordado en las propuestas curriculares de las carreras de profesorado.

Objetivo

El objetivo del taller es la implementación de actividades prácticas orientadas al reconocimiento de los rasgos característicos del razonamiento algebraico, que redunde en la capacitación del profesor sobre los *niveles de algebrización*, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática.

Descripción de las tareas previstas

Las actividades serán desarrolladas en forma colaborativa en grupos de docentes, propiciando la discusión y reflexión de los participantes. A continuación detallamos la propuesta de trabajo y el fundamento teórico que abordaremos en cada uno de los encuentros.

Primer encuentro

En la primera parte de este encuentro presentaremos distintas tareas, seleccionadas de textos escolares del nivel secundario. Los docentes propondrán diferentes resoluciones que sus estudiantes podrían realizar. El propósito es identificar en dichas resoluciones el *objetivo* con el que los estudiantes utilizarán el álgebra, analizar cuáles son las *acciones* en las que se involucrarán los mismos al resolverlas y reconocer los *objetos* mediante los cuales se realizarán las acciones algebraicas para perseguir los objetivos. El marco teórico que guiará nuestras reflexiones en torno a este tema proviene fundamentalmente de Arcavi, Drijvers y Stacey (2017) y de Calvo Pesce, Deulofeu Piquet, Jareño Ruiz y Morera Úbeda (2016).

En una segunda parte trabajaremos en el diseño de tareas que favorezcan la construcción del sentido del álgebra escolar, a partir de los objetivos identificados en la actividad anterior. Como marco teórico nos centraremos en la postura de Puig (2012) quién considera en sus “Observaciones acerca del propósito del Álgebra Educativa” que el álgebra en el currículo de secundaria ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista:

- como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración;

- como un instrumento para la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones;
- como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

Segundo Encuentro

En el segundo encuentro analizaremos matemática y didácticamente el abordaje de diferentes tareas escolares a través de examinar producciones de estudiantes, a los fines de hacer explícitas las características del razonamiento algebraico que deberían ser motivo de promoción y reconocimiento por parte de los docentes. Además, focalizaremos el trabajo en el reconocimiento de los distintos *niveles de algebrización* de la actividad matemática de los estudiantes por parte de los profesores, con el propósito de ayudar a tomar conciencia de las brechas o discontinuidades que pueden tener lugar en la realización de las tareas que se proponen en las clases. En los aportes de Bolea, Bosch y Gascón (2001); Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014); Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) nos basaremos para la descripción y caracterización de los *niveles de algebrización* del desarrollo del razonamiento algebraico en secundaria. Los autores reconocen tres niveles de algebrización propios de esta etapa educativa. Consideran que el uso de parámetros y su tratamiento puede ser un criterio para delimitar niveles superiores de algebrización ya que está ligado a la presencia de familias de ecuaciones y funciones, y por tanto, implica nuevas "capas" o niveles de generalidad. La intervención de parámetros, entienden los autores que están ligadas al cuarto y quinto nivel de algebrización, mientras que el estudio de estructuras algebraicas específicas lleva a reconocer un sexto nivel de algebrización de la actividad matemática.

Resultados esperados

A partir de las actividades propuestas en los dos encuentros del taller, esperamos que los participantes reflexionemos en torno a la necesidad de orientar las tareas escolares, para que las prácticas matemáticas de los estudiantes transiten hacia niveles progresivos de algebrización y construyendo sentido de los objetos y procesos del Álgebra que se ponen en juego.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insignt, and Activities*. Nueva York, E.E.U.U.: Routledge.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(3), 247 -304.

Calvo Pesce, C., Deulofeu Piquet, J., Jareño Ruiz, J. y Morera Úbeda, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Madrid, España: Síntesis.

Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(3), 189-200.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R. Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 117-142.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, USA: NCTM.

¿Cómo poner en juego los diferentes significados de probabilidad en el aula de matemática?

María Florencia Cruz
ma.florenciacruz@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
Karina Temperini
ktemperini@fhuc.unl.edu.ar
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET-UNL)
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En la actualidad, documentos regulatorios y diversas publicaciones del campo de la educación matemática y estadística ponen de manifiesto la necesidad de formar estudiantes de todos los niveles del sistema educativo capaces de actuar críticamente frente a situaciones que involucran el azar y la incertidumbre, lo que implica un desarrollo del razonamiento probabilístico. En la búsqueda de dar respuesta a situaciones cotidianas en las que se pone en juego la probabilidad, se utilizan diferentes significados (o interpretaciones) que se asocian a este concepto. Hoy en día coexisten cinco significados de probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencialista, subjetivo, y axiomático.

A partir de lo mencionado se propone un taller en el que docentes y futuros profesores en matemática se involucren en el estudio y diferenciación de los distintos significados del concepto de probabilidad. Asimismo, se analizarán las potencialidades y limitaciones de cada uno de ellos en el trabajo en el aula de matemática. En este sentido se pretenden discutir y reflexionar, tanto desde un punto de vista didáctico como probabilístico, situaciones que involucran los diferentes significados de probabilidad.

Introducción

En la actualidad se reconoce la necesidad de formar ciudadanos en el dominio de la probabilidad, con el fin de otorgarles oportunidades de razonar y actuar con éxito en diversas situaciones en las que interviene la incertidumbre (Batanero, 2005; NAP, 2011; Gómez-Torres, Batanero y Contreras, 2014; Viñas, 2014). Al respecto, Gal (2005) afirma que se deben formar estudiantes de todos los niveles del sistema educativo capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos y la toma de decisiones.

En Argentina, currículos oficiales incluyen la propuesta de abordar conceptos estocásticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del área matemática, desde los primeros años de educación secundaria hasta la formación en el nivel superior en diversas carreras. Particularmente, los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (2011) proponen el trabajo en el eje Probabilidad y Estadística desde el primer año de la escuela secundaria. En este contexto, cabe señalar que “aunque los contenidos estocásticos están considerados en los Contenidos Básicos Comunes, una gran proporción de docentes no llega a desarrollarlos efectivamente en sus clases” (Tauber, 2019, p. 55). La autora afirma que lo mencionado puede deberse a falta de tiempo, puesto que suelen colocarse últimos en el programa; o debido a falta de conocimientos adecuados por parte de los docentes respecto a estos temas y al modo de enseñarlos significativamente.

Atendiendo a las cuestiones mencionadas se propone un taller destinado a docentes y futuros profesores en matemática en el que se espera discutir y poner de manifiesto la importancia que presenta el trabajo en el aula de matemática en el dominio de la probabilidad. En particular, se esperan alcanzar los siguientes objetivos: estudiar y diferenciar las distintas interpretaciones del concepto de probabilidad y analizar las potencialidades y limitaciones de cada una de ellas en el trabajo en el aula de matemática.

Para lograr alcanzar los objetivos propuestos se invita a los participantes a trabajar en torno a un conjunto de tareas en las que se ponen en juego las diferentes interpretaciones o significados de probabilidad: intuitivo, subjetivo, frecuencialista, clásico y axiomático (Batanero, 2005). Estas tareas involucran momentos de experimentación apelando a recursos tradicionales y/o simulados con computadoras, juego, discusión, análisis, comunicación, entre otros.

A su vez, cabe destacar que se pretende reflexionar con los participantes del taller la importancia de aprovechar la intuición, el sentido común, la experimentación, etc. de los estudiantes al trabajar en el dominio de la probabilidad, dado que no se debe recurrir únicamente a un enfoque formal que se basa en el empleo de fórmulas y reglas. Lo que se debe lograr es la generación de un pensamiento aleatorio y estocástico por parte de los alumnos (Tauber, 2019).

Marco de referencia

Godino, Batanero y Cañizares (1996) afirman que “la probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre” (p.11). En esta misma línea, Bressan y Bressan (2008) señalan que este dominio de la matemática estudia los fenómenos que obedecen a ciertas leyes del azar. Al considerar el trabajo en esta área de la matemática se debe tener en cuenta que no existe un consenso unificado que permita establecer un único significado (o interpretación) del concepto de probabilidad.

A lo largo de la historia han surgido diferentes significados de probabilidad que aún coexisten, “debido quizá al desarrollo reciente de este campo con respecto a otras ramas de las matemáticas” (Batanero, 2005, p.252). Si bien a través de los años cada significado propuesto por unos expertos ha sido criticado por otros, es importante señalar que cada uno de ellos puede ser útil en la aplicación de la teoría de la probabilidad a distintos problemas prácticos. A continuación describimos cada uno de estos significados tomando aportes de Godino, Batanero y Cañizares (1996), Batanero (2005) y Gómez-Torres, Batanero y Contreras (2014).

El *significado intuitivo* se pone en juego cuando se utilizan frases o expresiones coloquiales, generalmente del lenguaje habitual, para expresar el grado de creencia frente a un determinado suceso incierto. Entre lo seguro (que ocurrirá con certeza) y lo imposible (que nunca puede ocurrir) existe lo probable que puede medirse utilizando distintas palabras que expresen el grado de posibilidad de ocurrencia (muy probable, posible, poco probable). En este significado no se apela a una asignación numérica y se considera que los estudiantes desde tempranas edades pueden a partir de su experiencia percibir sucesos en los que tienen más o menos confianza.

Se reconoce el surgimiento del *significado clásico* con Pierre Simon de Laplace en 1812, que estableció la definición “clásica” de probabilidad de un suceso como la proporción del número de casos favorables al suceso al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Esta definición no puede aplicarse a experimentos con un número infinito de resultados posibles o a aquellos casos en que si bien esta cantidad es finita, no se puede garantizar una condición de simetría que garantice la equiprobabilidad. Este significado se ha utilizado durante muchos años de modo prioritario en la escolaridad obligatoria, puesto que permite asignar probabilidades en situaciones del azar (extracciones de cartas, lanzamientos de monedas, etc.) que en general resultan cotidianas para los estudiantes. Sin embargo, cabe mencionar que es una definición circular y restrictiva que si se emplea sin ser contrastada con los otros significados de probabilidad puede promover el sesgo de la equiprobabilidad.

El *significado frecuencialista o empirista* se presenta cuando se realiza una estimación experimental de la probabilidad, que se define como el límite de la frecuencia relativa de aparición de un suceso cuando el experimento se realiza un número grande de veces en las mismas condiciones. John Venn en 1888 y Richard Von Mises a principios del siglo XX fueron defensores de este enfoque. Esta interpretación es útil cuando se dispone de un gran número de datos y resulta más amplia que el significado clásico por tener aplicación en diversas situaciones de la vida real y posibilitar la conexión entre la probabilidad y la estadística. Sin embargo presenta algunas dificultades: no es posible calcular la probabilidad de un suceso sino obtener una estimación de ella; a veces es imposible realizar los experimentos en las mismas condiciones así como es difícil saber cuál es el número de veces que deben realizarse para obtener una buena estimación de la probabilidad e incluso hay fenómenos aleatorios (por ejemplo en historia, medicina o en economía) que son irrepetibles.

En el *significado subjetivo* la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos, sino un grado de creencia personal basado en el conocimiento (información disponible) y la experiencia de la persona que asigna la probabilidad a un suceso dado. Así, el valor de la probabilidad depende del sujeto que la calcula y diferentes personas pueden asignar probabilidades distintas a un mismo suceso, lo cual puede ser considerado como una dificultad. Matemáticos como John M. Keynes, Frank P. Ramsey y Bruno de Finetti fueron defensores de este enfoque durante el siglo XX. Puesto que no es necesaria la repetición del experimento, este significado de probabilidad resulta adecuado para problemas de toma de decisiones en economía o en el diagnóstico médico, incluso el sujeto que asigna la probabilidad puede disponer información adicional acerca del suceso que le posiblita mejorar su asignación de probabilidades (probabilidad condicional y teorema de Bayes).

Finalmente, en el *significado axiomático o formal* la probabilidad es un concepto implícitamente definido por un sistema de axiomas y un cuerpo de definiciones y teoremas que se deriva de ellos, es decir, se forma con la metodología clásica de las teorías matemáticas. Borel consideró a la probabilidad como un tipo especial de medida y en 1933 Andrei Kolmogorov usó esta idea, junto con la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que fue aceptada por todas las escuelas, independientemente del significado otorgado a la probabilidad. En este contexto, los sucesos se representan por conjuntos y la probabilidad es una medida definida sobre esos conjuntos. Los teoremas indican cómo obtener una probabilidad a partir de otras pero no sugieren cómo deben interpretarse esos valores numéricos. Este enfoque es adecuado para la introducción de la probabilidad en nivel universitario pero no es aconsejable para un nivel elemental.

Como se menciona anteriormente, existe controversia respecto al enfoque o significado utilizado para asignar probabilidades a los resultados simples de un experimento aleatorio, sin embargo los expertos coinciden en que una vez que estas probabilidades han sido asignadas, la teoría matemática de la probabilidad proporciona la metodología apropiada para ampliar el estudio de estas probabilidades (DeGroot, 1988). Es por ello que el enfoque axiomático puede considerarse como integrador de los anteriores, dado que puede ser aplicado independientemente del sentido de probabilidad que se utiliza en un problema particular.

Finalmente, es importante destacar que en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en el aula de matemática no debe limitarse el trabajo a uno de estos significados. Para lograr que los estudiantes alcancen un conocimiento genuino de probabilidad deben enfrentar situaciones en las que se pongan en juego los diversos significados de un modo gradual y que considere la experiencia estocástica que han tenido (Batanero, 2005).

Modalidad de trabajo

El taller se organiza en dos encuentros en los que se proponen tareas en las cuales los diferentes significados de probabilidad se ponen en juego para su resolución. La modalidad de trabajo es en equipos de tres o cuatro integrantes, luego se realizan discusiones colectivas en las que cada grupo expone su producción y se analiza cada una de ellas. A su vez, se pretende reflexionar con los asistentes, en diversos momentos, en torno a las particularidades, los alcances y las limitaciones de cada uno de estos significados. Es decir, se realiza una primera instancia de trabajo matemático, luego se reflexiona el trabajo en juego y finalmente se realizan discusiones didácticas en torno a lo realizado apelando a consideraciones teóricas.

Reflexiones finales

En este taller se propone, como se señaló previamente, invitar a docentes y futuros profesores en matemática a trabajar con diversas tareas en las que se ponen en juego los diferentes significados (o interpretaciones) de probabilidad. También se pretende lograr una reflexión en torno a: las potencialidades y limitaciones de cada una de estos significados, las posibilidades de abordarlos en la educación secundaria atendiendo a los currículos oficiales vigentes actualmente en Argentina, diversos constructos teóricos del campo de la educación matemática, etc.

A su vez, en el cierre del taller se delibera y discute en torno a la importancia de trabajar en probabilidad (en comunión con la estadística) en el aula de matemática, atendiendo que estos dominios, olvidados algunas veces, tienen un alto valor formativo. En este sentido, se pone de manifiesto la necesidad de: brindar oportunidades a los estudiantes para que se involucren con las formas de razonamiento propias de estos dominios y de franquear esta barrera de carencia de enseñanza de temas estocásticos en la escuela secundaria.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime,* 8 (3), 247-263.

Bressan, A. y Bressan, O. (2008) *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes.* Buenos Aires, Argentina: Novedades Educativas.

DeGroot, M. (1988) *Probabilidad y Estadística*. Wilmington, E.E.U.U.: Addison-Wesley Iberoamericana.

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.43-70). Nueva York, EEUU: Springer.

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1996). *Azar y Probabilidad.* Madrid, España: Sintesis.

Gómez-Torres, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Epsilon,* 31(2), 25-42.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Recuperado de: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Tauber, L. (2019) Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas,* 8(01), 53-74.

Viñas, I. (2014). *Desarrollo de la intuición probabilística en educación primaria*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

El juego en matemática como recurso de enseñanza en el nivel primario y ciclo básico del nivel secundario

CECILIA LASPINA
cecilaspina@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
MA. LAURA IMVINKELRIED
mimvinkelried@gmail.com
Escuela Normal Superior N°32

Resumen

Los contenidos del taller se vinculan con el análisis didáctico/matemático de propuestas de enseñanza. El objetivo del mismo, es que los docentes y futuros docentes resignifiquen el juego como recurso de enseñanza en las clases de Matemática y que a su vez, profundicen y amplíen sus conocimientos de algunas nociones de la Didáctica de la Matemática.

En el Taller nos proponemos implementar y reflexionar en torno a propuestas de enseñanza diseñadas con un juego como punto de partida. Las mismas, tienen como propósito abordar el estudio de la comparación y el orden de las fracciones y la propiedad de densidad de los números racionales.

Fundamentación

A partir de nuestra experiencia y trabajo con estudiantes de escuela primaria y de futuros profesores de Nivel Primario y en Matemática, consideramos necesario que las propuestas de enseñanza estén diseñadas con el propósito de que los estudiantes construyan saberes por sí mismos, y que no repliquen definiciones de conceptos y/o técnicas ya elaboradas en los libros de texto. Esto permite que los alumnos otorguen sentido a diversos conceptos, ampliando los saberes que poseen, en este caso, del conjunto de los números racionales y que los manejen con mayor autonomía.

La propuesta que pensamos para este taller, consiste en la exploración y el análisis, de dos propuestas que tienen como punto de partida un juego y que permiten, formular criterios de comparación de fracciones, y una primera aproximación a la noción de densidad de los números racionales.

Nos resulta necesario, recuperar algunas ideas básicas sobre el uso del juego en el aula y algunos recaudos a tener en cuenta a la hora de jugar. Muchos autores están de acuerdo sobre la potencia que tiene el juego como recurso para enseñar, y en este sentido Chemello (2004) expresa:

> Los juegos poseen la ventaja de interesar a los alumnos, con lo que, en el momento de jugar, se independizan relativamente de la intencionalidad del docente y pueden desarrollar la actividad, cada uno a partir de sus conocimientos. Pero la utilización del juego en el aula debe estar dirigida a su uso como herramienta didáctica: jugar no es suficiente para aprender. Justamente, la intencionalidad del docente diferencia el uso didáctico del juego de su uso social (p.5).

También nos gustaría aclarar, que el juego en matemática no debe ser una actividad aislada o “algo distinto” para un día especial, sino que debe formar parte de una secuencia didáctica diseñada en torno al trabajo con ciertos contenidos matemáticos seleccionados con una intención.

Pensando entonces en la intención o propósito que persigue el Taller, que es incentivar a los colegas a incluir el juego como recurso de enseñanza en clases de Matemática, podríamos enunciar, como bien lo expresa Chemello (2004) que: “En el momento de jugar, el propósito del alumno es siempre ganar, tanto dentro como fuera de la escuela. El propósito del docente, en cambio, es que el alumno aprenda el contenido que está involucrado en el juego” (p.5).

Objetivos del taller

A partir del cursado de éste Taller, se espera que los docentes:

- Resignifiquen el juego como recurso de enseñanza en las clases de Matemática.
- Realicen un análisis didáctico/matemático de distintas propuestas de enseñanza que tienen como punto de partida un juego.
- Profundicen y amplíen sus conocimientos de algunas nociones de la Didáctica de la Matemática.

Tareas que se desarrollarán

1° propuesta

-exploración y análisis de un juego de cartas, cuyo objetivo es que los estudiantes formulen diversos criterios de comparación de fracciones.

-análisis didáctico/matemático de algunas actividades para "Después de jugar", que permiten recuperar y hacer explícitas las estrategias utilizadas en el juego.

2° propuesta

-exploración y análisis de un juego con dados, cuyo objetivo es que los estudiantes construyan una primera aproximación a la propiedad de densidad del conjunto de los números racionales.

-análisis didáctico/matemático de algunas actividades para "Después de jugar", que permiten recuperar y hacer explícitas las estrategias utilizadas en el juego.

Reflexión y evaluación de las propuestas presentadas, análisis de la posibilidad de implementación en las clases de matemática de nivel primario y en el ciclo básico de nivel secundario.

Referencias bibliográficas

Chemello, G. (coord). (2004). *Juegos en Matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender. Material para el docente.* Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. Recuperado de : http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001220.pdf

MATEMATIC

FABIANA KIENER
fkiener@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
NATALIA MARTÍNEZ
natty1705@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
PATRICIA RAMÍREZ
patricia.ramirez.1309@gmail.com
E.E.S. N° 3137 San Ezequiel Moreno Agustinos Recoletos
MARÍA AMELIA VIGNATTI
avignatti17@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Actualmente, los estudiantes están en contacto con equipos tecnológicos desde temprana edad: notebooks, tablets, celulares, entre otros, que antiguamente no existían o bien no eran de fácil acceso, así como la disponibilidad de Internet que no era habitual en todos los hogares.

Estos cambios, enriquecen las experiencias de niños y adolescentes con los equipos multimedia fuera del ámbito escolar y les permite expresarse de formas diferentes a los modelos convencionales utilizados en la educación obligatoria (Ramírez, 2019). Es así que, la utilización de las TIC posibilita a los estudiantes experimentar un rol activo frente a su propio aprendizaje y adquisición de conocimiento, muy diferente a la propuesta de incorporación de tecnologías en el ámbito escolar donde el aprendizaje se caracteriza por ser conducido por el profesor (Ramírez, 2019; Buckingham, 2005).

Cabe destacar que no cualquier uso de las TIC promueve aprendizajes significativos (Real Pérez, 2013). En este sentido, Barreiro (2015) define criterios para que una tarea resulte apropiada en relación con el uso de las TIC.

En el taller propuesto se presentarán tareas y experiencias desarrolladas en clases de matemática que utilizan herramientas digitales con el fin de poder discutir y reflexionar en torno a los criterios mencionados y realizar modificaciones en caso que sea necesario. Además, se pretende ofrecer información sobre diversas aplicaciones para que los

participantes puedan diseñar tareas para incluir en sus planificaciones, que favorezcan un uso significativo y pertinente de las TIC.

Fundamentación teórica

En educación, la aparición de las tecnologías digitales ha simbolizado nuevos y constantes desafíos para los educadores. Desde éste ámbito, se cree que las computadoras son herramientas educativas indispensables para conectarse con el mundo y muchas veces se asume que su mera incorporación en las escuelas es naturalmente beneficioso independientemente de cómo se utilicen (Buckingham, 2005). Sin embargo, coincidimos con Real Pérez (2010) en el hecho de que:

> Disponer de información no produce de forma automática conocimiento. Transformar la información en conocimiento exige de destrezas de razonamiento para organizarla, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad; en definitiva, comprenderla e integrarla en los esquemas previos de conocimiento. Significa, asimismo, comunicar la información y los conocimientos adquiridos empleando recursos expresivos que incorporen, no sólo diferentes lenguajes y técnicas específicas, sino también las posibilidades que ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación. (p.73)

En la actualidad, las computadoras forman parte de la cultura popular de los niños –inclusive en muchos casos antes del ingreso escolar- y el uso de las mismas, en la mayoría de los hogares está destinado a los videojuegos y el uso de internet sin fines académicos. Dado que "los niños están viviendo ya en un mundo digital [...] necesitamos estar en condiciones de capacitarlos para que lo comprendan y participen activamente en él." (Buckingham, 2005, p. 5).

Las experiencias de los niños y adolescentes con los equipos multimedia fuera del ámbito escolar son muy ricas: puede leer, acceder, modificar, opinar, informarse, jugar y expresarse de otras maneras, diferentes a los modelos convencionales utilizados en la educación obligatoria (Ramírez, 2019). Esto significa que, mediante la utilización de las TIC, los estudiantes tienen un rol activo (con características de autogestión) frente a su propio aprendizaje y adquisición de conocimiento, que se diferencia de las propuestas de incorporación de tecnologías al ámbito escolar mediante un aprendizaje pasivo dirigido por el profesor (Ramírez, 2019; Buckingham, 2005).

El riesgo está, tal como lo sostiene Buckingham (2005), en que "si las escuelas no consiguen conectar con las cambiantes orientaciones y motivaciones de los jóvenes respecto del aprendizaje, existe el grave peligro de que las instituciones docentes oficiales queden totalmente marginadas de sus vidas" (p. 5). En pos de ello, consideramos que las TIC en las clases de matemática configuran una nueva forma de enseñar los contenidos permitiendo dar al alumno un rol más activo en la construcción del conocimiento.

No obstante, coincidimos con Real Pérez (2013) “las TIC pueden llegar a jugar un papel muy importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero si se utilizan correctamente. Es más, si su uso no es el adecuado, pueden llegar a trazar un camino tortuoso pasando de ser una potente herramienta a una barrera que impida el proceso” (p.3). La idea no es incorporarlas para “ahorrar tiempo” o para “verificar” un cálculo, si no que el alumno sienta la necesidad de implementarlas favoreciendo su proceso de aprendendizaje naturalmente. En este sentido, Barreiro (2015), lleva a cabo una investigación con el fin de estudiar cómo favorecer, desde la formación inicial, la integración de las nuevas tecnologías de la información y comunicación en futuros profesores de Matemática. Esta autora define los criterios que mencionamos a continuación, con el fin de evaluar la pertinencia del uso de TIC en una tarea matemática:

1) Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas (en alguna tarea de un listado o secuencia de tareas)
2) Imprescindibilidad de las TIC
3) No perder de vista el objetivo matemático
4) Incluir distintos usos de TIC (en alguna tarea de un listado o secuencia)
5) Complementariedad (en alguna tarea de un listado o secuencia)
6) Libertad para apelar a las TIC
7) Libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar

Sin embargo, Rodríguez (2017) destaca que dichos criterios no pueden aplicarse indiscriminadamente para valorar la pertinencia y significatividad del uso de las TIC, por tener distinto estatus, incluso resalta que aun cumpliéndose la mayoría de ellos no implica necesariamente que la consigna sea significativa en cuanto a TIC. En este sentido, la autora recomienda establecer un cierto orden para ser analizados:

- Si los criterios de imprescindibilidad y de no perder de vista el objetivo matemático no se cumplen, termina el análisis y se argumenta el porqué de la valoración negativa a partir de la ausencia de ellos.
- Si ambos criterios se cumplen, revisaremos cada uno de los demás (aquellos sobre los que sea pertinente pensar), y su presencia enriquecerá aún más una valoración que será positiva. (p. 82)

Rodríguez (2017) nos invita a repensar las tareas propuestas al momento de utilizar las TIC en la clase de matemática, a colocar el foco de atención en otro lugar, en donde algunos cálculos y gráficos puedan ser resueltos con la tecnología y que el desafío sea *ir por más*. No se trata de hacer lo mismo pero con la computadora o el celular, sino que debe proponerse otro tipo de trabajo. Considerando que se trata de un recurso más que se dispone en el aula, por lo cual:

> En vez de prohibir su uso, o relegarlo para un segundo momento después de que mostraron destreza en papel y lápiz, planteemos buenas preguntas, consignas y problemas, y que los estudiantes utilicen lo que necesiten para abordarlos. Estaríamos preparándolos para una mejor inserción en nuestra sociedad actual. (Rodríguez, 2017, p.73)

En el taller propuesto se presentarán tareas y experiencias desarrolladas en clases de matemática que utilizan herramientas digitales con el fin de poder discutir y reflexionar en torno a los criterios mencionados y realizar modificaciones en caso que sea necesario. Además, se pretende ofrecer información sobre diversas aplicaciones para que los participantes puedan diseñar tareas para incluir en sus planificaciones, que favorezcan un uso significativo y pertinente de las TIC.

Descripción de las tareas que se espera desarrollar

ENCUENTRO 1

1) Indagación sobre los conocimientos previos de los participantes sobre el uso de TIC en educación matemática.

2) Presentación de una propuesta de enseñanza que promueve el uso del Geogebra.

3) Presentación de los criterios de Barreiro (2015) sobre el uso de TIC.

4) Análisis de la propuesta de enseñanza que promueve el uso del Geogebra en función de los criterios. Propuesta de posibles modificaciones de la propuesta.

5) Descripción de características principales de otros software específicos.

6) Diseño de una actividad que favorezca el uso de TIC con el uso de software específico (por grupos o en parejas por nivel educativo).

7) Intercambio de propuestas diseñadas y análisis de las mismas según los criterios.

ENCUENTRO 2

1) Descripción de características principales de algunas aplicaciones no matemáticas.

2) Relato de experiencias con el uso de aplicaciones no matemáticas (considerando la posibilidad de que los asistentes sean partícipes de alguna experiencia).

3) Diseño de una actividad que favorezca el uso de TIC con el uso de aplicaciones no matemáticas (por grupos por nivel educativo)

4) Puesta en común de las actividades diseñadas.

Observación: Las actividades las presentaremos mediante códigos QR.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Patricia_Barreiro2

Buckingham, D. (2005). *Educación en medios. Alfabetización, aprendizaje y cultura contemporánea*. Barcelona, España: Ediciones Paidós

Ramírez, P. (2019). La catáfora de un mundo en ciernes. *Novedades Educativas*, (341), 8-14.

Real Pérez, M. (2010). Tratamiento de la información y competencia digital en el área de matemáticas. *SUMA,* (64), 71-80. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/64/071-080.pdf

Real Pérez, M. (2013). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Materiales para el desarrollo curricular de matemáticas de tercero de ESO por competencias. *Jornadas de Innovación docente*. Universidad de Sevilla, España. Recuperado de https://personal.us.es/suarez/ficheros/tic_matematicas.pdf

Rodríguez, M. (coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Los Polvorines, Argentina: UNGS.

Construcción del sentido estadístico a partir de datos e información en la web

LILIANA TAUBER
YANINA REDONDO
MARIELA CRAVERO
SILVANA SANTELLÁN
estadisticamatematicafhuc@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen

El desarrollo del sentido estadístico debería darse de modo progresivo a través de toda la escolaridad, incluidos los niveles superiores. En Argentina, aunque las ideas estocásticas aparecen desde hace tiempo en el currículo, hay evidencias de que los estudiantes llegan al nivel superior con escasa o nula formación en lo que a razonamiento y pensamiento estadístico se refiere. Frente a esta situación y con el objetivo de reflexionar sobre propuestas didácticas que permitan integrar esas ideas estocásticas, en este Taller se proponen actividades que pueden servir en la formación de profesores y/o en la formación de distintos profesionales. Además, se propone evaluar dichas actividades a través de un sistema de indicadores didácticos implícitos en distintas dimensiones que integran la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico. Todo ello permite fomentar la reflexión metacognitiva centrada en el diseño de actividades basadas en datos reales y en contextos cercanos a los estudiantes.

Fundamentación

Si bien desde hace décadas se enfatiza en que la interpretación y lectura de resúmenes estadísticos es uno de los temas fundamentales para promover la cultura estadística del ciudadano, con la llegada de la pandemia, esta necesidad ha quedado expuesta como nunca, evidenciando a la vez, la escasa cultura estadística, tanto de dirigentes como de ciudadanos. La llegada del COVID-19 y de las decisiones oficiales en torno a la pandemia, ha provocado una avalancha de presentaciones por parte de los dirigentes de los distintos Estados, quienes han fundamentado sus decisiones en relación a la cuarentena por medio de distintos resúmenes gráficos e indicadores.

Aún si no se considerara esta situación especial, desde hace varios años, la irrupción del *Big Data* (Escudero, 2019), ha provocado una exigencia particular a la hora de interpretar la información.

En consecuencia, tanto desde la formación de profesores como desde la formación de profesionales, se hace imperioso desarrollar propuestas didácticas centradas en la construcción y de-construcción de la información estadística, lo cual implica integrar elementos de la cultura estadística que permitan una lectura adecuada e interpretación de resúmenes estadísticos y de indicadores.

Esas propuestas deberían estar enfocadas en propiciar el sentido y la cultura estadística de los ciudadanos, de tal manera de poder generar distintos tipos de razonamientos que permitan interpretar y evaluar críticamente la información estadística sobre la que se toman decisiones que afectan a toda la ciudadanía (Gal, 2004, 2019; Barajas, Salinas, Álvarez, 2018; Schield, 1999; 2000; 2006).

Con este objetivo, se pretende implementar un taller que permita discutir sobre distintas estrategias didácticas orientadas a desarrollar el sentido estadístico, utilizando algunos indicadores para evaluar la propuesta didáctica.

El taller se desarrolla en base a la resolución y discusión de actividades que propician la de-construcción de información estadística basada en diversos aspectos de la vida cotidiana, tales como desigualdad, política, indicadores de salud o indicadores económicos, entre otros.

Para la construcción de las actividades, se tuvieron en cuenta algunas recomendaciones descritas en GAISE - *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics* Education - (Franklin, Kader, Newborn, Moreno, Peck, Perry y Scheaffer, 2007). Así, dichas actividades permiten:

- Relacionar la alfabetización estadística con distintos elementos del razonamiento y del pensamiento estadístico.

- Usar datos reales;
- Fomentar la comprensión conceptual más que el mero conocimiento de procedimientos;
- Fomentar el aprendizaje activo;
- Usar la tecnología para el desarrollo de la comprensión conceptual y el análisis de datos;

Marco de referencia

Desde hace al menos tres décadas se discute sobre los significados de la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadísticos. La interpretación que se da a estos constructos, ha cambiado con el paso del tiempo y esos cambios han quedado plasmados en distintos trabajos (Pinto, Tauber, Zapata-Cardona, Albert y Mafokozy, 2017; Ben-Zvi y Garfield, 2004, entre otros), muchos de los cuales parten de acepciones que, con algunas variantes, aún hoy brindan un marco base que nos permite identificar y reflexionar sobre nuevos procesos pedagógicos, didácticos y cognitivos que los ponen en relación. Una de esas acepciones identifica como alfabetización estadística (AE): "*la habilidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que encontramos en la vida cotidiana y la capacidad para apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer a la vida pública, profesional y personal*" (Wallman, 1993).

Esta idea de AE, implica diversos procesos de razonamiento y de pensamiento que, lleva implícitas nuevas dimensiones que vienen de la mano con la evolución tecnológica y los grandes volúmenes de datos a los que vivimos expuestos a diario (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2011). Es en este sentido que es posible indicar que, en cualquier situación de enseñanza y de aprendizaje, en la que se pretenda propiciar la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico, se hace necesaria la interacción entre distintas dimensiones que giran en torno al conocimiento estadístico y contextual (Gal, 2004).

Es así que, considerando la relevancia y utilidad de la Estadística aplicada a las Ciencias Sociales, las consideraciones realizadas en Behar y Grima (2004, 2014) pueden servir de referentes al presente trabajo. A partir del mismo, se han seleccionado las dimensiones que orientan el diseño de nuestra propuesta en el presente taller, las cuales se resumen a continuación:

- Propiciar el desarrollo de actitudes que permitan evitar especulaciones subjetivas y sentir la necesidad de fundamentar las conclusiones en evidencia objetiva basada en datos confiables. (*Dimensión asociada a la Evidencia*)
- Generar actitudes de cuestionamiento y crear conciencia sobre el hecho que el análisis de datos está íntimamente ligado a las cuestiones metodológicas asociadas a la obtención de los mismos (muestreo, diseño de la investigación, definición del constructo que da sustento a cada variable o indicador, entre otros). Generar conciencia de que para llegar a los datos se ha debido pasar por un proceso de *pensamiento estadístico*. (*Dimensión asociada a los datos y la metodología*)
- Reconocer que en cualquier proceso de toma de datos, la variabilidad es inherente al mismo y que esa variabilidad es una componente omnipresente en el proceso de modelación de la realidad, por lo que es imposible abstraerse de la misma. (*Dimensión asociada al estudio de la variación*)
- Considerar que en todo proceso de análisis de datos, hay factores de confusión que pueden controlarse y también hay ciertas tendencias que permiten medir la representatividad de ciertos parámetros. (*Dimensión asociada a la señal y el ruido*. Gal, 2004, 2019)
- Ser capaz de identificar que una situación real puede provocar un problema o una pregunta que, para resolverlo, se debe realizar un abordaje que no implica una estructura determinada. Ello implica realizar preguntas que permitan identificar un verdadero problema estadístico. (*Dimensión asociada a la actitud de cuestionamiento*. Gal, 2004, 2019)
- Valorar la relevancia de la estadística cuando es necesario comparar, predecir, estimar, construir indicadores y decidir entre diferentes opciones, reconociendo sus alcances y limitaciones. (*Dimensión asociada a la valoración del análisis*)
- Poder comunicar los resultados, indicando su poder explicativo y las condiciones en las que es posible aplicarlos. (*Dimensión asociada a la comunicación y transnumeración*. Pfannkuch y Rubick, 2002)

Todas estas dimensiones se ponen en relación a través de una trama de conexiones entre el conocimiento estadístico y el conocimiento del contexto en el que se sitúa el problema o la actividad que se pretende abordar. Esa red permite construir significados a partir de la evidencia que proporcionan los datos, a través de un diálogo constante en una cadena de diversas representaciones estadísticas, que en palabras de Pfannkuch y Rubick (2002), se denomina *transnumeración*. Este proceso de transnumeración, por ejemplo, involucraría pensar sobre reclasificar los datos, o traducir los datos a tablas, gráficos o resúmenes numéricos y los resúmenes a un informe que permita sacar conclusiones o tomar una decisión.

Lo esperable sería que esta red de dimensiones y significados se vaya construyendo a través de los distintos estadios educativos. Pero, la realidad es que aún en los cursos básicos de Estadística a nivel superior, se debe pensar en propuestas que generen la interacción de estas dimensiones, desde un estadio básico centrado en la alfabetización estadística, para acompañar a los estudiantes en la construcción del sentido estadístico y a sentar las bases que propicien el pensamiento estadístico a largo plazo (Behar y Grima, 2004).

Metodología

Objetivos

- Generar un espacio de reflexión metacognitiva que propenda a producir un análisis de contenido de las actividades propuestas enfocado en indicadores didácticos, propuestos por Behar y Grima (2004, 2014) y Gal (2004, 2019).
- Evaluar las actividades propuestas a partir de una rúbrica centrada en las dimensiones descritas en el marco de referencia.
- Propiciar un espacio de reflexión y discusión que permita identificar la riqueza conceptual que puede derivarse de la enseñanza de la estadística basada en información publicada, de tal manera que sea posible identificar conceptos, ideas fundamentales (Goetz, 2009), tipos de razonamientos y las relaciones entre ellos.

Propuesta de trabajo

Dado que se pretende que este taller sea un espacio de reflexión metacognitiva para los asistentes, se propone que el desarrollo se realice de acuerdo a cuatro momentos claramente diferenciados:

1. *Primer momento*. Trabajo en equipo resolviendo las actividades propuestas. Se divide a los asistentes en grupos de 3 o 4 personas (según la cantidad total de asistentes) y, se les pide que se pongan en el rol de un alumno que realiza su primer curso de Estadística. A cada grupo se les propone una actividad sobre la que deben discutir y resolver en grupo. (Duración prevista: 40 minutos)

2. *Segundo momento*. Presentación de indicadores didácticos. Se destina un tiempo para hacer una breve exposición de los indicadores didácticos que permitirán evaluar el nivel de complejidad de cada actividad. Se espera que sea un espacio de intercambio con momentos de exposición y otros momentos de preguntas y devoluciones entre los asistentes y las expositoras. (Duración prevista: 50 minutos)
3. *Tercer momento*. Evaluación de las actividades. Se prevé destinar un tiempo para que los grupos revisen las actividades y sus resoluciones y las evalúen en función de los indicadores presentados en el taller (Duración prevista: 45 minutos)
4. *Cuarto momento*. Reflexión metacognitiva. En este momento se espera abrir un espacio de intercambios para comentar los criterios tomados por cada grupo a la hora de la evaluación y realizar una reflexión sobre los alcances y las limitaciones cognitivas de cada actividad. (Duración prevista: 45 minutos)

Descripción de las actividades propuestas

En la primera parte del taller se presentarán las actividades seleccionadas, con el fin de que los asistentes, trabajando en grupos, proporcionen respuestas a las mismas. La segunda parte del taller, se pretende que sea un espacio de reflexión metacognitiva que permita evaluar la complejidad y riqueza conceptual de las actividades, brindar posibilidades de ampliación o de modificación e información asociada a las tecnologías que podrían utilizarse.

Las actividades sobre las que se desarrolla el taller se dividen en cinco ejes que persiguen distintos propósitos, los cuales se describen en la Tabla 1. En cada uno de estos ejes, estarán implícitas algunas de las dimensiones referidas en el marco de referencia, las cuales se tomarán como indicadores para evaluar el nivel de complejidad de cada actividad. Las actividades mencionadas se basan en información publicada en discursos oficiales, en informes como el Informe de Desarrollo Humano, en periódicos internacionales o en bases de datos oficiales (Gapminder, PNUD, Statista, The Economist, El Diario.es, INDEC, entre otros).

Eje	Propósitos
1. Comparar índices a partir de resúmenes gráficos	Se parte de una discusión política real que permite introducir conceptos asociados a distintos índices: razones, proporciones y tasas. Es posible analizar, de manera crítica, información utilizada por dirigentes políticos para la toma de decisiones (Engel, 2019).
	A partir de la comparación desde una representación gráfica publicada, se la de-construye con el objetivo de definir un índice específico y, a partir de éste, obtener nueva información, realizar nuevos resúmenes y comparaciones e imaginar posibles tendencias.
2. Comparar distribuciones a partir de diagramas y medidas	Permite trabajar con conceptos asociados a la construcción de diagramas de caja, su lectura e interpretación. Además, introduce la necesidad de conocer contextos en los que son necesarias las medidas de posición y presentar conocimientos contextuales asociados al estudio de la desigualdad (Gal, 2019).
3. Diferenciar series de tiempo y distribuciones de frecuencias	Dado que cuando se representan series de tiempo, desde gráficos de líneas, o distribuciones de frecuencias, a través de polígonos de frecuencias, es posible que surjan confusiones en la lectura e interpretación de la información, presentaremos una actividad que permite debatir sobre las diferencias entre ellas e introducir e interpretar conceptos asociados como: valores de la variable, unidad de observación, frecuencias, tipos de variables, entre otros.
4. Construir e interpretar distribuciones bivariadas, multivariadas y series de tiempo	Las actividades centradas en este eje permiten realizar distintos tipos de *transnumeración* (Pfannkuch, 2007), trabajar con datos bivariados y multivariados y construir e interpretar distintos tipos de resúmenes y de variables. A ello se agrega el trabajo con otros tipos de indicadores, tal como la variación porcentual y también es posible introducir ideas intuitivas asociadas a la aleatoriedad y a la estimación y predicción a futuro.

Tabla 1. Ejes y propósitos de las actividades. Fuente: Elaboración propia

Reflexiones finales

Algunas de las actividades presentadas para este taller han sido aplicadas con estudiantes de carreras de Ciencias Sociales (Tauber, Cravero y Santellán, 2019) y también se han trabajado con profesores de Matemática que realizaron un curso de posgrado en el marco de una Especialización en Didáctica de la Matemática, aunque dado que se utiliza información actualizada, en este taller, se presentan variantes de las desarrolladas en el curso mencionado.

A partir del curso de posgrado, se pudo observar que los profesores demandan mayor formación en Estadística para disponer de elementos teóricos conceptuales y didácticos que les permitan diseñar actividades que integren a la Estadística con otras disciplinas.

En el caso del trabajo con los estudiantes de Ciencias Sociales, cursaban su primer curso de Estadística a nivel universitario y, a pesar de que ninguno de ellos tenía formación estadística previa, y después de haber cursado un semestre donde la propuesta didáctica se centró en los fundamentos conceptuales de la Estadística, pudo observarse que lograron establecer conexiones entre conocimientos estadísticos y conocimientos contextuales de una manera adecuada e integrada, mostrando reflexiones críticas basadas en la evidencia y también adoptaron diversas habilidades asociadas con el uso de tecnologías: software, aplicaciones y videos.

Toda esta información sirve de respaldo y de interés para elaborar la propuesta del presente trabajo, buscando contribuir a la formación estadística de los ciudadanos y a la formación continua de los profesores encargados de diseñar y de desarrollar este tipo de propuestas didácticas.

Por último, dado que todas las actividades permiten distintos tipos de abordajes y diversas relaciones conceptuales, es importante crear este tipo de espacios de tal modo que el profesor pueda reflexionar junto a sus pares sobre las posibilidades didácticas de este tipo de propuestas antes de implementarlas en el aula.

Referencias bibliográficas

Barajas Prieto, F., Salinas Vargas, L. y Álvarez Alfonso, I. (2018). ¿Sabes leer e interpretar gráficos estadísticos? En Álvarez, I. (Ed.), *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp.175-197). Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Behar, R. y Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Estamos Formando Pensamiento Estadístico? *Revista Ingeniería y Competitividad, 5(2),* 84-90.

Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: Aprendizaje a largo plazo. Factores que inciden y estrategias plausibles. En G. Sanabria Brenes y F. Núñez Vanegas (Eds.), *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: goals, definitions and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Recuperado de www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Escudero, W. (2019). *Big data* (Segunda edición). Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI editores.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education [GAISE] report: A preK-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de www.amstat.org/education/gaise/.

Gal, I. (2004). Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47 – 78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Recuperado de www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Gapminder Foundation (s/f). Recuperado de https://www.gapminder.org/

Goetz, S. (2009). Fundamental ideas and basic beliefs in stochastics. Theoretical aspects and empirical impressions from the education of student teachers. In M. Kourkoulos y C. Tzanakis (Ed.), *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, II* (pp. 279–291). Rethymnon, Greece: Department of Education, University of Crete.

Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (s/f). Recuperado de https://www.indec.gob.ar/

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: A case study about the interpretation of box plots. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2(*3), 149-167.

Pfannkuch, M. y Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal, 1(2),* 4-21.

Pinto, J., Tauber, L., Zapata-Cardona, L., Albert, J., Ruiz, B. y Mafozoki, J. (2017). Alfabetización Estadística en Educación Superior. En L. A. Serna (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol 30, (*pp. 227-235). México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo (2019). Informe sobre Desarrollo Humano 2019. Recuperado de : http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr_2019_overview_-_spanish.pdf.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2011). Developing Statistical Literacy in Students and Teachers. En C. Batanero, G.Burrill and C. Reading (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* Vol. New ICMI Study Series 15, (pp. 311-322). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Sánchez, R., Ordaz, A. y Olivares, V. (4/7/2020) El coronavirus, en datos: mapas y gráficos de la evolución de los casos en España y el mundo. *ElDiario.es*. [Datos actualizados en línea]. Recuperado de https://www.eldiario.es/sociedad/mapa-evolucion-coronavirus-expansion-espana-julio-16_1_1031363.html

Schield, M. (1999). Statistical Literacy and Simpson's Paradox. *ASA Proceedings of the Section on Statistical Education.*

Schield, M. (2000). Statistical Literacy and Mathematical Reasoning. En H. Fujita, Y. Hashimoto, B. R. Hodgson, P. Yee Lee, S. Lerman y T. Sawada (Eds.), *International Conference on Mathematics Education (ICME-9)*, Tokyo, Japón.

Schield, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, Sudáfrica: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Recuperado de :
http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Statista (enero de 2020) Precios mundiales de una hamburguesa Big Mac en enero de 2020, por país (en dólares). Recuperado de :
https://es.statista.com/estadisticas/635750/indice-big-mac-precios-mundiales-de-una-hamburguesa-big-mac-en/.

Tauber, L., Cravero, M. y Santellán, S. (2019). La construcción del sentido estadístico a partir de indicadores sociales. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Recuperado de www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

The Economist. The Big Mac Index. Recuperado de:
https://www.economist.com/news/2020/07/15/the-big-mac-index.

Wallman, K.K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88(421), 1-8.*

Una experiencia para explorar enlaces matemáticos

SARA SCAGLIA
sbscaglia@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral
MARÍA FLORENCIA CRUZ
ma.florenciacruz@gmail.com
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Resumen
En el taller nos proponemos discutir y poner en juego algunas actividades que caracterizan al quehacer matemático tales como la resolución de problemas, la construcción de modelos, la elaboración de definiciones, la formulación y validación de conjeturas.
Para ello se proponen situaciones diversas de la vida real que se modelizan a partir de conceptos de Matemática Discreta, tópico de la disciplina que estudia estructuras, conceptos y relaciones matemáticas que son modelizados a partir de conjuntos numerables.

Introducción

Actualmente en el campo de la educación matemática existen diversas perspectivas que destacan la importancia de poner en juego en el aula de matemática de todos los niveles del sistema educativo las actividades que caracterizan a esta ciencia (Freudenthal, 1973; Brousseau, 1986; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Al respecto, Brousseau (1986) afirma que "el trabajo intelectual del alumno debe ser por momentos comparable a esta actividad científica" (p.6).

Itzcovich (2007) explicita algunas actividades que caracterizan al quehacer matemático como, por ejemplo, conjeturar y validar. Mariotti y Fischbein (1997) han subrayado la importancia de aprender a definir considerando esta actividad como un problema básico de la educación matemática, en este sentido se considera la actividad de definir propia del quehacer matemático.

Atendiendo a las cuestiones mencionadas se propone un taller en el que docentes y futuros profesores en matemática se involucren en la producción de definiciones relacionadas con la teoría de grafos. A su vez, se pretende que formulen conjeturas a partir de la identificación de relaciones entre las nociones definidas y las validen.

La teoría de grafos constituye un área de la matemática que tiene un origen relativamente reciente (Baltazar y Pereira, 2018). Suele señalarse el mismo en el año 1736, en un artículo publicado por L. Euler en torno al problema de los puentes de Königsberg (Johnsonbaugh, 1988; Grimaldi, 1998). Según Johnsonbaugh (1988), recién en 1920 surgió un interés sostenido, amplio e intenso por su estudio. Las razones del mismo radican en el hecho de que constituye una poderosa herramienta que permite modelizar diversas situaciones reales (Baltazar y Pereira, 2018; Oliveira y Pezzeta, 2016; Borges y Muniz, 2018; Vanegas, Henao y Gustin, 2013; Martín Morales, Muñoz Escolano y Oller Marcén, 2009). Por ejemplo: aplicaciones en sociología, resolución de problemas lingüísticos y diseño de algoritmos informáticos (Martín Morales et al., 2009), problemas de redes de computadora, telefónicas o eléctricas, circuitos eléctricos, sistemas de carretera y de transporte, distribución de mercadería y sistemas organizacionales (Vanegas et al., 2013).

Cabe señalar que la teoría de grafos no forma parte en la actualidad de las propuestas curriculares en vigencia en Argentina para la escolaridad obligatoria. No obstante, destacamos el interés de su abordaje en la formación inicial y continua de docentes de matemática, porque constituye una temática que ofrece múltiples posibilidades para el desarrollo de actividades propias del quehacer matemático: la resolución de problemas, la construcción de modelos, la elaboración de definiciones, la formulación y validación de conjeturas.

En este sentido en este taller se espera discutir la importancia de poner en juego las actividades que caracterizan al quehacer matemático y mostrar un posible modo de realizar esto en el aula de matemática de nivel secundario y universitario.

Marco teórico

Para fundamentar las tareas, la modalidad de trabajo y las discusiones didácticas que se proponen en el taller se toman aportes de la educación matemática realista y algunas cuestiones respecto a la teoría de grafos (temática a abordar).

Como punto de partida, se asume la concepción de la matemática como una actividad humana, accesible a todas las personas (Bressan, Zolkower y Gallego, 2005). Esta disciplina surge de la actividad de matematización, que consiste en "organizar la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma" (Freudenthal, 1973; p.44). Para ello, resulta de gran importancia considerar como punto de partida situaciones planteadas en contextos que resulten significativos para los estudiantes. Cuando se trata de la escolaridad obligatoria, es habitual trabajar con contextos que pertenecen a la vida diaria, pero es posible también considerar contextos puramente matemáticos. Se trata de apelar a contextos realistas, representables, razonables, imaginables para los estudiantes, como generadores de su actividad matematizadora (Freudenthal, 1973).

En sintonía con estas consideraciones, se trata de llevar a cabo en el aula el proceso de reinvención guiada, según el cual los estudiantes "reinventan modelos, conceptos y operaciones matemáticas con un proceso similar al que usan los matemáticos al inventarla" (Bressan et al., 2005; p.80-81). Esta actividad de matematización progresiva de los estudiantes, que ha sido guiada por el maestro (a partir de consignas apropiadas) adopta dos formas:

- La matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático [...]
- La matematización vertical que, dentro de la propia matemática, conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (Bressan et al., 2005; p. 82)

Este proceso supone que los estudiantes atraviesen diversos niveles de comprensión, que describimos brevemente a continuación siguiendo a Bressan et al. (2005):

Nivel situacional: se utilizan conocimientos informales, el sentido común y la experiencia en el marco del contexto en el que se presenta la situación. Corresponde a la matematización horizontal.

Nivel referencial: se ponen en juego modelos gráficos, materiales y se presentan descripciones, conceptos y procedimientos que permiten esquematizar el problema, siempre relacionados con la situación particular en que éste se ha presentado. Conduce a la obtención de un modelo de la situación.

Nivel general: se desarrolla mediante la exploración, reflexión y generalización de lo observado en el nivel anterior, pero aquí se trata de propiciar una focalización matemática en las estrategias, que permitan superar el contexto del que se ha partido, obteniendo así un modelo que podrán ser reutilizados en otros contextos.

Nivel formal: intervienen procedimientos y notaciones convencionales.

Para que los estudiantes puedan avanzar de nivel es esencial la reflexión colectiva en torno a los distintos modelos que surjan. Cada modelo refleja "aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionar la situación dada" (Bressan et al., 2005; p.88). Cabe señalar que el modelo, desde esta perspectiva, "es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación" (p. 89).

La caracterización anterior resulta adecuada para justificar las diversas actividades que esperamos generar en la propuesta de taller. Se espera partir de problemas planteados en contextos no matemáticos (juegos y situaciones problemáticas), cuya resolución requiera el pasaje por distintos niveles del proceso de matematización, que culminen con el enunciado de definiciones de algunos conceptos de la teoría de grafos, así como la formulación de conjeturas que expresen relaciones entre estos conceptos y sus respectivas validaciones.

Antes de pasar a la descripción general de las tareas a desarrollar en el taller, nos interesa destacar algunas cuestiones vinculadas con los conceptos matemáticos involucrados.

La teoría de grafos forma parte del dominio de la matemática conocido como matemática discreta. Rosen (2012) afirma que el término "discreta" se utiliza en oposición a "continuo", y muy a menudo se usa en el sentido más restrictivo de "finito". Entre los tópicos que se incluyen en los libros de texto de matemática discreta, figura el análisis combinatorio, la teoría de grafos y la teoría de números o aritmética. Todos abordan estructuras, conceptos y relaciones matemáticas que son modelizados a partir de conjuntos numerables, como los números naturales, enteros y racionales. Según Batanero, Díaz Godino y Navarro-Pelayo (1988), el análisis combinatorio constituye una parte central de la matemática discreta y aborda diversos tipos de problemas que clasifican del siguiente modo:

a) Problemas de existencia: “se plantea probar la existencia (o no existencia) de un determinado tipo de estructura discreta” (p. 26).

b) Problemas de enumeración: involucran enumerar o listar los elementos que poseen ciertas propiedades. Por lo general no es preciso dar todas las soluciones, sino proponer un algoritmo que permita su obtención.

c) Problemas de recuento: consisten en determinar el número de elementos de un conjunto finito que cumplen determinada propiedad o que satisfacen una colección de propiedades.

d) Problemas de clasificación: cuando el recuento conduce a números demasiado grandes, se renuncia a enumerarlos y se busca una clasificación mediante relaciones apropiadas. Por tanto, se trata de buscar y contar el número de los subconjuntos que definen la clasificación.

e) Problemas de optimización: se presentan cuando se tiene un conjunto de soluciones a las cuales se les puede asignar una función de valor que induce en el conjunto un orden total. Permite considerar las nociones de máximo y mínimo.

Un recorrido por los diversos temas y problemas que incluyen la teoría de grafo permite dar cuenta de, al menos, dos tipos de problemas anteriores: problemas de existencia (como resulta el famoso problema de los siete puentes de Konigsberg) y problemas de optimización (por ejemplo, el problema del viajante). Esta observación permite afirmar que el tema en torno al cual se centra el Taller permite abordar problemas específicos del análisis combinatorio, que no siempre son abordados en la escolaridad obligatoria, dado que las recomendaciones curriculares suelen limitarse a los problemas de recuento. Como sostiene Rosen (2012; p.5) los tópicos que se encuadran bajo la denominación de matemática discreta permiten “desarrollar un sentido acerca de lo que trata la matemática, de dónde los métodos matemáticos pueden ser útiles y en qué tipo de preguntas trabajan los matemáticos”.

Modalidad de trabajo

El taller se organiza en dos encuentros. Cada uno incluye dos momentos: en el primero los asistentes al taller deben resolver algunas tareas y en el segundo se realiza una puesta en común con el fin de discutir las soluciones y respuestas propuestas para cada tarea. Durante el desarrollo del taller se pretende invitar a los participantes a reflexionar en torno a consideraciones didácticas que se ponen en juego durante la resolución de las tareas, a partir de consideraciones teóricas del campo de la educación matemática.

A continuación, se explicitan nociones que se pondrán en juego en cada encuentro.

PRIMER ENCUENTRO

En el primer encuentro se proponen tareas para las cuales las soluciones óptimas pongan en juego los conceptos de grafos, caminos y circuitos eulerianos y condiciones de existencia para estos últimos.

SEGUNDO ENCUENTRO

En el segundo encuentro se proponen tareas cuyas soluciones óptimas involucren el concepto de árbol y algunos resultados generales en torno al mismo.

Reflexiones finales

Para finalizar, si bien hemos indicado la ausencia de la teoría de grafos en los lineamientos curriculares actuales de la provincia de Santa Fe para la escolaridad obligatoria, nos interesa destacar que las actividades propuestas son compatibles con las principales ideas que éstos sostienen, tales como: el reconocimiento de que la matemática permite "encontrar respuestas a problemas provenientes de diversos contextos" (p.47), la concepción de que "hacer Matemática es un trabajo de modelización cuyo motor es la resolución de problemas" (p.47), y la posibilidad de que

los estudiantes tengan oportunidades para interpretar información, establecer relaciones, conjeturar, elegir y construir un modelo para resolver los problemas, comunicar en forma oral y escrita, argumentar acerca de la validez de los procedimientos y resultados, elaborar conclusiones, de modo que posibilite la producción de conocimientos, aspecto central en la enseñanza. (p.48)

Las tareas propuestas permiten dar cuenta de la oportunidad que proporciona la teoría de grafos para promover procesos de matematización progresiva. Los problemas se enmarcan en contextos accesibles para trabajar con estudiantes de secundaria, e incluso de primaria.

Asimismo, las consignas permiten recorrer diversas actividades del quehacer matemático, por lo que constituyen, como afirma Rosen (2012) una buena oportunidad para dar cuenta de lo que es la matemática y del tipo de problema que su estudio permite abordar.

Finalmente, cabe mencionar que se espera poner de manifiesto y reflexionar en torno a la importancia de proponer experiencias educativas en las que se generen definiciones y se conjeturen y validen propiedades apelando a diversos constructos teóricos reconocidos en el campo de la Educación Matemática.

Referencias bibliográficas

Baltazar, R.y Pereira, L. (2018). O estudo de Grafos: uma proposta investigativa. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(2), 334-348.

Batanero, M.C., Godino, J.D., Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid, España: Síntesis.

Borges, V. y Muniz, I. J. (2018). Otimização Discreta com Grafos no Ensino Médio. *Boletim online de Educação Matemática, 6*(11), 181-199.

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, M.F. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (Comps.), *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 71-98). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. (Trad. J. Centeno Pérez, B. Melendo Pardos y J. Murillo Ramón.), *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Chevallard Y., Bosch, M. y Gascón, J. **(1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido*** *entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Grimaldi, R. (1998). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México, México: Addison Wesley Longman.

Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Johnsonbaugh, R. (1988). *Matemáticas Discretas*. México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219–248.

Martín Morales, J., Muñoz Escolano, J.M. y Oller Marcén, A.M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, (12), 137-164.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014). Diseño curricular. Educación secundaria orientada provincia de Santa Fe. Matemática. Recuperado de https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf

Oliveira, G.P., Pezzeta, J.R. (2016). Teoria dos grafos no ensino médio: uma abordagem por meio da resolução de problemas. *Ensino da Matemática em Debate*, *3*(1), 20-44.

Rosen, K. (2012). *Discrete Mathematics and its Aplications.* (Seventh Edition). Nueva York, EEUU: Mc Graw Hill.

Vanegas, J., Henao, S.M. y Gustin, J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. En P. Perry, *Memorias 21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones,* (pp. 283-290). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Concurso fotográfico: La Matemática está en todas partes

El objetivo de este concurso fue el de resaltar la presencia de las matemáticas, en todas sus ramas, a nuestro alrededor, poniendo de manifiesto su utilidad en la actividad personal y social cotidiana.

Usamos la Matemática todos los días: en el trabajo, al comprar o al vender, cuando practicamos un deporte, cuando jugamos... ¿Podemos reflejar alguno de estos aspectos en una fotografía?

El Departamento de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), en sus VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática, invitó a participar en este concurso, para mirar la realidad con ojos matemáticos.

La convocatoria estuvo orientada a estudiantes de educación secundaria de la zona de influencia de la Universidad Nacional del Litoral, agrupados en tres categorías:

- Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria
- Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria
- Categoría C: Estudiantes de quinto año de la educación secundaria y de los cursos superiores de aquellas escuelas que tengan una duración mayor a 5 años.

La temática del concurso abarcó todo tipo de imágenes en la que se pusiera en evidencia, evocara o se asociara eficazmente conceptos, objetos o recursos que entendemos pertenecen a la Matemática (figuras geométricas, simetrías, convergencias, divergencias, aleatoriedades, regularidades, tramas, fractales, ...). Podrían encontrarse en todo tipo de paisajes, desde planos generales (montañas, mares, ríos, lagos, campos, bosques,...) hasta planos más pequeños (macrografía, detalles de la naturaleza,...); como así también todo tipo de seres vivientes.

Las fotos podían tener incluidos elementos o estructuras realizadas por el hombre como también paisajes urbanos. Se valoraron los elementos que respondieran a una poética visual pero se dio prioridad en el análisis al contenido temático propuesto en la convocatoria; es decir, el reflejo de un saber matemático, más allá de sus valoraciones técnicas y su atractivo visual.

Mathematical Nature

CAMILA CHESA

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "Nuestra Sra. del Huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 2 "A"

Docentes: Alejandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Galaxia hexagonal embotellada

LUJÁN MICHELLE FUNES

San José de las hermanas franciscanas terciarias de la caridad

Santa Fe, Departamento La Capital

Curso: 1º "B"

Docente: Giuliana Gaspoz

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Habitando el espacio-tiempo

ALONDRA FURLÁN

Colegio San José Hermanas Terciarias Franciscanas de la Caridad, Santa Fe Capital

Curso: 1º "A"

Docente: Magali Freyre

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Medias Naranjas

María Luz Sandobal

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "Nuestra Sra. Del Huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 2º "A"

Docentes: Fabiana Petrone y Alejandra Oggioni

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Rombos Tejidos

Valentina Paglia
E. E. S. O. P. I Nº 8076 "Nuestra Sra. del Huerto", Esperanza, Santa Fe
Curso: 2 "A"
Docentes: Alejandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Segundo premio categoría "A"

Simetrías matemáticas en los animales

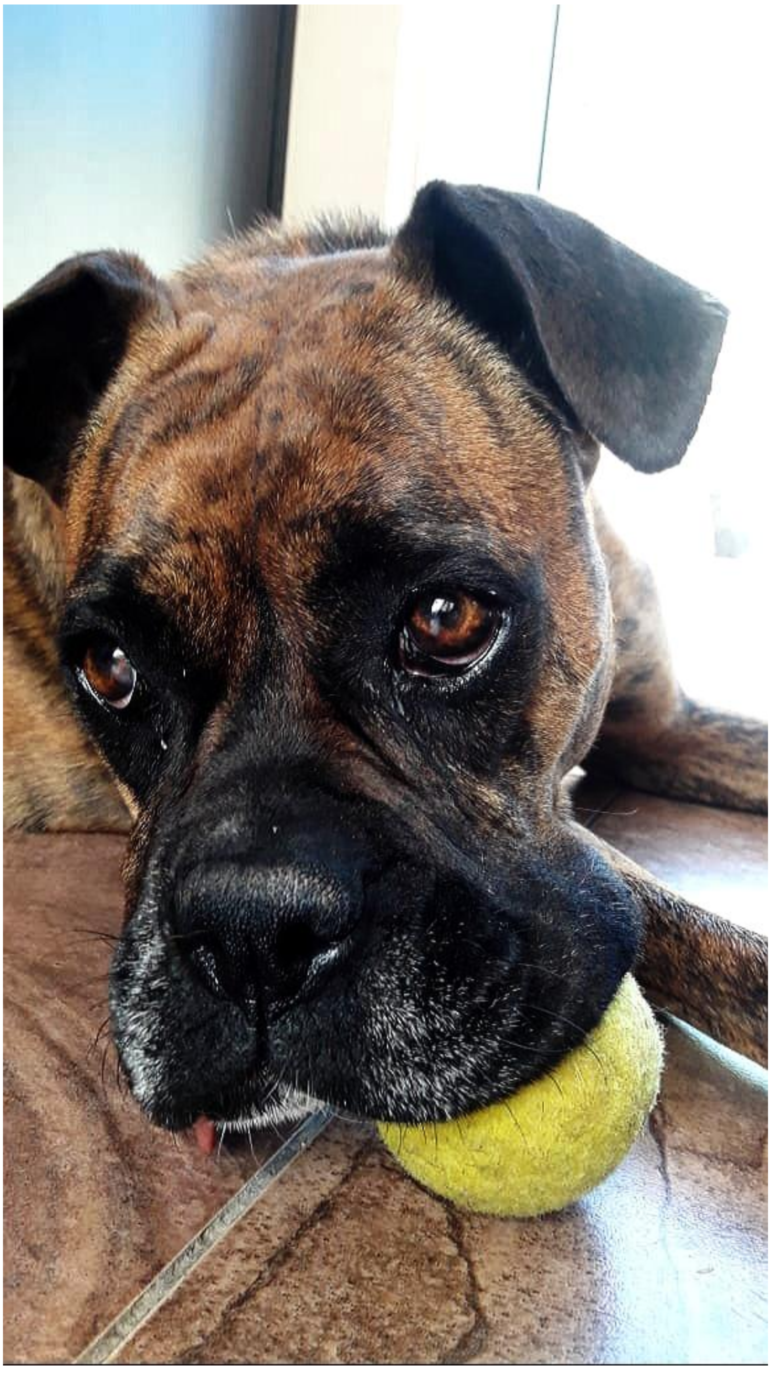
PAULINA RUSTRE

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "Nuestra Sra. del Huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 2 "A"

Docentes: Alejandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria



El caracol y su reflejo

VALENTINA ARENALES

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "Nuestra Sra del Huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 2 "A"

Docentes: Alejandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

La esfera perdida

Agostina Cavallero

San José de las hermanas franciscanas de la Caridad, Santa Fe

Curso: 1º"B"

Docente: Giuliana Gaspoz

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Primer premio categoría "A"

La ruleta de los ángulos

MÁXIMO VARAYOUD

E.E.S.O. N°530

"Fermin Laprade" San Carlos Norte-Santa Fe

Curso: 1° "A"

Docente: Cristina Romero

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

La espiral del carpintero

NICOLÁS BUTTARO

EESOPA 3079, Sunchales, Santa Fe

Curso: 2º División: Solidaridad

Docente: Gabriela Correnti

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Segunda mención categoría "A"

El tríptico del pez

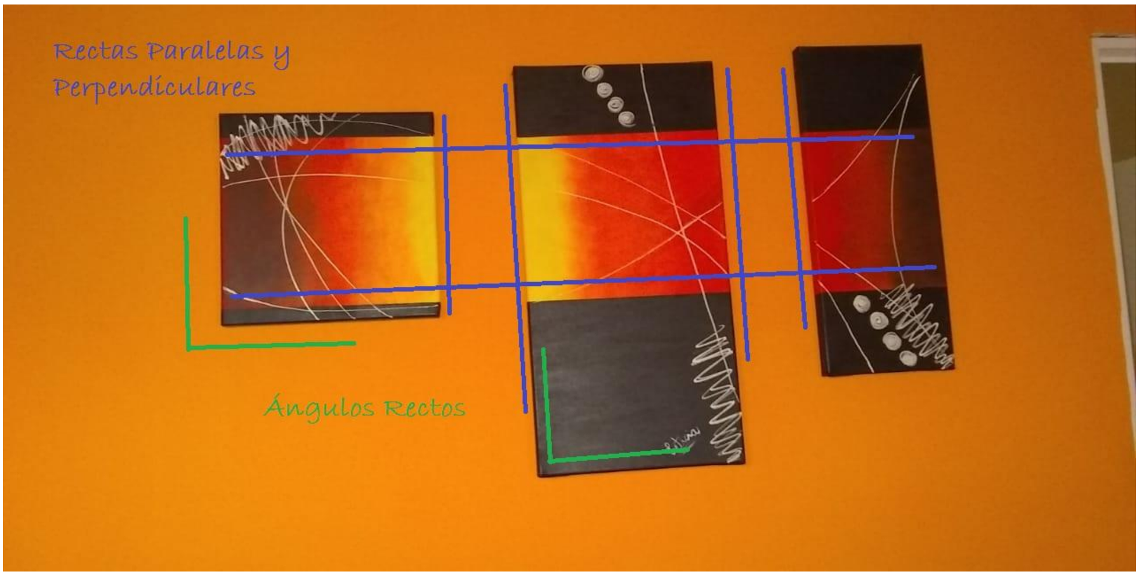
LORENZO IMHOFF

E.E.S.O. N°530 "Fermin Laprade" San Carlos Norte-Santa Fe

Curso: 1º A

Docente: Cristina Romero

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria



¿Subís o bajás?

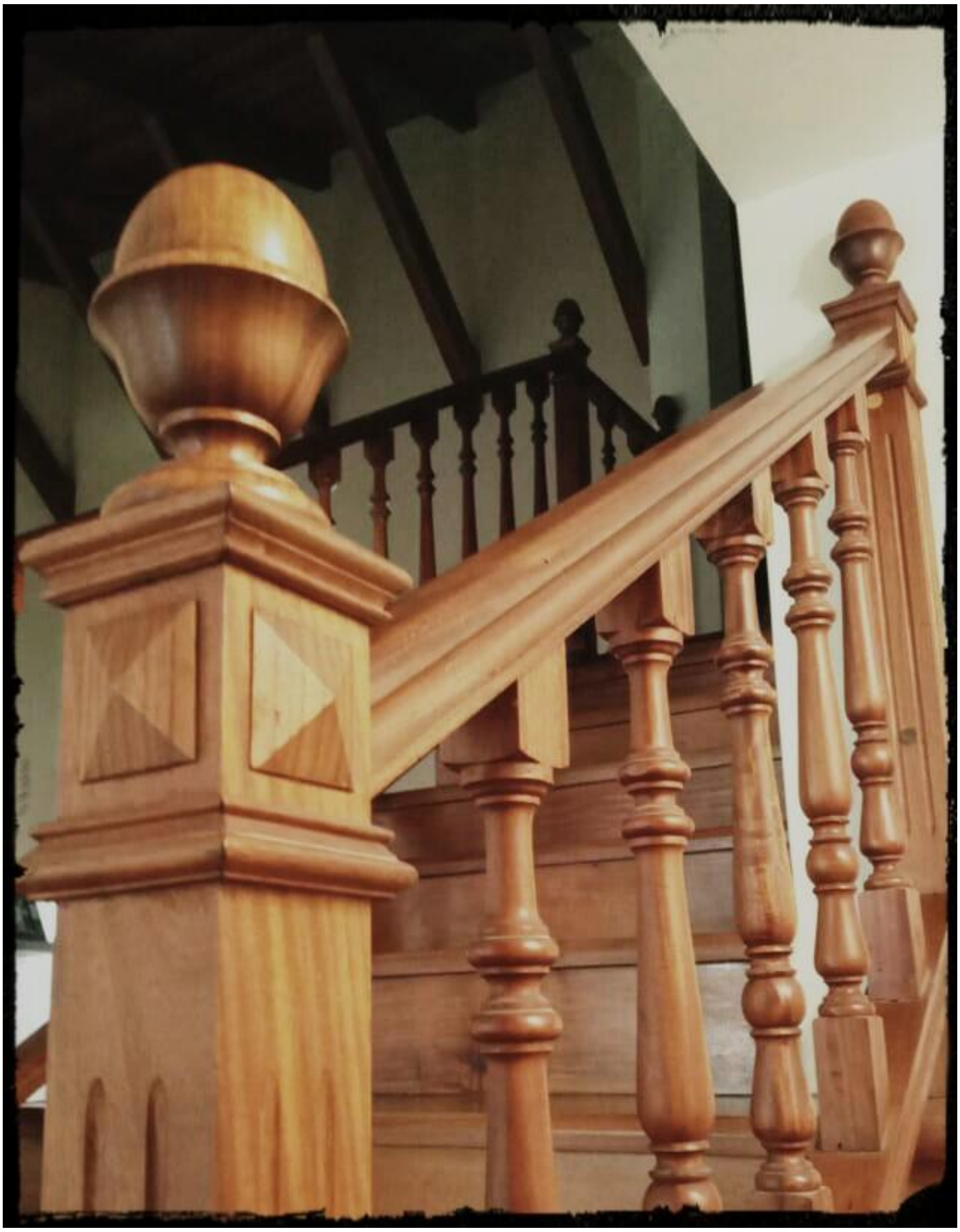
MATIAS BUSTABER

Colegio San José de las Hermanas Terciarias Franciscanas de la Caridad, Santa Fe

Curso: 1° A

Docente: Magali Freyre

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria



¿En dónde se encuentran las matemáticas?

Brisa Osuna

San José hermanas terciarias franciscanas de la caridad, Santa Fe

Curso: 1º C

Docente: Giuliana Gaspoz

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Fillmore-Cars

LAUTARO DESTEFANI

Colegio San Jose Hnas Franciscanas Guadalupe, Santa Fe

Curso: 1º "A"

Docente: Magalí Freyre

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Naturaleza geometría

MIRANDA GODOY

Colegio San José, Santa Fe

Curso: 1°

Docente: Magalí Freyre

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Primera mención categoría "A"

El reflejo de una flor

VICTOR HUGO SCHREIER

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "Nuestra Sra. del Huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 2 "A"

Docentes: Alejandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Las margaritas

VALENTINA TÉVEZ
Esperanza

Curso: 2do

Docente: Fabiana Petrone

Categoría A: Estudiantes de primer año y segundo año de la educación secundaria

Reglamentariamente imposible

CELESTE CÓRDOBA
E.E.S.O.P.I Nro 8002 “San José” Hermanas Terciarias Franciscanas de la Caridad, Santa Fe

Curso: 4to - Economía

Docente: Magali Freyre

Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria

Segunda mención categoría “B”

Tranquera De Thales

LUZ VERGARA
Colegio San José 8002, Santa Fe, Santa Fe
Curso: 3 año C
Docente: Magali Freyre
Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria
Segundo premio categoría “B”

Las cuatro caras del triángulo

PAULA CÓRDOBA

E.E.S.O.P.I Nro 8002 "San José" Hnas Terciarias Franciscanas de la Caridad, Santa Fe.

Curso: 4to Economía

Docente: Magali Freyre

Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria

Primera mención categoría "B"

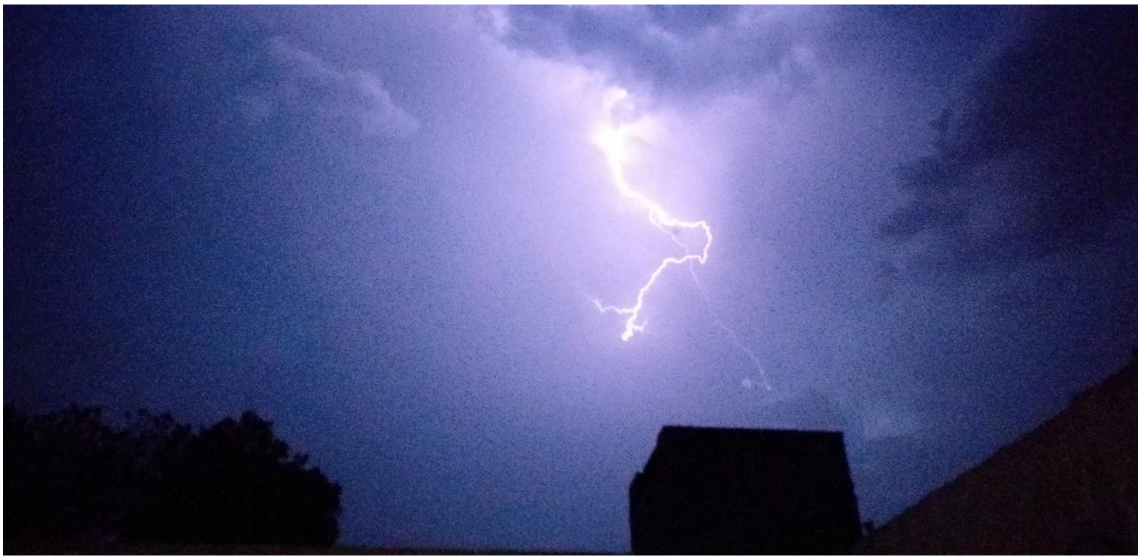
The perfect angle

VIRGINIA MILANESIO

San José Hermanas Terciarias Franciscanas, Santa Fe Capital

Curso: 3ro A (Humanidades)

Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria



El atrapacuadrilateros

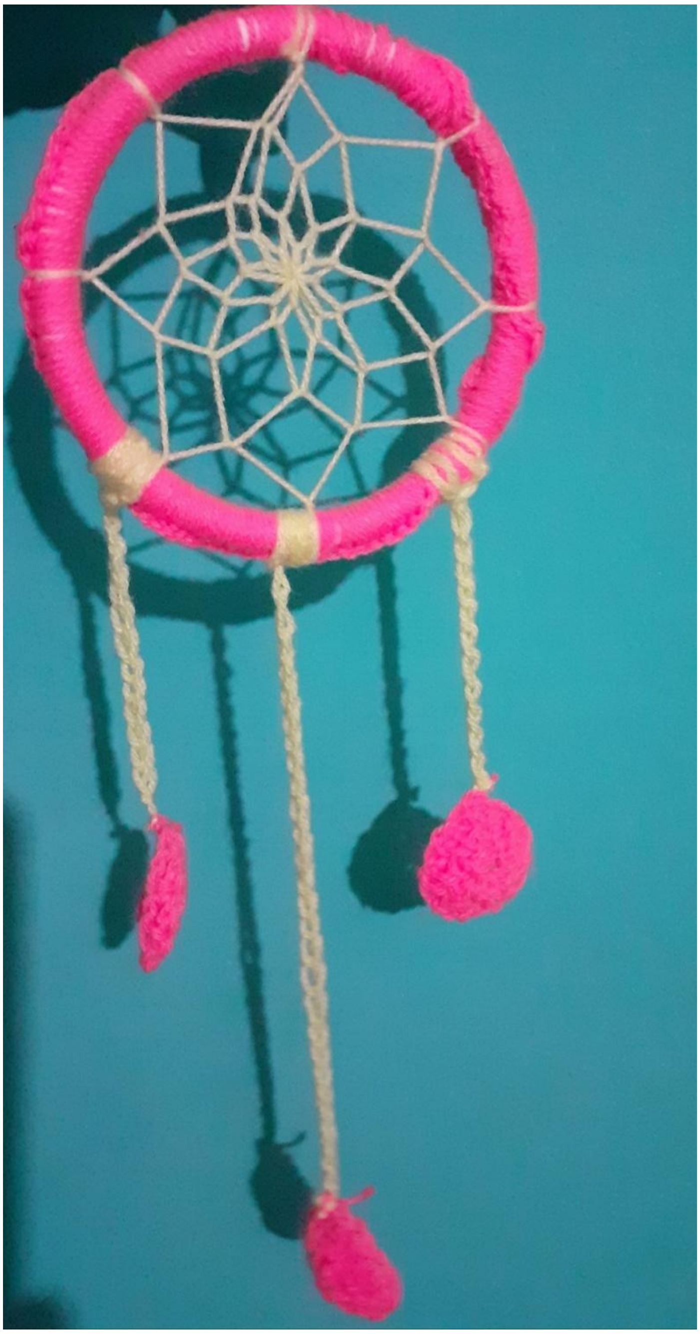
MAGALI HEIT

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "Nuestra Sra. del Huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 3 "A"

Docente: Alejandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria



Triángulos al viento

MICAELA COLOMBA

EESO N°530 de San Carlos Norte

Curso: 3°año

Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria

Primer premio categoría "B"

Ritmo sucesivo de una imagen a través de la matemática

SANTIAGO CAMACHO

E.E.S.O.P.I NRO 8076 "nuestra señora del huerto", Esperanza, Santa Fe

Curso: 3"A"

Docentes: Alegandra Oggioni y Fabiana Petrone

Categoría B: Estudiantes de tercer año y cuarto año de la educación secundaria

Geometría viva

GUILLERMINA PUIGJANE
San José de Guadalupe, Santa Fe

Curso: 5to Año Economía

Docente: Magali Freyre

Categoría C: Estudiantes de quinto año de la educación secundaria y los estudiantes de los cursos superiores de aquellas escuelas que tengan una duración mayor a 5 años.

Primer premio categoría "C"

Un conjunto de figuras en el arte

AZUL GODOY

EESO 371. "Soldados De La Patria Colombo-Müller", Esperanza, Santa Fe

Curso: 5to “C” Artes Visuales

Docentes: Gisela Albrecht y Fabiana Petrone

Categoría C: Estudiantes de quinto año de la educación secundaria y los estudiantes de los cursos superiores de aquellas escuelas que tengan una duración mayor a 5 años.

Revolucionada pequeñez

VALENTINO ROMÁN BRUSA

E.E.S.O. N° 371 "Soldados de la Patria: Colombo Müller", Esperanza

Curso: 5° año "C" Artes Visuales

Docentes: Gisela Albrecht y Fabiana Petrone

Categoría C: Estudiantes de quinto año de la educación secundaria y los estudiantes de los cursos superiores de aquellas escuelas que tengan una duración mayor a 5 años.

Segundo premio categoría "C"

FHUC

UNL • FACULTAD
DE HUMANIDADES
Y CIENCIAS